МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИЖЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. Т. КАЛАШНИКОВА»

На правах рукописи

САБУРОВА ЕКАТЕРИНА АНДРЕЕВНА

УДК 517.977.1+338.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИМ РАЗВИТИЕМ РЕГИОНА

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Специальность:
05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Научный руководитель:
доктор физ. – мат. наук, профессор Кетова К.В.

Ижевск – 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Обозначения:

t – время;

Y – валовой региональный продукт (ВРП);

K – величина основных производственных фондов (ОПФ);

β – темп научно-технического прогресса (НТП);

H – величина человеческого капитала;

κ – темп социально-образовательного прогресса (СОП);

C – потребление;

I – инвестиции в основные производственные фонды;

P – общее население региона;

L – экономически активное население

$\lambda = L/P$ – доля экономически активного населения;

τ – возраст населения;

$\rho(t,\tau)$ – функция распределения плотности населения по возрастам;

$\mu(t,\tau)$ – функция распределения смертности по возрастам;

$\gamma(t,\tau)$ – функция плотности распределения рождений;

η – коэффициент выбытия основных производственных фондов;

$h(t,\tau)$ – удельное значение человеческого капитала;

χ – коэффициент выбытия человеческого капитала;

J – инвестиции в человеческий капитал;

I – инвестиции в основные производственные фонды;

s_0 – норма потребления;

s_k – норма инвестиций в основные производственные фонды;

s_h – норма инвестиций в человеческий капитал.

Сокращения:

УР – Удмуртская Республика;

ВРП – валовой региональный продукт;

ОПФ – основные производственные фонды;

НТП – научно-технический прогресс;

СОП – социально-образовательный прогресс;

МНК – метод наименьших квадратов.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы. Устойчивый экономический рост региональной системы во многом определяется стратегией ее социально-экономического развития. В основу построения оптимальной стратегии должны быть положены экономически обоснованные и математически подтвержденные и проверенные выводы. Формирование оптимальной стратегии социально-экономического развития региона является управленческой задачей, заключающейся в определении объемов финансирования социальной и производственной сфер деятельности. В этой связи актуальным является разработка математической модели оптимального управления экономическими процессами.

Построение оптимальной стратегии является актуальной задачей на любом этапе развития общества, поскольку оптимальное управление приводит региональную систему к устойчивому экономическому росту и повышению уровня и качества жизни населения. Здесь важным является обеспечение сбалансированного развития социальной и производственной сфер.

Стратегия социально-экономического развития Российской Федерации до 2020 года сформулирована в Распоряжении Правительства РФ от 7 февраля 2011 г. N 165-р [1]. В ней определены основные направления социально-экономического развития, которые в современных условиях являются приоритетными.

Инновационная политика развития общества сформулирована в Распоряжении Правительства РФ № 2227-р от 8 декабря 2011 года [2].

Инновационное развитие общества обеспечивается научно-техническим (НТП) и социально-образовательным прогрессом (СОП). НТП ведет к улучшению технического уровня вследствие внедрения новейших достижений науки и техники и напрямую влияет на инновационное и экономическое развитие.

Социально-образовательный прогресс характеризует развитие фактора человеческого капитала. Человеческий капитал состоит из демографической и качественной составляющих. Демографическая составляющая человеческого капитала учитывает численное воспроизводство населения [3-4]; качество человеческого капитала состоит из инвестиций на здравоохранение, образование, науку и культуру [5-9].

Актуальность изучения человеческого капитала на основе его экономико-математического моделирования прежде всего связана с его значительным влиянием на развитие экономической системы, обеспечивая конкурентоспособность и ускоренный переход экономики на инновационный путь развития. Также следует отметить, что немаловажным является и учет численности населения, являющегося носителем человеческого капитала и ресурсом, обеспечивающим выпуск продукции.

Таким образом, наличие НТП и СОП позволяет повысить эффективность экономической системы, что делает актуальным учет этих факторов при решении задач оптимального управления учетом прогнозирования демографической динамики.

Рассмотренное в данной диссертационной работе решение задачи оптимального управления экономической системой региона с учетом общей демографической динамики и трудовых ресурсов позволяет определить оптимальные объемы финансирования социальной и производственной сфер для устойчивого экономического роста в условиях научно-технического и социально-образовательного прогресса. Для этого используется принцип максимума Понтрягина [10] и принцип оптимальности Беллмана [11].

Степень разработанности тематики. Проблема необходимости количественной оценки и отображения НТП в экономико-математических моделях появилась в середине XX века в связи с появлением работ по изучению экономического роста.

Наиболее широко используемым методом учета НТП является его учет с использованием производственных функций. К таким работам относятся работы американских ученых Р. Солоу и К. Эрроу [12, 13].

В экономико-математических моделях американских экономистов П. Ромера и Р. Лукаса [14-16] выдвинута гипотеза об эндогенном характере производственно-технических нововведений, основанных на вложениях в технологический прогресс и в человеческий капитал.

Изучение динамики и свойств СОП напрямую связано с развитием теории человеческого капитала. Основоположниками теории человеческого капитала являются У. Петти, А. Смит, Д. Рикардо, К. Маркс, А. Маршалл, Л. Вальрас, И. Фишер и др. [17-27].

Современная теория человеческого капитала получила развитие в начале 50-х годов XX века в работах Г. Беккера [28] и Т. Шульца [29]. Также изучением данной тематики занимались такие экономисты, как У. Боуэн, Б. Вейсброд, Дж. Минцер, М. Фишер, Й. Бен-Порэт и др. [30-35]. Также комплексная оценка человеческого капитала содержится в трудах Р.И. Капелюшникова, А.И. Добрынина, А.В. Корицкого, В.И. Марцинкевича и др. [36-40]. Влияние человеческого капитала на устойчивое развитие экономической системы изучены в работах Дж. Форрестера, Д. Медоуз, С.Н. Бобылева, В.А. Коптюга, Н.П. Тарасовой и др. [41-44].

Следует отметить, что количественная оценка темпов НТП и СОП, а также математическая оценка влияния этих темпов на динамику развития экономической системы в настоящее время изучены недостаточно и требуют дальнейшего анализа, тем более в современных условиях актуализации инновационного развития экономики.

Моделирование демографических характеристик осуществляется на основе уравнения переноса, рассмотренного в работе О.В. Староверова [45].

Построение стратегии оптимального управления региональной экономической системой основывается на теории оптимального управления, построение которой рассмотрено в работах Р.Е. Калмана, Л.М. Маркуса, Р. Беллмана, Л.С. Понтрягина, Н.Н. Красовского, В.И. Гурмана, Н.Н. Моисеева, В.И. Зубова, В.З. Беленького и др. [46-54].

Предметом исследования являются методы анализа и решения задачи оптимального управления региональной экономической системой с учетом демографической динамики, научно-технического и социально-образовательного прогресса.

Целью диссертационной работы является разработка математической модели и программно-вычислительного комплекса для решения задачи оптимального управления региональной экономической системой в условиях научно-технического и социально-образовательного прогресса, позволяющей учитывать прогнозирование демографических характеристик.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи:**

1. Разработка математической модели и методики количественной оценки человеческого капитала, учитывающего социально-образовательный прогресс общества.
2. Решение задачи оптимального управления региональной экономической системой с учетом научно-технического и социально-образовательного прогресса.
3. Разработка программно-вычислительного комплекса, позволяющего решать задачи математического моделирования человеческого капитала и оптимального управления с учетом общей демографической динамики и динамики трудовых ресурсов в условиях научно-технического и социально-образовательного прогресса.

Методы исследования. В работе использованы методы математического моделирования, методы статистической обработки данных, численные методы решения дифференциальных уравнений, методы математического прогнозирования, методы теории оптимального управления.

Достоверность и обоснованность полученных результатов базируется на корректности математической постановки экономической задачи, методов решения, сходимости применяемых численных алгоритмов.

На защиту выносятся:

1. Математическая модель задачи оптимального управления экономической системы с учетом общей демографической динамики и динамики трудовых ресурсов в условиях научно-технического и социально-образовательного прогресса.
2. Математическая модель и методика качественной и количественной оценки человеческого капитала.
3. Программно-вычислительный комплекс, включающий: базу данных по демографическим и экономическим показателям, реализующий модели динамики факторов развития региона и алгоритм решения задачи оптимального управления экономической системой с учетом научно-технического и социально-образовательного прогресса.
4. Пример построения оптимального управления на основе разработанного программного комплекса для Удмуртской Республики, позволяющего выработать программу стратегического развития региона с целью устойчивого роста социально-экономической системы региона.

Научная новизна диссертации заключается в создании и решении математической модели оптимального управления региональной экономической системой с учетом прогноза общей демографической динамик и динамики трудовых ресурсов в условиях научно-технического и социально-образовательного прогресса, в разработке новой математической модели и методики количественной оценки величины человеческого капитала, а также в разработке программного комплекса, позволяющего решить задачу оптимального распределения капиталовложений в условиях инерционного и инновационного сценария развития.

Теоретическая и практическая значимости. В работе рассматривается оптимальное управление региональной экономической системой в условиях НТП и СОП с учетом накопления человеческого капитала и прогноза трудовых ресурсов. Полученные результаты позволяют выработать программу стратегического развития региона и определить приоритетные направления с целью устойчивого развития социально-экономической системы.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы по теме «Разработка математического аппарата решения задач оптимального управления для различных переходных режимов экономики с учетом влияния многих факторов» (руководитель: д.ф.-м.н., профессор К.В. Кетова).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и выставках: II Международной научно-практической интернет-конференции "Анализ, моделирование и прогнозирование экономических процессов" (Воронеж, 15 декабря 2010 г.-15 февраля 2011 г.); III Международной научно-практической конференции "Проблемы современной экономики" (Новосибирск, 17 мая 2011 г.); IV Международной научно-практической конференции "Экологические проблемы природных и урбанизированных территорий" (Астрахань, 19-20 мая 2011 г.); V Международной научно-практической конференции "Современное состояние естественных и технических наук" (Москва, 17 августа 2011 г.); Всероссийской научно-практической конференции "Математические методы и интеллектуальные системы в экономике и образовании" (Ижевск, декабрь 2011 г.); I Всероссийской научно-практической интернет-конференции "Проблемы и перспективы социально-экономического развития: взгляд молодых" (Тамбов, 17 мая 2012 г.); Международной научно-практической конференции "Актуальное состояние и тенденции развития физико-математических наук и информационных технологий" (Новосибирск, 25 сентября 2012 г.), Международной научно-практической конференции "Информационные технологии в науке, бизнесе и власти" (Екатеринбург, 4 декабря 2013 г.).

Публикации.

Результаты работы отражены в 9 научных публикациях: 4 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, 5 статей в сборниках трудов международных конференций.

Получено свидетельство ИНИМ о регистрации программно-вычислительного комплекса «Решение задачи оптимального управления региональной экономической системой» (№ 2013615414 от 06 июня 2013 года).

Результаты диссертационного исследования были использованы при выполнении государственного контракта по теме: «Разработка математического аппарата решения задач оптимального управления для различных переходных режимов экономики с учетом влияния многих факторов» (руководитель: д.ф.-м.н., профессор К.В. Кетова).

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка. Работа изложена на 113 страницах машинописного текста, содержит 44 рисунка, 22 таблицы и список литературы из 162 наименований.

Во введении представлена актуальность, цель и задачи диссертационной работы, ее теоретическая и практическая значимость, научная новизна, основные положения и результаты, выносимые на защиту.

В первой главе представлен обзор существующих методов изучения и моделирования экономических процессов с учетом НТП и СОП. Рассматриваются производственный капитал и человеческий капитал, являющиеся индикаторами НТП и СОП соответственно. Приводятся инструменты анализа экономической системы.

Вторая глава посвящена математическому моделированию оптимального управления экономической системы с учетом прогноза демографической динамики. Приведена математическая модель экономической системы региона с учетом показателей, отражающих количественные оценки инновационного развития общества. На ее основе осуществлено математическое моделирование оптимального управления динамикой экономической системы с учетом НТП и СОП, позволяющей учитывать прогнозирование демографических характеристик. Приведен алгоритм решения поставленной задачи.

В третьей главе рассмотрено моделирование динамики численности населения, человеческого капитала и производственного капитала, являющихся основными факторами развития региональной экономики.

В четвертой главе рассмотрено решение задачи оптимального управления динамикой экономической системы Удмуртской Республики (УР) в условиях НТП и СОП. Произведена идентификация параметров математической модели региональной экономической системы. Построено оптимальное управление экономической системой региона, которое позволяет экономической системе выйти на траекторию сбалансированного роста. Для решения поставленной задачи разработан программно-вычислительный комплекс.

В заключении приведены основные результаты и выводы по диссертационной работе.

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору К.В. Кетовой и доктору технических наук, профессору И.Г. Русяку за консультации по теории математического моделирования и методам оптимального управления в моделях экономической динамики, всестороннюю помощь и поддержку при подготовке данной работы.

1. ОБЗОР ПОДХОДОВ К ИЗУЧЕНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО И СОЦИАЛЬНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОГРЕССА

1.1 Производственный капитал как индикатор научно-технического прогресса

Основными факторами развития экономической системы являются основные производственные фонды (ОПФ) и человеческий капитал, для которого исследование и построение математической модели является одной из актуальных задач современной экономики. Развитие каждого из этих факторов характеризуется прогрессом определенного рода. Так, развитие производственных фондов отражает *научно-технический прогресс* общества, развитие человеческого капитала и трудовых ресурсов характеризуется *социально-образовательным прогрессом*.

Основные производственные фонды являются материально-технической основой процесса производства и пополняются за счет капитальных вложений. Они подвержены износу, поскольку под влиянием различных факторов со временем утрачивает свои свойства [55].

Согласно определению [56], *основные производственные фонды* – это произведенные активы, подлежащие использованию неоднократно или постоянно в течение длительного периода (не менее одного года), для производства товаров, оказания рыночных и нерыночных услуг, для управленческих нужд либо для представления другим организациям за плату во временное владение и пользование или во временное пользование.

Основные производственные фонды являются одним из основных факторов производства. Эффективное использование и постоянное обновление ОПФ региона позволяет увеличить ее технические и экономические показатели, в том числе валовой региональный продукт (ВРП).

Теоретические и методологические вопросы управления и анализа ОПФ рассмотрены в работах таких ученых-экономистов как В.В. Ковалев, Г.В. Савицкая, Т.Л. Каплин, И.В. Сергеев, А.В. Малеева, К.К. Вальтух, В.Н. Лившиц, Е.Ф. Жуков, А.Д. Шеремет и др. [57-62].

Проблема оценки величины, динамики и качественной структуры производственных фондов является очень важной проблемой, поскольку эти показатели необходимы при проведении анализа, оценочных расчетов, построения прогнозов при изучении поведения различных экономических систем.

Учет и оценка основных производственных фондов производятся в натуральной и стоимостной формах [63]. Натуральная форма учета (штуки, тонны, километры и т.д.) характеризует их техническое состояние. Учет в стоимостном выражении (рубли) прежде всего необходим для определения стоимости фондов и величины амортизационных отчислений.

Оценка ОПФ в стоимостном выражении производится по первоначальной, восстановительной, остаточной и ликвидационной стоимости [63].

В процессе обновления основных фондов происходит замена устаревших средств труда новыми, более эффективными. При этом обновление может быть частичным или полным. Экономический эффект обновления основных фондов состоит в улучшении производственных характеристик, что приводит к росту производительности труда и, в целом, к росту ВРП.

В современной экономике главным условием, определяющим необходимость замены основных производственных фондов, является их соответствие уровню научно-технического прогресса. Поэтому для развития экономической системы необходимо разработать грамотную инвестиционную и инновационную политику обновления ОПФ [2, 63].

Как было отмечено, развитие фактора производственных фондов характеризуется научно-техническим прогрессом. Необходимость количественной оценки и отображения НТП в экономико-математических моделях возникла в середине XX века и связана с актуальностью изучения вопроса экономического роста. Так, в 1957 г. Р. Солоу применил в своей модели нейтральный по Хиксу научно-технический прогресс [12]: производственная функция умножалась на коэффициент, который показывал технологические изменения и зависел от времени.

Далее было введено предположение о том, что усовершенствованные, инновационные технологии влияют на объем производства через различные капиталовложения [13].

Так, во второй половине 80-х годов, появляются модели, в которых для учета экономического роста используются технические и технологические новшества. Авторами этих моделей являются П. Ромер и Р. Лукас [14-16].

В настоящее время разработаны различные модели учета НТП в экономике [64-70]. Так, оценка НТП рассматривается по показателям, относящимся к результатам усовершенствования производства: количеству и качеству выпущенной продукции, росту производительности труда и др. [71-72]. Также оценка НТП, представленная в работах Валдайцева С.В. и Лахтина Г.А. [73-74], рассматривалась как соотношение ресурсов, выделяемых на обновление производства, и ресурсов, направляемых на обеспечение расширенного воспроизводства.

Наиболее широко используемым методом учета НТП является его учет с использованием производственных функций [13, 75-78].

Производственные функции позволяют оценить степень влияния факторов на результат производства и их взаимозаменяемость. Также производственные функции позволяют рассчитать прогнозные значения объема выпуска продукции в будущем периоде.

Чаще строятся многофакторные производственные функции, которые показывают влияние факторов производства $x_1, x_2, ..., x_n$ на величину произведенной продукции Y. Уравнение многофакторной производственной функции имеет общий вид:

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.1}$$

Наиболее распространенной является двухфакторная модель *производственной функции Кобба-Дугласа*, показывающая влияние капитала K_t и труда L_t на выпуск продукции Y_t [77]:

$$Y_t = AK_t^{\alpha_1} L_t^{\alpha_2}, \quad (1.2)$$

где A – технологический коэффициент, α_1 – коэффициент эластичности по капиталу, α_2 – коэффициент эластичности по труду. При этом если $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то функция Кобба-Дугласа является линейно однородной с постоянной отдачей при изменении масштабов производства, если $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ – возрастающая отдача, $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ – убывающая.

Для отображения НТП в производственных функциях используют *экзогенный и эндогенный подходы*.

Рассмотрим случаи, когда прогресс выступает как экзогенно заданная величина, влияющая на производительность труда и экономический рост [75-77]. Для этого применяются три вида нейтрального технического прогресса: по Хиксу, по Харроду и по Солоу [79].

При нейтральном по Хиксу техническом прогрессе выражение производственной функции (1.2) принимает вид:

$$Y_t = e^{\lambda t}(AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}), \quad (1.3)$$

где λ – темп развития технического прогресса.

Нейтральный по Харроду технический прогресс является трудосберегающим, а выражение производственной функции (1.2) принимает вид:

$$Y_t = AK_t^{\alpha}(L_t e^{\lambda t})^{1-\alpha}. \quad (1.4)$$

Нейтральный по Солоу технический прогресс является капиталосберегающим, и производственная функция имеет вид:

$$Y_t = A(K_t e^{\lambda t})^{\alpha} L_t^{1-\alpha}. \quad (1.5)$$

Эндогенный подход основан на том, что новые технологии, являющиеся результатом НТП и факторами производства, влияют на объем производства, т.е. учет НТП осуществляется внутри самих факторов производственной функции.

Данный способ построения моделей в своих работах рассмотрели К. Эрроу, П. Ромер и Р. Лукас [14-16, 80-81].

В модели П. Ромера и Р. Лукаса рассматривается объем человеческого капитала, подразумевающего такие качества работника, которые способствуют увеличению результативности его работы и возобновляются или усовершенствуются затратами на образование и приобретение квалификации [14-16, 80-82].

Модель Р. Лукаса имеет вид:

$$Y_t = A \cdot K_t^{\alpha} \cdot (u_t h_t L_t)^{1-\alpha} \cdot h_{\alpha}^{\gamma}, \tag{1.6}$$

$$\dot{h}_t = h_t \cdot G \cdot (1 - u_t), \tag{1.7}$$

где h_t – уровень человеческого капитала; h_{α} – средний человеческий капитал; u_t – доля времени на производственную деятельность; G – функция эффективности человеческого капитала.

Модель П. Ромера имеет вид:

$$Y_t = H_t^{\alpha_1} \cdot L_t^{\alpha_2} \cdot K_t^{1-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{1.8}$$

$$H_t = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2)} \cdot r, \tag{1.9}$$

где δ – коэффициент продуктивности человеческого капитала; r – ставка банковского процента.

Несмотря на развитие различных методов и способов оценки НТП, единая теория количественной оценки НТП при изучении макроэкономических процессов до настоящего времени не сформирована.

1.2 Изучение и оценка человеческого капитала как индикатора социально-образовательного прогресса общества

В современной теории под человеческим капиталом понимаются запас знаний, умений и опыта человека, которые способствуют увеличению его производительной деятельности и прибыли [25, 84]. Так, полученные знания, навыки, способности, которые есть у человека могут быть приложены в течение определенного периода времени в целях производства товаров и услуг [85-87].

Концепция человеческого капитала зародилась в XVII-XIX вв. Основы будущей теории человеческого капитала были рассмотрены в трудах экономистов: В. Петти, А. Смит, Д. Рикардо, Л. Вальрас, А. Маршалл [17-20, 25, 83].

При определении человеческого капитала нужно учесть, что [90]:

1) в условиях инновационной экономики человеческий капитал является одним из основных факторов его развития;

2) для формирования и усовершенствования человеческого капитала необходимы значительные инвестиции;

3) человеческий капитал также содержит в себе накопление способностей и навыков;

4) человеческий капитал со временем изнашивается, теряет свою экономическую стоимость, амортизируется;

5) человеческий капитал связан с демографией посредством того, что его носителями являются человеческие личности;

6) доход от имеющегося человеческого капитала зависит и контролируется каждым его носителем индивидуально, независимо от источников и объемов его инвестирования.

Современная теория человеческого капитала возникла в середине XX века. Данный период характеризуется возрастающей ролью человека, степенью его образования, знаний, опыта и квалификации. Впервые термин использовал американских ученый-экономист Т. Шульц [29, 83, 88-89], а Г. Беккер обосновал продуктивность вложений в человеческий капитал [28]. Дальнейшее исследование человеческого капитала представлено в работах Дж. Минцера, Й. Бен-Порэта, В.И. Марцинкевича, С.А. Дятлова и др. ученых [84, 91-98].

В настоящее время большинство экономистов выделяет три основные составляющие в человеческий капитал: капитал образования, капитал здоровья, капитал культуры [87, 91, 94, 95].

Инвестиции в образование способствуют повышению запаса знаний человека и их качества. Капиталовложения в здравоохранение сокращают уровень заболеваемости и смертности, что в свою очередь приводит к увеличению трудоспособности человека. Инвестиции в культуру способствуют росту творческой стороны личности, формируют морально-этические принципы, тем самым снижают уровень криминализации общества [90, 99-100].

Основными инвесторами в человеческий капитал являются международные фонды и организации, федеральное и региональное правительство, отдельные фирмы, домохозяйства.

Инвестиции в человеческий капитал имеют свои отличительные черты [90, 94]. Так, следует отметить, что вложения в человеческий капитал, который подвержен физическому и моральному износу, способствуют его накоплению. Доходность накопленного человеческого капитала растет до момента времени, пока его носитель не достигнет активного трудоспособного возраста, после чего показатель идет на убыль. И чем раньше осуществляются инвестиции в человека, тем быстрее ощущаем их эффективность.

Человеческий капитал можно определять как качество жизни [101,102], как сумма вложений [75] или как объем доходов [5]. Для количественной оценки данной величины применяются различные подходы и методы: Дж. Минсер [103] рассмотрел анализ влияния образования и стажа работника на человеческий капитал, К. Б. Маллиган и Х. С. Мартин [104] предложили расчет запаса величины человеческого капитала с помощью индексов. Также значительный вклад внесли Й. Бен-Порэт [105], Хекман [25], А.С. Акопян, В.В. Бушуев и В.С. Голубев[106].

В диссертационной работе рассматривается затратный метод расчета стоимости человеческого капитала, основанный на расчете накоплений инвестиций в человека. Данный метод был впервые рассмотрен в работе Дж. Кендрика [34-35], модель расчета предложена в работах К.В. Кетовой и И.Г. Русяка [90, 107].

Развитие фактора человеческого капитала характеризуется социально-образовательным прогрессом. В основе СОП лежат новые научные знания, развитие человеческой личности, переход к более высокому уровню материального производства и благосостояния людей. В то же время следует отметить, что к учету фактора СОП при моделировании экономических процессов достаточного внимания не уделялось.

В процессе СОП происходит личностное развитие в интеллектуальной, культурной и нравственной сферах, что приводит к росту основных показателей экономической системы.

Будем полагать, что учет социально-образовательного прогресса в экономической системе аналогичен учету научно-технического прогресса, рассмотренного в п.1.1.

Результаты анализа рассматриваемых выше вопросов имеют значительное прикладное значение, позволяя рассчитать экономически выгодный объем инвестиций, способствующих повышению уровня здоровья и качества жизни населения.

1.3 Инструменты анализа экономических процессов

Экономическая система представляет собой сложную систему, состоящую из непрерывно взаимодействующих процессов. Одним из основных инструментов, позволяющих анализировать экономические процессы, являются математические методы.

Математические модели и методы впервые применил французский экономист Ф. Кенэ в работе “Экономическая таблица” (1758 год) [108]. А уже в 1838 году О. Курно активно их применял при исследовании разработанной им теории богатства [79, 99]. В дальнейшем с ускоренными темпами началось бурное применение математических моделей в экономике. Значительных достижений математического моделирования в экономике достигли Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето и др. [79, 109]. Среди российских ученых в этой области известны В.К. Дмитриев, Е.Е. Слуцкий, А.Д. Кондратьев [76]. В.В. Леонтьев разработал схему межотраслевого баланса [110]. Основой теории оптимизации в экономике послужила работа Л.В. Канторовича [111], также его работы лежат в основе методов линейного программирования, методов математического программирования. Все это послужило дальнейшему развитию и появлению оптимизационных моделей, многоуровневых систем, моделей планирования и т.д. [112-118]. На сегодняшний момент существует теория математического моделирования экономических процессов, вклад в формирование которой внесли В.М. Полтерович [119, 120], С.А. Ашманов [79], А.А. Петров, И.Г. Поспелов и А.А. Шананин [121-123], Д. Гейл [124], В.Л. Макаров [125-127], В.З. Беленький [54, 128-131], В.Д. Матвеенко [132] и др.

Одним из инструментов анализа экономических процессов во времени являются динамические модели. Они основаны на классической модели Рамсея–Касса–Купманса (РКК-модель) [133-135]. Значительный вклад в развитие модели внесли В.З. Беленький [54, 128-131] и В.Д. Матвеенко [132].

Изначально рассматривалась модель, в которой население не изменяется со временем и выпуск продукции Y растет за счет накопления капитала K инвестициями I [136]:

$$Y = F(K); \tag{1.10}$$

$$\dot{K} = I\ ; \tag{1.11}$$

тогда потребление равно

$$C = F(K) - I\ . \tag{1.12}$$

Позже уравнение (1.11) было записано в виде

$$\dot{K} = I - \eta K, \tag{1.13}$$

где η – коэффициент выбытия (амортизации) фондов.

РКК-модель содержит критерий оптимизации, являющийся интегральной полезностью потребления. Величину выпуска продукции Y можно представить с помощью производственной функции $Y = F(K, L)$, которая зависит от экономически активного населения L и объема капитала K. Предполагается, что. $Y/L = F(K/L, 1)$, тогда $Y = L \cdot f(k)$, где $k = K/L$. В неоклассической РКК-модели:

1) динамика экономически активного населения возрастает по экспоненциальному закону с темпом n: $L = L_0 e^{nt}$;
2) часть произведенной продукции $s = I/Y$ идет на инвестиции:

$$\dot{K} = \dot{k}L + nLk = sY - \eta K, \tag{1.14}$$

откуда

$$\dot{k} = sf(k) - \gamma k, \tag{1.15}$$

где $\gamma = \eta + n$.

Тогда из уравнения (1.15) объем потребления можно записать уравнением:

$$C = (1 - s)L_0 e^{nt} f(k). \tag{1.16}$$

Исходя из полученного уравнения потребления (1.16), возникает необходимость построения оптимальных траекторий [54, 79, 136-142].

Теория оптимального управления сформировалась в 50-е годы XX века [143-145] и включает в себя принцип максимума Л.С. Понтрягина [146-148] и принцип оптимальности Р. Беллмана [149].

Максимум Понтрягина используется к задачам управления, которые имеют вид [136]:

$$\begin{aligned}
&\max_{\{u(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} I(x,u,t)dt + F(x_1,t_1);\\
&\dot{x} = f(x,u,t);\\
&x(t_0) = x_0;\\
&x(t_1) = x_1;\\
&\{u(t)\} \in U
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Здесь I, F, f – заданные непрерывно дифференцируемые функции; t_0, x_0 – – фиксированные параметры; t_1 или x_1 – фиксированные параметры. Траектория управления $\{u(t)\}$ должна принадлежать фиксированному множеству управлений U, причем $u(t)$ – кусочно-непрерывная функция времени, значения которой должны принадлежать некоторому фиксированному множеству Ω.

Принцип оптимальности Беллмана содержит другой способ решения задачи. Основная идея состоит в построении оптимальных траекторий (квазимагистралей) на отрезке длины T из любой точки фазового пространства. Для этого планируется в начальный момент времени оптимальное поведение рассматриваемой системы, в каком бы начальном состоянии она ни находилась.

Уравнение Беллмана имеет вид:

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\mathbf{u}(t)} \left[I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right], \tag{1.18}$$

Данное уравнение можно решать в виде разностных схем, на ЭВМ с большим быстродействием.

2. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ДЕМОГРАФИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

2.1 Постановка задачи оптимального управления

На рисунке 2.1 представлена схема взаимодействия экономики региона с внешней экономической средой с помощью кредитов, инвестиций, налогов и т.д. [90].

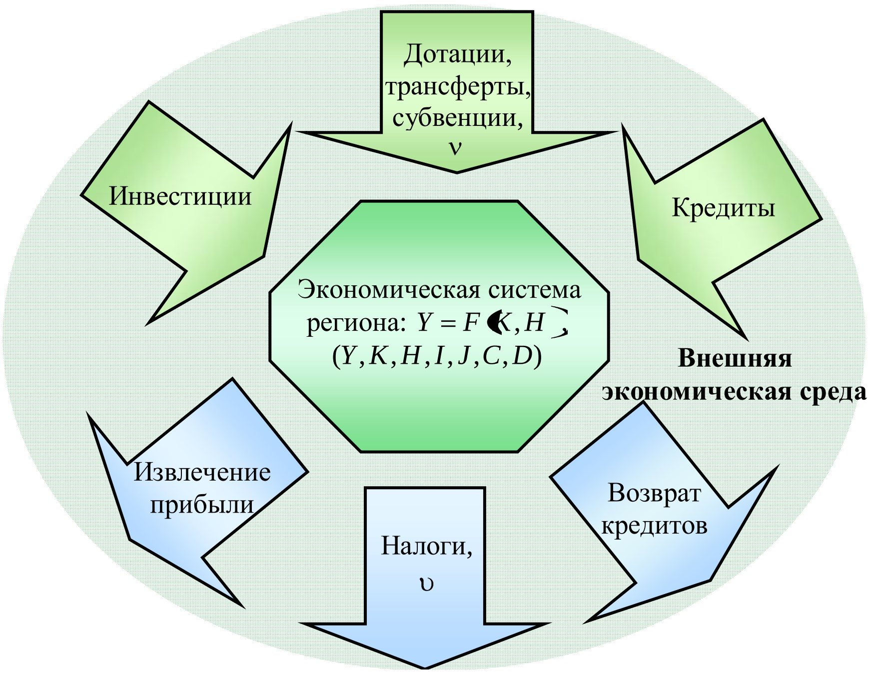


Рисунок 2.1 –Взаимодействие региональной экономической системы с внешней экономической средой

Будем полагать, что основными компонентами математической модели экономической системы региона являются: объема произведенной продукции Y, объема производственного капитала K и человеческого капитала H, объемов инвестиций в производственный капитал I и человеческий капитал J, объемов потребления C и доходы регионального бюджета D [90].

В диссертационной работе объем выпускаемой продукции (ВРП) Y представим в виде производственной функции от производственного капитала K и человеческого капитала H. Функцию примем в виде: $Y = F(K,H) = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$ (однородная функция Кобба-Дугласа первой степени).

Рассматриваются два сценария развития региональной экономической системы: инерционный путь развития и инновационный путь.

В случае инерционного пути развития предполагается, что темп НТП $\beta = \beta_1 = 0$ и темп СОП $\kappa = \kappa_1 = 0$. Инновационный сценарий предполагает, что с момента времени t_0 начинается инновационный путь развития экономической системы.

Здесь различаются два вида ОПФ: фонды инерционного сценария $K_1(t)$, формирующиеся с темпом НТП $\beta_1 = 0$, и фонды инновационного сценария $K_2(t)$, формирующиеся с темпом НТП $\beta_2 > 0$. Также различаются два вида человеческого капитала: человеческий капитал $H_1(t)$, который формируется с темпом СОП κ_1, и человеческий капитал $H_2(t)$, который формируется с темпом СОП $\kappa_2 > \kappa_1$.

Схема цикла воспроизводства экономики региона представлена на рисунке 2.2, где N_F, N_R – налоговые отчисления в федеральный и региональный бюджеты соответственно ($\rho_F = N_F/N$, $\rho_R = N_R/N$, $N = N_F + N_R$, $\rho_F + \rho_R = 1$); T_t – дотации, трансферты, субвенции; $s_0 = C/E$ – норма потребления в экономической системе; $s_{k_i} = I_i/E$ – норма инвестиций в производственный капитал i – го вида; $s_{h_i} = J_i/E$ – норма инвестиций в человеческий капитал i – го вида. Далее, в задаче оптимального управления, переменные s_{k_i}, s_{h_i} являются управляющими.

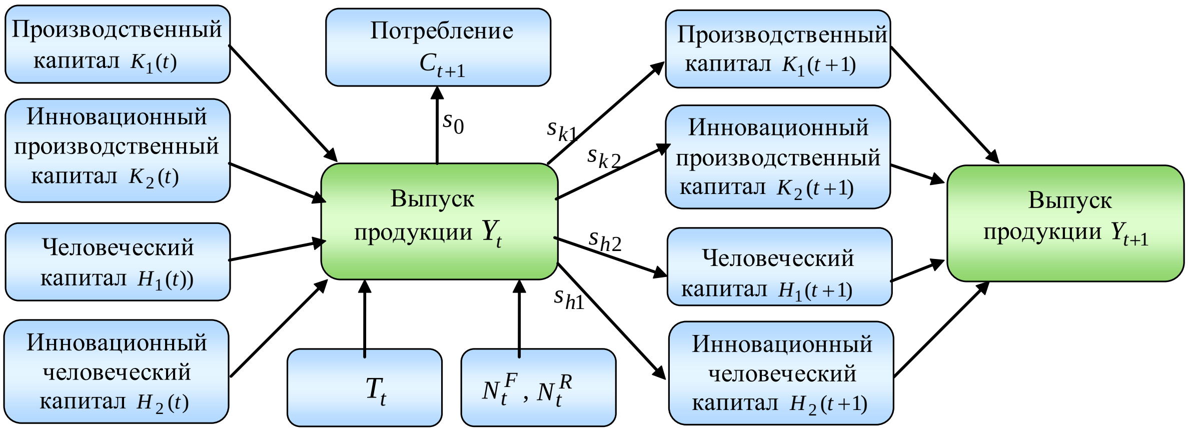


Рисунок 2.2. – Схема цикла воспроизводства региональной экономики

Рассмотрим доход регионального бюджета D. Пусть $N = N^F + N^R$, где N^F, N^R – налоги федерального и регионального бюджетов соответственно. Обозначим $\rho^F = N^F / N$, $\rho^R = N^R / N$, тогда $\rho^F + \rho^R = 1$. Объем налогов определяется через долю υ от выпуска реализованной продукции Y (рисунок 2.1): $N = \upsilon Y$. Возврат средств в виде дотаций, трансфертов, субвенций определяется как доля ν от уровня региональных налогов: $T = \nu N^R$, где $N^R = \rho^R \upsilon Y$. Тогда доход региона можно представить как: $D = N^R + T = (1+\nu)\rho^R \upsilon Y$.

Математическая модель экономической системы с учетом демографической динамики в условиях НТП и СОП имеет вид [90]:

$$E = Y + T - N_F = I_1 + I_2 + J_1 + J_2 + C, \quad \forall t \in [t_0, t_T]; \tag{2.1}$$

$$s_0 + s_{k1} + s_{k2} + s_{h1} + s_{h2} = 1, \quad s_0 = \text{const}; \tag{2.2}$$

$$Y = F(K, H) = AK^{\alpha} H^{\beta}, \ \alpha + \beta = 1; \tag{2.3}$$

$$E = \omega F(K, H), \omega = 1 + \upsilon \rho_F [(\nu \rho_R / \rho_F) - 1]; \tag{2.4}$$

$$D = (1+\nu)\rho_R \upsilon Y, \ T = \nu \rho_R \upsilon Y, \ N_F = \rho_F \upsilon Y; \tag{2.5}$$

$$C = s_0 E, \ I_i = s_{ki} E, \ J_i = s_{hi} E, \ i = 1,2; \tag{2.6}$$

$$\dot{K}_i = e^{\beta_i (t - t_0)} s_{ki} E - \eta_i K_i, \ i = 1,2; \ K = K_1 + K_2; \tag{2.7}$$

$$K_{10} = K(t_0), \ K_{20} = 0, \ K_{iT} = K_i(t_T); \tag{2.8}$$

$$\dot{H}_i = e^{\kappa_i (t-t_0)} \bar{\varepsilon} s_{hi} E - \chi_i H_i, \quad i = 1{,}2, \quad H = H_1 + H_2; \tag{2.9}$$

$$H_{i0} = H_i(t_0), \quad i = 1{,}2, \quad H_{iT} = H_i(t_T). \tag{2.10}$$

Уравнение (2.1) представляет собой основное балансовое уравнение модели региона. Уравнение (2.2) – балансовое уравнение в относительных переменных.

Уравнение (2.3) – линейно-однородная производственная функция, зависящая от производственного капитала и человеческого капитала, динамика которых описывается уравнениями (2.7) и (2.9) соответственно. Коэффициент ω в уравнении (2.4) отражает взаимодействие региона с внешней экономической средой.

Поставим задачу оптимального управления, взяв за основу математическую модель экономической системы (2.1)-(2.10). В качестве критериального функционала рассмотрим удельное дисконтированное общественное потребление в системе. Для этого примем $\lambda(t) = L(t)/P(t)$ – отношение численности экономически активного населения $L(t)$ к численности всего населения региона $P(t)$; $[t_0, t_T]$ – интервал планирования; δ – коэффициент дисконтирования. Производственная функция (2.3), с учетом свойства линейной однородности $\alpha + \beta = 1$, принимает вид: $F(K, H) = LF(K/L, H/L) = LF(k, h)$.

Тогда критериальный функционал запишется в виде:

$$Cr = \int_{t_0}^{t_T} s_0 \lambda \omega F(k, h) e^{-\delta (t-t_0)} dt \to \max_{s \in \Omega}, \tag{2.11}$$

$$\Omega = \left\{ s = (s_l) = (s_{k1}, s_{k2}, s_{h1}, s_{h2}) : s_l \in [0, 1], \sum_l s_l = 1 - s_0 \right\}, \tag{2.12}$$

где $\quad \lambda(t) = \dfrac{L(t)}{P(t)} = \left(L(t) = \int_0^{\tau_m^{м}} \varepsilon_{м}(t,\tau) \rho_{м}(t,\tau) d\tau + \int_0^{\tau_m^{ж}} \varepsilon_{ж}(t,\tau) \rho_{ж}(t,\tau) d\tau\right) \Big/ \int_0^{120} \rho(t,\tau) d\tau,$

$\rho(t,\tau)$ – плотность распределения населения возраста τ в год t, $\varepsilon_{м}(t,\tau)$ и $\varepsilon_{ж}(t,\tau)$ – доли мужчин и женщин возраста τ, участвующих в производственной деятельности в год t, $\tau_m^{м} = \tau_m^{ж} = 84$ – времена дожития δ процентов населения $(i = 1 - 5)$, $\rho_{м(ж)}(t, \tau)$ – плотность распределения мужского (женского) населения.

2.2 Алгоритм построения оптимальной траектории

Процедура построения оптимального управления включает в себя два этапа. Вначале строится квазистационарная оптимальная траектория (квазимагистраль), на которую должна выйти экономическая система. Затем строится оптимальное управление экономической системой в переходный период, которое выводит систему на квазимагистраль и далее движение осуществляется по ней. Момент достижения квазимагистрали обозначим $t^* \le t_T$.

Фазовые уравнения для производственных фондов (2.7) и для человеческого капитала (2.9) в удельном виде, когда $k = K/L$ и $h = H/L$, с использованием свойства линейной однородности производственной функции, преобразуются следующим образом:

$$\dot{k}_i = s_{ki}\omega e^{\beta_i (t-t_0)} F(k,h) - \gamma_{ki}k_i, \quad \dot{h}_i = s_{hi}\bar{\varepsilon}\omega e^{\kappa_i (t-t_0)} F(k,h) - \gamma_{hi}h_i, \qquad (2.13)$$

где $\gamma_{ki} = \eta_i + \dot{L}/L$, $\gamma_{hi} = \chi_i + \dot{L}/L$.

Расчет численности экономически активного населения $L(t)$ и общей численности населения $P(t)$ осуществляется на основе решения уравнения динамики возрастного состава, которое рассмотрено в главе 2. При этом производная $\dot{L}(t)$ расписывается с помощью центральной разности:

$$\dot{L}(t) = \frac{L(t + \Delta t) - L(t - \Delta t)}{2\Delta t}.$$

Гамильтониан задачи (2.1)-(2.12) при $\beta_1 = \kappa_1 = 0$, $\beta_2 = \beta > 0$ и $\kappa_2 = \kappa > 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} H(\psi, s, x, t) &= s_0\lambda\omega F(k,h) e^{-\delta (t-t_0)} + \\ &+ \psi_{k1}\left[s_{k1}\omega F(k,h) - \gamma_{k1}k_1\right] + \psi_{k2}\left[s_{k2}\omega e^{\beta (t-t_0)} F(k,h) - \gamma_{k2}k_2\right] + \\ &+ \psi_{h1}\left[s_{h1}\bar{\varepsilon}\omega F(k,h) - \gamma_{h1}h_1\right] + \psi_{h2}\left[s_{h2}\bar{\varepsilon}\omega e^{\kappa (t-t_0)} F(k,h) - \gamma_{h2}h_2\right], \end{aligned} \qquad (2.14)$$

где $x = (k_1, k_2, h_1, h_2)$, $\psi = (\psi_{k1}, \psi_{k2}, \psi_{h1}, \psi_{h2})$.

В соответствие с принципом максимума Понтрягина (при $q=\psi e^{\delta(t-t_0)}$), получим:

$$\begin{aligned} s^o &= \arg\max_{s\in\Omega} \mathrm{H}(q,s,x,t) = \\ &= \arg\max_{s\in\Omega}\begin{bmatrix} s_0\lambda\omega F(k,h) + q_{k1}s_{k1}\omega F(k,h) + q_{k2}s_{k2}\omega e^{\beta(t-t_0)}F(k,h) + \\ + q_{h1}s_{h1}\bar{\varepsilon}\omega F(k,h) + q_{h2}s_{h2}\bar{\varepsilon}\omega e^{\kappa(t-t_0)}F(k,h) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Таким образом, нахождение оптимального управления сводится к решению для каждого $t\in[t_0,t_T]$ задачи :

$$\begin{aligned} &\lambda s_0 + q_{k1}s_{k1} + q_{k2}e^{\beta(t-t_0)}s_{k2} + q_{h1}\bar{\varepsilon}s_{h1} + q_{h2}e^{\kappa(t-t_0)}\bar{\varepsilon}s_{h2} = \\ &= Qs \to \max_{s(t)\in\Omega} = \lambda s_0 + Q_m(1-s_0); \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$s_0 + s_{k1} + s_{k2} + s_{h1} + s_{h2} = 1. \tag{2.17}$$

Где

$$Q = (\lambda, Q_{k1}, Q_{k2}, Q_{h1}, Q_{h2}) = (\lambda, q_{k1}, q_{k2}e^{\beta(t-t_0)}, q_{h1}\bar{\varepsilon}, q_{h2}\bar{\varepsilon}e^{\kappa(t-t_0)}),$$

$$s = (s_0, s_{k1}, s_{k2}, s_{h1}, s_{h2}),\quad Q_m = \max(Q_{k1}, Q_{k2}, Q_{h1}, Q_{h2}).$$

Введем обозначения $s=(s_l)$, где $l=(l_i)=(k_1,k_2,h_1,h_2)$, и $l_m = \mathrm{Ind}\max_i Q_{l_i}$.

Тогда структуру управления можно представить в виде:

$$s = (s_{l_i}) = \begin{cases} \sum\limits_{l_i}\tilde{s}_{l_i} = 1 - s_0,\ l_i = l_m; \\ 0, \qquad\qquad l_i \ne l_m. \end{cases} \tag{2.18}$$

Система сопряженных уравнений принимает вид:

$$\dot{k}_i = s_{ki}\omega e^{\beta_i(t-t_0)}F(k,h) - \gamma_{ki}k_i,\ \ k_{i0}=k_i(t_0),\ \ k_{iT}=k_i(t_T) \Rightarrow k_i^*,\ \ i=1,2; \tag{2.19,а}$$

$$\dot{h}_i = s_{hi}\bar{\varepsilon}\omega e^{\kappa_i(t-t_0)}F(k,h) - \gamma_{hi}h_i;\ \ h_{i0}=h_i(t_0),\ \ h_{iT}=h_i(t_T) \Rightarrow h_i^*,\ \ i=1,2; \tag{2.19,б}$$

$$\dot{q}_{ki} = (\delta+\gamma_{ki})q_{ki} - [\lambda s_0 + Q_m(1-s_0)]\omega F_k'(k,h),\ \ i=1,2; \tag{2.20,а}$$

$$\dot{q}_{hi} = (\delta+\gamma_{hi})q_{hi} - [\lambda s_0 + Q_m(1-s_0)]\omega F_h'(k,h),\ \ i=1,2. \tag{2.20,б}$$

Квазистационарный участок оптимальной траектории $(k_i^*(t), h_i^*(t))$ находится исходя из условий:

$$q_{ki}e^{\beta_i(t-t_0)} = q_{hi}\bar{\varepsilon}e^{\kappa_i(t-t_0)} = \max(q_{ki}e^{\beta_i(t-t_0)}; q_{hi}\bar{\varepsilon}e^{\kappa_i(t-t_0)}) = \lambda(t),\ i=1,2, \tag{2.21}$$

откуда выражаются параметры стационарной точки.

Нестационарные уравнения (2.19) и (2.20) с начальными условиями можно решить методом "стрельбы", используя модифицированный метод Эйлера с коррекцией [150].

Суть метода «стрельбы» состоит в том, что задается начальное условие для функции $q(t): q(0) = q_0$, и вместе с начальным условием $k(0) = k_0$ решается совместная система уравнений (2.19) и (2.20). И необходимо с заданной точностью ε «попасть» в точку $k(T) = k_T$.

2.3 Алгоритм оптимального управления в переходном периоде

Оптимальное управление в переходном периоде до момента выхода на квазимагистраль рассчитывается на основе индексного метода, изложенного в работах В.З. Беленького и К.В. Кетовой [54, 90, 151].

Построив квазимагистраль, находим правое граничное условие. Далее переходим к реализации индексного метода, позволяющего оптимально распределять инвестиции в переходном периоде.

Назовем множество $J = J(t)$ *носителем управления.* Оптимальное управление в переходном периоде строится таким образом, чтобы определить порядок включения факторов в выбранный носитель. При этом необходимо учесть, что в оптимальном режиме инвестирование нацелено на выравнивание весов рассмотренных факторов производства, что приводит к постоянному расширению $J(t)$. Следует также принимать во внимание то обстоятельство, что фактор, включенный в носитель, уже никогда его не покидает.

Фактор включается в носитель по формуле:

$$J(t) = \operatorname{Arg\,min} I_{ji}(t), \quad j = h, k; \; i = 1{,}2 \; ; \quad t \in [0, T], \tag{2.22}$$

где

$$I_{hi} = (\delta + \kappa_i + \gamma_{hi}) - A\beta\omega\bar{\varepsilon}e^{\kappa_i (t-t_0)} k^{\alpha} h^{\beta-1}, \tag{2.23,a}$$

$$I_{ki} := (\delta + \beta_i + \gamma_{ki}) - A\alpha\omega e^{\beta_i (t-t_0)} k^{\alpha-1} h^{\beta}. \tag{2.23,$б$}$$

Распределение инвестиций между факторами, которые вошли в носитель осуществляется в соответствии с уравнением:

$$s_{ji} = \frac{\dot{j} + \gamma_{ji} j}{A k^{\alpha} h^{\beta}}, \quad j \in J\,,\ j = h, k;\ i = 1,2\,. \tag{2.24}$$

Эволюционные уравнения для факторов, которые не вошли в носитель, имеют вид:

$$\dot{x}_i = -\gamma_i x_i\,, \quad i \notin J\,. \tag{2.25}$$

На рисунке 2.3 представлена динамика двойственных переменных в случае реализации оптимального управления в переходном периоде для Удмуртской Республики (данные представлены в 4 главе).

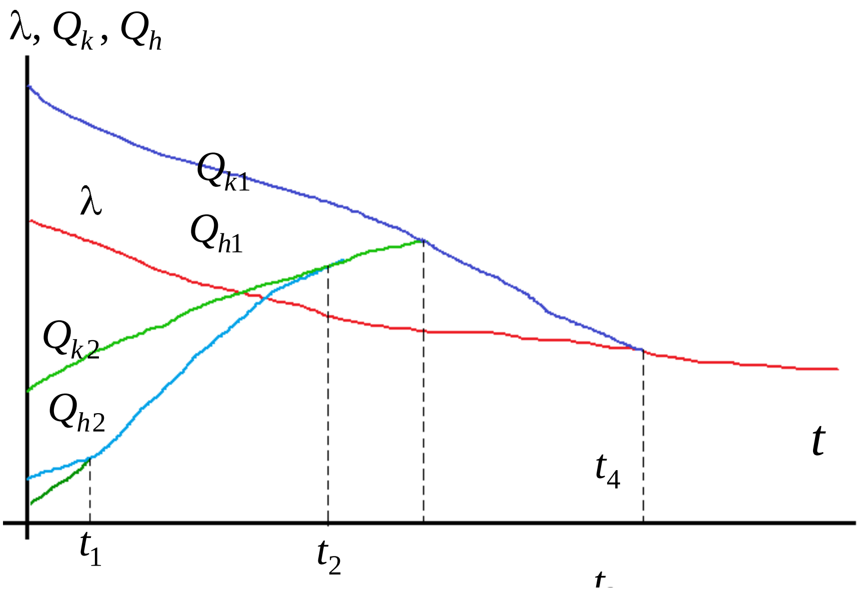


Рисунок 2.3 – Динамика двойственных переменных оптимального управления

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФАКТОРОВ РЕГИОНАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ

3.1 Математическое моделирование демографических характеристик

3.1.1. Постановка задачи

Математическое моделирование распределения демографических элементов по возрастам будем рассчитывать на основе уравнения динамики возрастного состава, рассмотренной в работах О.В. Староверова [45], К.В. Кетовой и И.Г. Русяка [90, 151-154]:

$$\frac{\partial\rho(t,\tau)}{\partial t}+\frac{\partial\rho(t,\tau)}{\partial\tau}=-\mu(t,\tau)\rho(t,\tau)+l(t,\tau)\rho(t,\tau), \tag{3.1}$$

где $\rho(t,\tau)$ – плотность распределения населения возраста τ в год t, $\mu(t,\tau)$ – функция распределения смертности, задающая долю умирающих в возрасте τ в год t, $l(t,\tau)$ – функция распределения миграционного прироста по возрастам.

При $t = t_0$

$$\rho(t_0,\tau)=\rho_0(\tau), \quad \tau>0, \tag{3.2}$$

где $\rho_0(\tau)$– плотность распределения населения в начальный момент времени t_0.

При $\tau = 0$:

$$\rho(t,0)=\int_{14}^{49}\gamma(t,\tau)\rho(t,\tau)d\tau, \; t>t_{0,}, \tag{3.3}$$

где $\gamma(t,\tau)$ – плотность распределения рождений из диапазона фертильности женщин $[14, 49]$.

Исходя из полученного решения плотности распределения населения, можно найти общую численность населения:

$$P(t)=\int_{0}^{120}\rho(t,\tau)d\tau. \tag{3.4}$$

Численность населения трудоспособного возраста:

$$L^o(t) = \int\limits_{\tau_{1L}^{м}}^{\tau_{2L}^{м}} \rho_{м}(t,\tau)d\tau + \int\limits_{\tau_{1L}^{ж}}^{\tau_{2L}^{ж}} \rho_{ж}(t,\tau)d\tau, \qquad (3.5)$$

где $\rho_{м}(t,\tau)$, $\rho_{ж}(t,\tau)$ – плотности распределения по возрастам мужчин и женщин соответственно; $\tau_{1L}^{м}$ и $\tau_{2L}^{м}$ – нижняя и верхняя граница трудоспособного возраста мужчин соответственно; $\tau_{1L}^{ж}$ и $\tau_{2L}^{ж}$ – нижняя и верхняя граница трудоспособного возраста женщин соответственно;

Также можно вычислить численность экономически активного населения:

$$L(t) = \int\limits_{0}^{\tau_{m}^{м}} \varepsilon_{м}(t,\tau)\rho_{м}(t,\tau)d\tau + \int\limits_{0}^{\tau_{m}^{ж}} \varepsilon_{ж}(t,\tau)\rho_{ж}(t,\tau)d\tau, \qquad (3.6)$$

где $\varepsilon_{м}(t,\tau)$ и $\varepsilon_{ж}(t,\tau)$ – доли мужчин и женщин возраста τ, участвующих в производственной деятельности в год t; $\tau_{m}^{м} = \tau_{m}^{м}(t)$ и $\tau_{m}^{ж} = \tau_{m}^{ж}(t)$ – времена дожития $\delta = 5$ процентов мужского и женского населения соответственно.

3.1.2. Определение функций распределения рождений, смертности и миграции по возрастам

Для решения задачи моделирования демографических характеристик (3.1)-(3.3) необходимо осуществить построение ряда входящих в модель функций:

- начального распределения численности населения по возрастам;
- функции плотности распределения рождений в диапазоне фертильности женщин;
- функции распределения смертности по возрастам;
- функции распределения миграционного прироста по возрастам.

Рассмотрим построение данных функций на примере Удмуртской Республики [155-159]. В качестве начального момента времени выберем 1990 год.

На рисунке 3.1 представлены плотности распределения населения по возрастам $\rho_0(\tau)$, построенные по статистическим данным для 1990 года и 2011 года соответственно.

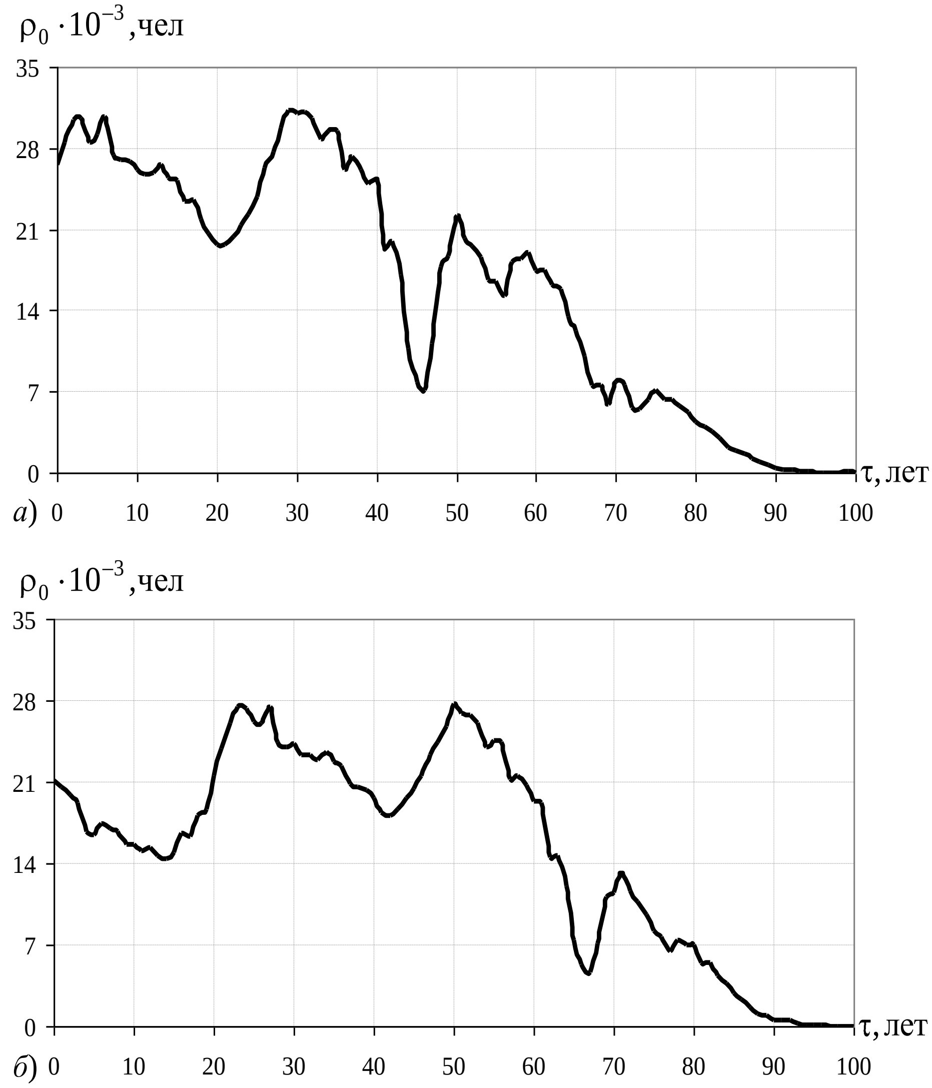


Рисунок 3.1 – Плотность распределения населения УР по возрастам:
а) для 1990 года; *б*) для 2011 года

Для определения функции плотности распределения рождений $\gamma(t,\tau)$ проанализируем статистические данные по Удмуртской Республике по количеству рождений $\Delta L_\gamma(t,\tau)$, приходящихся на возраст τ ($\tau \in [14;\ 49]$ лет) за период 1990-2011 годы (см. таблицу 3.1).

Таблица 3.1 – Статистические данные УР по количеству рождений $\Delta L_{\gamma}(\tau)$ от возраста τ за период 1990-2011 годы

Год	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$
$\tau = 14$ лет	2	2	2	3	3	2	2	3	3	1	1	2	2
$\tau = 15$ лет	27	39	40	39	34	30	21	37	36	18	15	22	33
$\tau = 16$ лет	122	129	152	136	161	150	126	112	118	109	112	105	109
$\tau = 17$ лет	382	430	448	418	447	395	354	342	343	286	293	296	257
$\tau = 18$ лет	853	901	929	914	1000	845	735	707	700	634	662	630	654
$\tau = 19$ лет	1459	1540	1404	1411	1454	1329	1162	1048	1081	958	948	972	1063
$\tau = 20$ лет	1777	1877	1840	1659	1591	1536	1395	1305	1316	1170	1251	1305	1302
$\tau = 21$ лет	1958	1862	1818	1668	1613	1526	1416	1454	1406	1366	1348	1303	1412
$\tau = 22$ лет	1935	1700	1601	1483	1437	1286	1250	1320	1382	1466	1396	1391	1444
$\tau = 23$ лет	1626	1580	1411	1216	1202	1195	1141	1144	1360	1297	1319	1382	1382
$\tau = 24$ лет	1523	1403	1283	1079	1107	976	1050	1092	1172	1186	1162	1251	1312
$\tau = 25$ лет	1580	1302	1171	957	911	860	922	964	1033	1049	1088	1133	1190
$\tau = 26$ лет	1438	1250	1049	893	781	750	769	808	885	926	995	1010	1143
$\tau = 27$ лет	1478	1085	954	785	757	621	658	745	764	868	874	888	1016
$\tau = 28$ лет	1287	1125	882	710	740	628	605	681	694	715	768	815	892
$\tau = 29$ лет	1275	1010	826	578	590	519	510	602	627	611	642	731	757
$\tau = 30$ лет	1053	932	808	551	574	511	458	552	520	516	558	594	713
$\tau = 31$ лет	1000	810	713	476	494	454	397	476	469	441	471	521	587
$\tau = 32$ лет	734	674	561	464	404	376	386	383	436	389	398	465	493
$\tau = 33$ лет	614	544	510	365	365	337	310	355	341	349	337	326	437
$\tau = 34$ лет	529	490	413	316	302	281	278	292	324	289	302	324	319
$\tau = 35$ лет	468	377	323	262	260	257	240	229	295	268	283	296	295
$\tau = 36$ лет	354	351	269	198	186	174	198	216	235	215	209	202	250
$\tau = 37$ лет	248	237	212	151	142	134	138	153	159	204	184	157	190
$\tau = 38$ лет	216	167	152	108	77	94	110	119	126	169	165	160	158

Продолжение таблицы 3.1

Год	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(,\tau)$
$\tau = 39$ лет	140	138	103	86	66	61	85	82	113	109	109	137	114
$\tau = 40$ лет	105	91	70	74	61	57	55	52	73	66	66	76	75
$\tau = 41$ лет	81	76	60	51	46	47	44	31	42	47	47	62	56
$\tau = 42$ лет	40	39	27	26	16	20	31	24	33	32	32	42	43
$\tau = 43$ лет	20	13	20	14	13	11	14	19	17	9	9	19	18
$\tau = 44$ лет	11	10	8	17	14	7	3	10	13	9	9	5	13
$\tau = 45$ лет	1	3	4	2	1	3	1	4	4	5	5	4	3
$\tau = 46$ лет	0	1	3	4	2	1	2	2	4	8	8	3	0
$\tau = 47$ лет	1	1	0	2	1	2	1	2	1	1	1	0	0
$\tau = 48$ лет	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	1
$\tau = 49$ лет	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
ВСЕГО, $\Delta L_{\beta}(\,)$	24337	22189	20067	17116	16854	15476	14868	15365	16125	15786	15786	16629	17733

Продолжение таблицы 3.1

Год	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$	$\Delta L_{\gamma}(\tau)$
$\tau = 14$ лет	3	2	2	3	3	1	3	3	4
$\tau = 15$ лет	23	24	22	25	22	21	17	15	16
$\tau = 16$ лет	125	127	104	101	106	86	73	71	64
$\tau = 17$ лет	319	325	293	296	296	281	250	200	175
$\tau = 18$ лет	602	631	596	593	541	508	516	409	358
$\tau = 19$ лет	1067	1029	899	1049	998	907	841	719	620
$\tau = 20$ лет	1380	1332	1200	1125	1290	1161	1073	998	847
$\tau = 21$ лет	1436	1419	1403	1268	1310	1385	1337	1143	1142
$\tau = 22$ лет	1406	1358	1313	1392	1370	1439	1406	1343	1229
$\tau = 23$ лет	1387	1454	1317	1401	1491	1358	1436	1511	1536
$\tau = 24$ лет	1351	1303	1244	1268	1472	1433	1499	1476	1610
$\tau = 25$ лет	1213	1183	1170	1181	1274	1419	1493	1533	1504
$\tau = 26$ лет	1200	1120	1107	1081	1231	1258	1428	1501	1517
$\tau = 27$ лет	988	1088	931	1028	1113	1193	1289	1494	1453
$\tau = 28$ лет	884	956	892	881	1073	1137	1149	1269	1422
$\tau = 29$ лет	795	864	813	806	1040	1052	1110	1258	1210
$\tau = 30$ лет	737	725	736	795	942	970	1062	1095	1196
$\tau = 31$ лет	652	645	617	598	833	899	887	993	1085
$\tau = 32$ лет	474	559	536	555	672	760	868	910	915
$\tau = 33$ лет	399	448	439	444	581	716	794	801	828
$\tau = 34$ лет	355	397	354	384	483	588	624	716	681
$\tau = 35$ лет	298	317	319	320	416	456	535	600	668
$\tau = 36$ лет	239	242	225	258	334	396	397	471	492
$\tau = 37$ лет	177	197	179	191	224	308	325	368	434
$\tau = 38$ лет	149	152	148	133	168	242	236	249	309

Продолжение таблицы 3.1

Год	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
	$\Delta L_\gamma(t,\tau)$	$\Delta L_\gamma(t,\tau)$	$\Delta L_\gamma(t,\tau)$	$\Delta L_\gamma(t,\tau)$	$\Delta L_\gamma(t,\tau)$	$\Delta L_\gamma(t,\tau)$	$\Delta L_\gamma(t,\tau)$	$\Delta L_\gamma(t,\tau)$	$\Delta L_\gamma(t,\tau)$
$\tau = 39$ лет	107	118	96	102	132	161	178	189	214
$\tau = 40$ лет	83	80	67	81	74	105	103	147	144
$\tau = 41$ лет	61	55	45	40	69	77	79	84	101
$\tau = 42$ лет	44	38	45	32	43	40	35	40	62
$\tau = 43$ лет	11	22	20	16	29	25	22	38	24
$\tau = 44$ лет	4	10	18	9	15	15	17	16	18
$\tau = 45$ лет	5	7	4	6	4	5	8	4	10
$\tau = 46$ лет	0	4	3	1	2	4	5	4	7
$\tau = 47$ лет	1	1	2	0	1	3	2	0	2
$\tau = 48$ лет	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$\tau = 49$ лет	0	0	0	0	0	0	1	0	0
ВСЕГО, $\Delta L_\beta(t)$	17975	18232	17159	17463	19652	20409	21099	21668	21897

Функция плотности распределения рождений для каждого момента времени t определяется по формуле:

$$\gamma(t,\tau)=\frac{\Delta L_{\gamma}(t,\tau)}{\int_{14}^{49}\rho(t,\tau)d\tau}. \tag{3.7}$$

Полученные результаты $\gamma(t,\tau)$, полученные на основе статистических данных таблицы 3.1 и формулы (3.7), представлены на рисунке 3.2. Анализ статистических данных показал, что за период с 1990 года по 1997 год значение функции $\gamma(t,\tau)$ ежегодно уменьшается (рисунок 3.2*а*)). С 1998 года до 2005 года возраст матерей максимального числа рождений увеличивается с 21 года до 23 лет, и функция $\gamma(t,\tau)$ смещается вправо по оси τ (см. рисунок 3.2*б*)). Далее, с 2006 года по настоящее время происходит увеличение функция $\gamma(t,\tau)$, при этом наибольшие рождения приходятся на 23-24- летних матерей (см. рисунок 3.2*в*)).

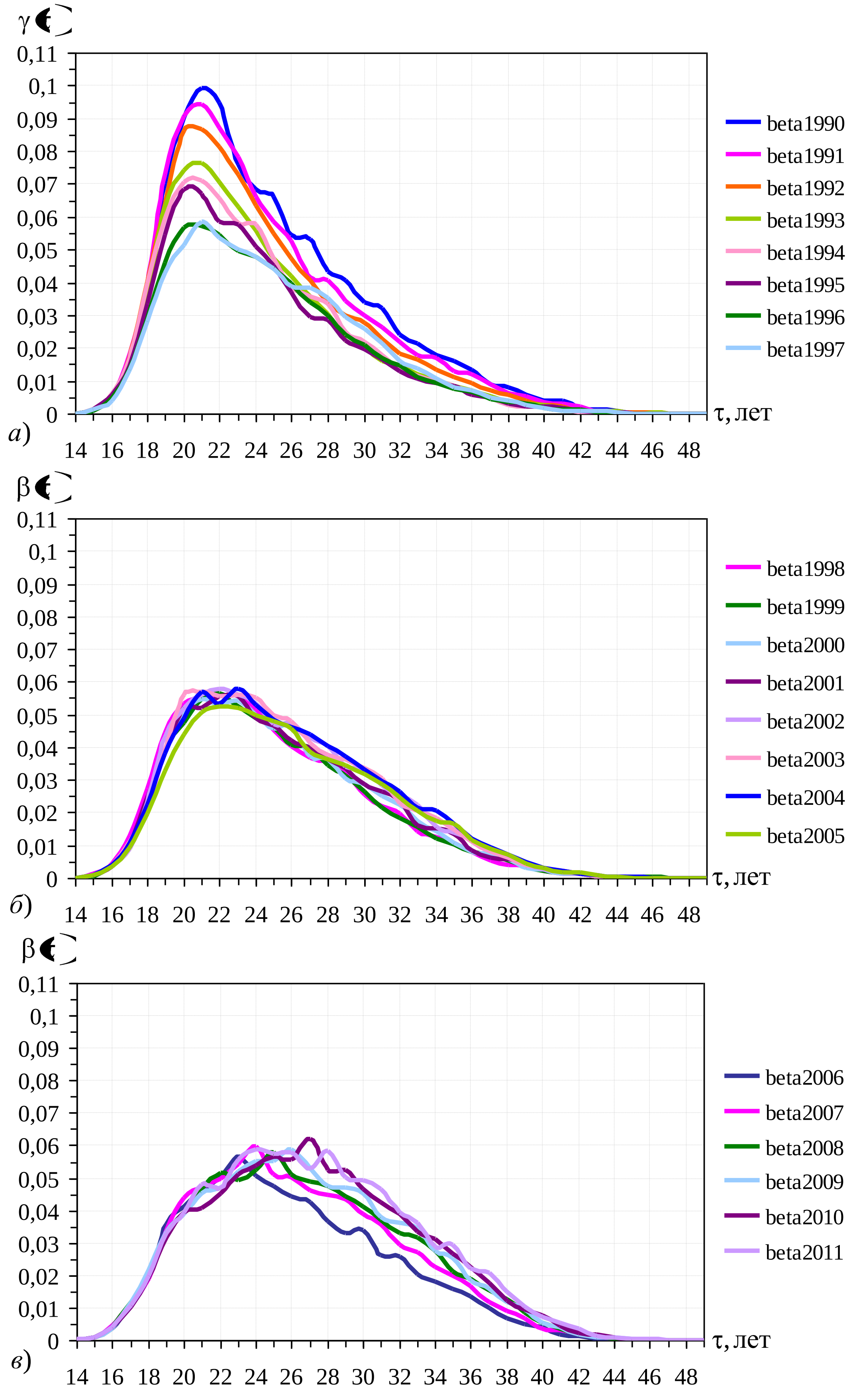


Рисунок 3.2 – Функция плотности распределения рождений Удмуртской Республики: *а*) период 1990-1997гг., *б*) период 1998-2005гг., *в*) 2006-2011гг.

Моделирование зависимости функции от времени и возраста рассматривается функцией вида:

$$\gamma(t,\tau) = a_6(t)\tau^6 + a_5(t)\tau^5 + a_4(t)\tau^4 + a_3(t)\tau^3 + a_2(t)\tau^2 + a_1(t)\tau + a_0(t)\,. \qquad (3.8)$$

В качестве обучающей выборки использовались данные с 1990 по 2004 годы, в качестве тестовой – период с 2005 по 2011 годы. Были исследованы различные полиномиальные модели для аппроксимации функций $a_6(t), a_5(t),...,a_0(t)$. В качестве критерия выбора вида модели рассматривались погрешности на конце участка ретропрогноза ($\varepsilon = |\,\Delta L_\gamma^{мод}(t) - \Delta L_\gamma^{стат}(t)|\big/\Delta L_\gamma^{стат}(t)$). Результаты моделирования представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Влияние порядка полинома на погрешность прогнозирования

Порядок полинома	1	2	3	4	5	6
Погрешность, %	14,1	28,3	15,6	33,2	22,6	35,3

Таким образом, анализ данных, представленный в таблице 3.2, показывает, что наиболее точным является полином 1 порядка, т.е. линейная модель. Кроме того, необходимо учесть, что прогнозирование полиномами высоких порядков является неустойчивым [160]. В дальнейшем линейная модель была принята за основную. За период 1990-2011 годы коэффициенты уравнения (3.8) имеют вид:

$$\begin{aligned}
a_6(t) &= -2{,}84900\cdot 10^{-10}(t-1990) + 8{,}07921\cdot 10^{-9},\\
a_5(t) &= 5{,}13902\cdot 10^{-8}(t-1990) - 1{,}52545\cdot 10^{-6},\\
a_4(t) &= -3{,}66489\cdot 10^{-6}(t-1990) + 1{,}15285\cdot 10^{-4},\\
a_3(t) &= 1{,}30473\cdot 10^{-4}(t-1990) - 4{,}42274\cdot 10^{-3},\\
a_2(t) &= -2{,}39877\cdot 10^{-3}(t-1990) + 8{,}97118\cdot 10^{-2},\\
a_1(t) &= 2{,}10150\cdot 10^{-2}(t-1990) - 8{,}98691\cdot 10^{-1},\\
a_0(t) &= -6{,}62462\cdot 10^{-10}(t-1990) + 3{,}45483.
\end{aligned} \qquad (3.9)$$

На рисунке 3.3 представлены значения числа родившихся за год на основе статистических данных по УР $\Delta L_\gamma^{стат}(t)$, представленных в таблице 3.1, и значения $\Delta L_{\gamma}^{мод}(t)$, полученные на основе модели (3.8)-(3.9).

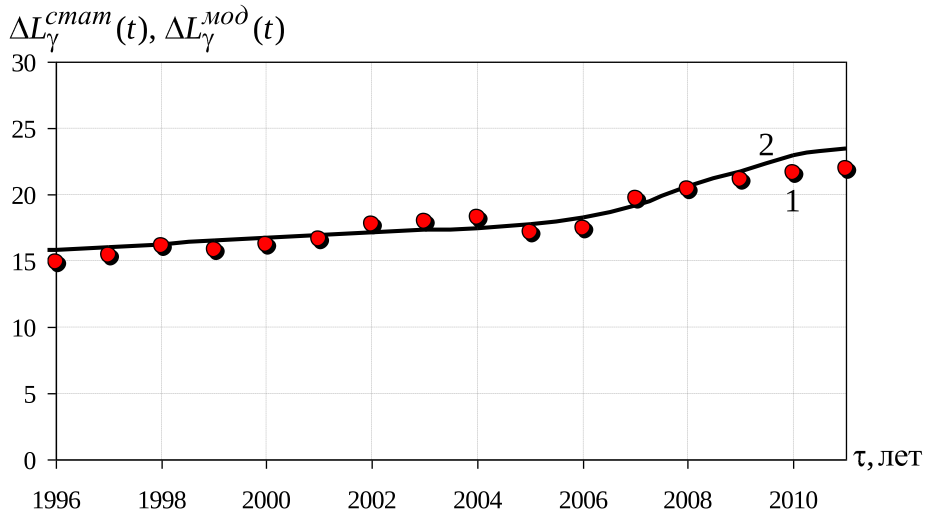


Рисунок 3.3 – Сравнение статистических (1) и модельных (2) значений числа родившихся за год за период ретропрогноза 1990-2011 годы

Средняя погрешность идентификации составила

$$\zeta_{\beta} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{\left|\Delta L_{\gamma}^{мод}(t) - \Delta L_{\gamma}^{стат}(t)\right|}{\Delta L_{\gamma}^{стат}(t)}100 = 7{,}9\ \%.$$

Здесь $N = 22$ – количество статистических значений функции $\Delta L_{\gamma}^{стат}(t)$ за период с 1990 года по 2011 год.

Для определения функции распределения смертности по возрастам $\mu(t,\tau)$ проанализируем статистические данные по Удмуртской Республике по количеству умерших $\Delta L_{\mu}(t,\tau)$ в возрасте τ за период 1990-2011 годы (см. таблицу 3.3).

Таблица 3.3 – Изменение возрастной структуры количества умерших $\Delta L_{\mu}(t,\tau)$ и распределения населения $\rho(t,\tau)$ УР за период 1990-2011 годы

Год	1990		1991		1992		1993		1994		1995		1996	
	$\Delta L_{\mu}(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_{\mu}(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_{\mu}(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_{\mu}(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_{\mu}(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_{\mu}(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_{\mu}(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$
0–4 лет	478	144685	488	139362	516	130749	433	120715	412	108990	367	99590	269	90665
5–9 лет	79	141302	87	141884	91	144553	89	147315	88	145390	90	143270	73	139899
10–14 лет	60	129902	52	131212	76	131603	76	133058	64	137464	66	140078	56	140885
15–19 лет	126	114907	133	118794	155	123405	185	125680	198	127474	221	128379	178	128963
20–24 лет	203	103551	203	101377	245	101479	333	103606	297	106956	359	113059	343	116985
25–29 лет	321	138964	281	129038	378	120348	447	112928	383	105815	412	101718	349	100970
30–34 лет	436	151091	451	152147	592	152425	766	149305	738	143959	649	136895	538	128084
35–39 лет	463	133897	515	138030	634	140258	955	143283	1108	147492	1013	148513	823	149879
40–44 лет	460	92499	536	106227	771	114853	1176	121383	1295	127233	1170	130559	1053	134318
45–49 лет	415	62816	369	54508	546	53466	804	61836	1100	73168	1167	89315	1116	102185
50–54 лет	958	97223	997	98420	1174	96946	1440	87642	1298	73890	1025	59353	791	51055
55–59 лет	1228	87564	1241	84194	1468	83256	1878	83461	2248	86688	2005	90412	1760	91107
60–64 лет	1791	80667	1835	84468	2091	85399	2446	85528	2785	81464	2405	78441	2090	74917
65–69 лет	1393	43491	1508	49588	1803	56188	2536	62605	2926	67333	2844	69535	2768	72010
70–74 лет	1412	33002	1355	31216	1491	31954	1774	32455	1956	33404	2028	35779	2197	40297
75–79 лет	2228	30810	2061	29954	1942	27899	1991	25709	2150	25033	1898	24048	1727	22577
80–84 лет	2102	17268	2125	18047	2138	18563	2414	19007	2655	18793	2424	18707	2182	17864
85 лет и старше	1651	7822	1745	8218	1860	8805	2154	9325	2383	9588	2278	9735	2322	9958
Всего	15804	1611461	15982	1616684	17971	1622149	21897	1624841	24084	1620134	22421	1617386	20635	1612618

Продолжение таблицы 3.3

Год	1998		1999		2000		2001		2002		2003		2004	
	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$
0–4 лет	314	78215	301	77098	276	75924	279	76503	290	77778	278	79498	263	81616
5–9 лет	53	121676	44	109674	33	99421	46	90263	23	82598	21	77348	30	76098
10–14 лет	67	147577	77	146887	52	145117	63	140985	46	132515	42	121698	37	109252
15–19 лет	211	129748	201	133180	207	135045	203	136349	177	139836	191	144448	206	145222
20–24 лет	281	122299	348	124359	324	124802	341	125288	331	124523	315	124423	351	127361
25–29 лет	282	104267	316	107383	366	111606	413	114545	412	117288	420	118575	481	120502
30–34 лет	380	113136	401	106657	416	102421	413	101236	526	101393	470	103074	527	104880
35–39 лет	660	147547	644	142776	706	135731	726	126385	770	118343	773	110899	740	104234
40–44 лет	839	139143	974	143729	1059	144867	1225	146495	1349	146523	1409	142908	1349	137622
45–49 лет	956	116224	1139	122145	1294	125486	1492	128925	1647	130453	1771	132636	1750	136386
50–54 лет	717	58154	980	69092	1341	84660	1691	96850	1846	103821	2095	109001	2049	113536
55–59 лет	1315	80732	1180	68235	1081	54838	1009	47137	1187	46101	1332	53265	1662	62885
60–64 лет	1879	74145	2057	77735	2305	81760	2453	82229	2533	80136	2219	71687	1709	59762
65–69 лет	2530	72393	2672	68888	2580	67015	2645	64014	2755	62901	2662	62909	2706	65474
70–74 лет	2668	49766	3021	53750	3267	55277	3301	57342	3444	57518	3256	57215	3104	53767
75–79 лет	1766	23310	1870	23977	2237	26236	2489	29337	2857	32518	3166	35297	3045	37920
80–84 лет	1779	15071	1946	15161	1801	14599	1651	13687	1936	13977	1799	14035	1770	14273
85 лет и старше	2360	10557	2563	10683	2477	10766	2348	10484	2347	9965	2274	9260	2152	9470
Всего	19057	1603960	20734	1601409	21822	1595571	22788	1588054	24476	1578187	24493	1568176	23931	1560260

Продолжение таблицы 3.3

Год	2005		2006		2007		2008		2009		2010		2011	
	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$	$\Delta L_\mu(t,\tau)$	$\rho(t,\tau)$
0–4 лет	255	84131	220	85269	188	86715	222	89050	189	91506	178	94474	162	97531
5–9 лет	28	74978	32	75482	36	76715	22	78674	18	80721	25	83175	8	83305
10–14 лет	38	98720	31	89590	28	82044	24	76853	20	75489	29	74328	22	75191
15–19 лет	168	143632	169	139146	141	130335	123	119321	119	106651	82	96032	79	84771
20–24 лет	374	130028	329	132505	338	136872	287	141554	257	141899	228	139966	217	126288
25–29 лет	489	121001	438	121537	444	121241	382	121033	385	123653	383	126224	329	128232
30–34 лет	573	108066	552	110471	579	113258	496	114732	482	116442	510	116788	490	117541
35–39 лет	712	99939	609	98371	538	98160	560	99589	513	101276	532	104424	581	106874
40–44 лет	1226	130189	975	120838	904	113134	750	105949	666	99821	702	96006	631	94588
45–49 лет	1746	136910	1480	138298	1453	138504	1400	135235	1097	130491	1161	123860	991	115494
50–54 лет	2040	116201	1728	119258	1657	120901	1692	123462	1617	127382	1651	128371	1550	131466
55–59 лет	1927	76580	1923	87290	1824	93881	1969	99077	1918	103648	1897	106766	1913	112610
60–64 лет	1371	47597	1166	40791	1200	40186	1309	46716	1553	55441	1885	67855	2030	79989
65–69 лет	2766	68534	2449	68741	2271	67156	2020	60326	1539	50482	1369	40437	1128	35571
70–74 лет	2995	52190	2564	49740	2608	49472	2483	49944	2533	52412	2712	55361	2528	56600
75–79 лет	3248	38905	3197	40392	3218	40549	3013	40567	2712	38389	2780	37870	2593	36901
80–84 лет	1949	15827	2219	17868	2311	19816	2710	21695	2609	23362	2743	24006	2763	25988
85 лет и старше	2074	9331	1902	8839	1966	8919	1963	8959	1989	9423	2206	10361	2296	11450
Всего	23979	1552759	21983	1544426	21704	1537858	21425	1532736	20216	1528488	21073	1526304	20311	1520390

Для функции распределения смертности $\mu(t,\tau)$ были рассмотрены эмпирические зависимости этой функции от возраста τ для периода с 1990 по 2011 годы (таблица 3.3) по формуле:

$$\mu(t,\tau)=\frac{\Delta L_{\mu}(t,\tau)}{\int\limits_0^{\infty}\rho(t,\tau)d\tau}. \qquad (3.10)$$

На рисунке 3.4 представлены значения функций $\mu(t,\tau)$, полученные на основе статистических данных таблицы 3.3 и формулы (3.10).

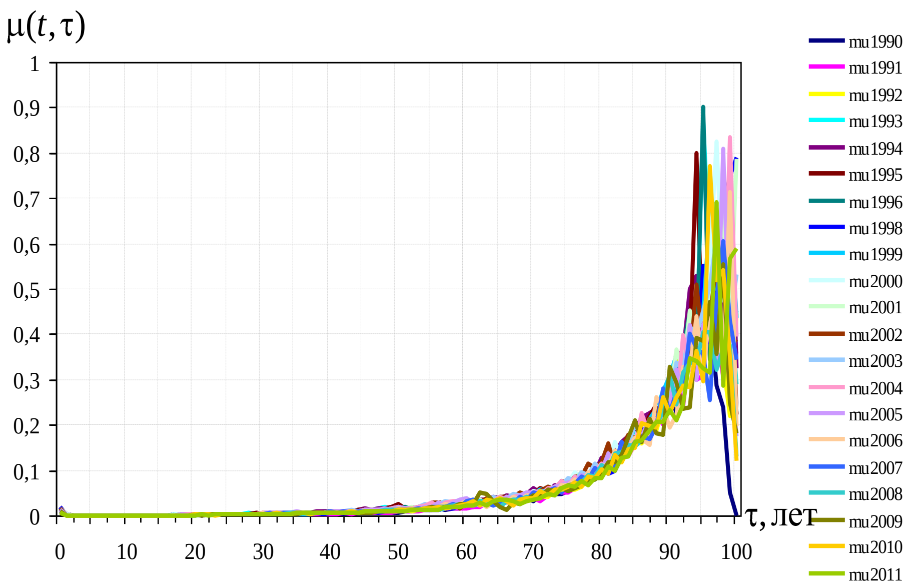


Рисунок 3.4 – Значения функции распределения смертности $\mu(t,\tau)$ за период 1990-2011 годы

Расчеты показали, что зависимость функции распределения смертности $\mu(t,\tau)$ от времени t незначительна, тогда можем записать $\mu(t,\tau)=\tilde{\mu}(\tau)$, где:

$$\tilde{\mu}(\tau)=9{,}1581\cdot10^{-3}-2{,}4556\cdot10^{-3}\tau+1{,}7217\cdot10^{-4}\tau^2-3{,}9857\cdot10^{-6}\tau^3+3{,}0526\cdot10^{-8}\tau^4. \qquad (3.11)$$

Сравнение теоретической и эмпирической кривых приведено на рисунке 3.5. Коэффициент детерминации уравнения (3.11) равен R^2=0,97.

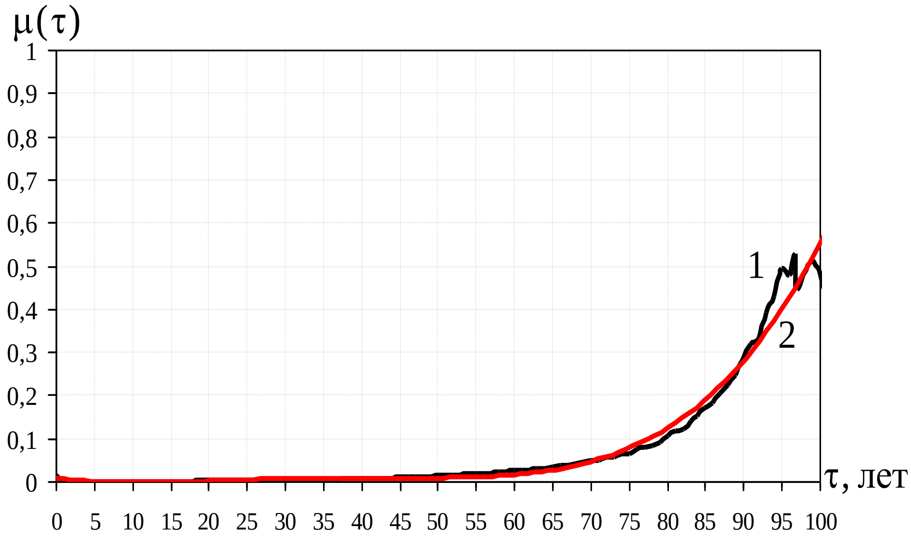


Рисунок 3.5 – Сравнение эмпирической (1) и теоретической (2) функций распределения смертности по возрастам

Математическая модель (3.1)-(3.3) также содержит функцию миграционных процессов $l(t,\tau)$. На рисунке 3.6 представлена динамика коэффициента миграционного прироста населения УР за период 1990-2011 годы.

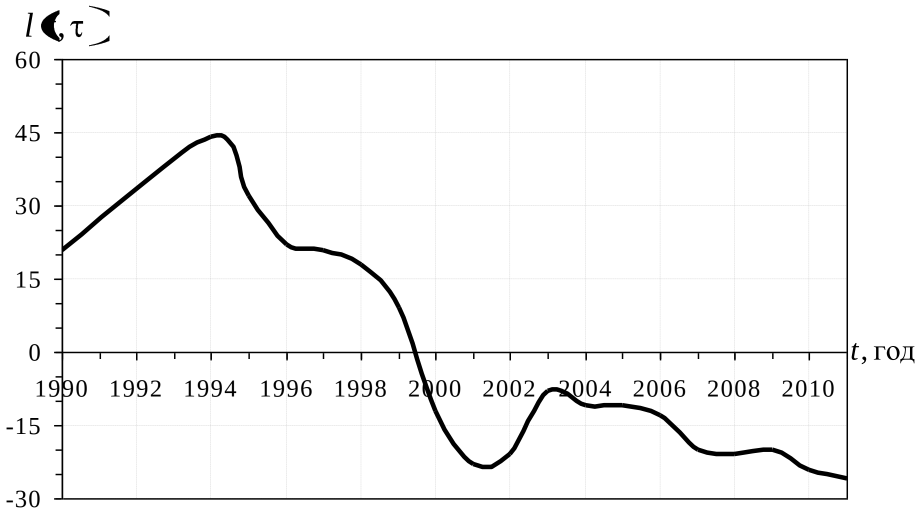


Рисунок 3.6 – Динамика коэффициента миграционного прироста (на 10 000 человек населения УР) за период с 1990-2011 годы

Возрастная структура $\Delta L_l(t,\tau)$ – количества мигрантов в год t в возрасте τ, за период с 2006 года по 2011 год представлена в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Изменение возрастной структуры миграционного прироста населения УР в зависимости от времени

Год	2006		2007		2008		2009		2010		2011	
	$\Delta L_l(t,\tau)$, чел.	$\rho(t,\tau)$, тыс.чел	$\Delta L_l(t,\tau)$, чел.	$\rho(t,\tau)$, тыс.чел	$\Delta L_l(t,\tau)$, чел.	$\rho(t,\tau)$, тыс.чел	$\Delta L_l(t,\tau)$, чел.	$\rho(t,\tau)$, тыс.чел	$\Delta L_l(t,\tau)$, чел.	$\rho(t,\tau)$, тыс.чел	$\Delta L_l(t,\tau)$, чел.	$\rho(t,\tau)$, тыс.чел
0 – 5 лет	-118	100,9	-266	102,4	-187	105,9	-222	109,1	-232	112,2	-176	114,0
6 – 13 лет	-130	127,6	-232	123,3	-176	122,0	-180	122,4	-210	124,8	-208	127,6
14 – 17 лет	-117	101,6	-211	92,3	-271	82,1	-274	74,1	-341	67,3	-229	62,4
18 – 19 лет	-174	59,4	-209	57,8	-296	53,9	-246	48,7	-278	43,7	-311	36,8
20 – 24 лет	-528	132,5	-707	136,9	-792	141,6	-758	141,9	-762	140,0	-985	126,3
25 – 29 лет	-355	121,6	-610	121,2	-558	121,0	-545	123,7	-696	126,2	-803	128,2
30 – 39 лет	-282	208,8	-414	211,4	-520	214,3	-473	217,7	-561	221,2	-671	224,4
40 – 49 лет	-185	259,1	-206	251,6	-187	241,2	-162	230,3	-269	219,9	-257	210,1
50 – 54 лет	-44	119,3	-69	120,9	-40	123,5	-76	127,4	-110	128,4	-75	131,5
55 – 59 лет	-32	87,3	-50	93,9	-58	99,1	-28	103,6	-54	106,8	-34	112,6
60 – 64 лет	-12	40,8	-36	40,2	-17	46,7	-44	55,4	-17	67,9	-27	80,0
Старше 65 лет	-60	185,6	-52	185,9	-131	181,5	-58	174,1	-81	168,0	-70	166,5
ВСЕГО	-2037	1544,5	-3062	1537,9	-3233	1532,7	-3066	1528,5	-3611	1526,3	-3846	1520,4

Эмпирические зависимости для миграционного прироста $l(t,\tau)$ от возраста τ для периода с 1990 по 2011 годы (таблица 3.4) рассчитываются по формуле:

$$l(t,\tau) = \frac{\Delta L_l(t,\tau)}{\int\limits_0^\infty \rho(t,\tau)d\tau}. \tag{3.12}$$

Приняв допущение о равномерном распределении для миграционного прироста $l(t,\tau)$, получаем соответствующие значения в середине замкнутых интервалов, представленных в таблице 3.5 и на рисунке 3.7.

Таблица 3.5 – Значения функции распределения миграционного прироста $l(\tau)$ населения УР за период 2006-2011 годы

Год	2006	2007	2008	2009	2010	2011
$l(\tau), \tau = 2{,}5$ года	-0,0012	-0,0026	-0,0018	-0,0020	-0,0021	-0,0015
$l(\tau), \tau = 9{,}5$ лет	-0,0010	-0,0019	-0,0014	-0,0015	-0,0017	-0,0016
$l(\tau), \tau = 15{,}5$ лет	-0,0012	-0,0023	-0,0033	-0,0037	-0,0051	-0,0037
$l(\tau), \tau = 18{,}5$ лет	-0,0029	-0,0036	-0,0055	-0,0050	-0,0064	-0,0085
$l(\tau), \tau = 22{,}0$ лет	-0,0040	-0,0052	-0,0056	-0,0053	-0,0054	-0,0078
$l(\tau), \tau = 27{,}0$ лет	-0,0029	-0,0050	-0,0046	-0,0044	-0,0055	-0,0063
$l(\tau), \tau = 34{,}5$ лет	-0,0014	-0,0020	-0,0024	-0,0022	-0,0025	-0,0030
$l(\tau), \tau = 44{,}5$ лет	-0,0007	-0,0008	-0,0008	-0,0007	-0,0012	-0,0012
$l(\tau), \tau = 52{,}0$ лет	-0,0004	-0,0006	-0,0003	-0,0006	-0,0009	-0,0006
$l(\tau), \tau = 57{,}0$ лет	-0,0004	-0,0005	-0,0006	-0,0003	-0,0005	-0,0003
$l(\tau), \tau = 62{,}0$ лет	-0,0003	-0,0009	-0,0004	-0,0008	-0,0003	-0,0003
$l(\tau), \tau = 67{,}0$ лет	-0,0003	-0,0003	-0,0007	-0,0003	-0,0005	-0,0004

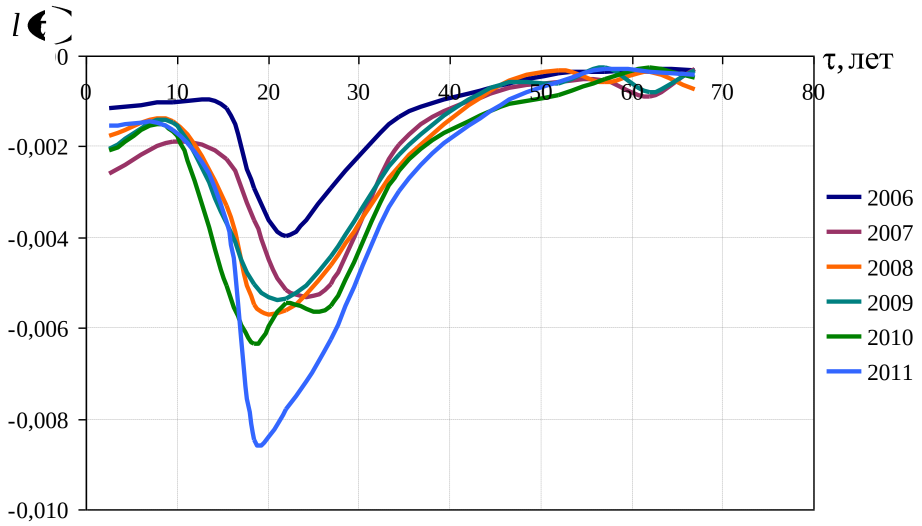


Рисунок 3.7 – Значения функции миграционного прироста населения УР за период 2006-2011 годы

Анализ статистических данных, представленных на рисунках 3.6 и 3.7, показал, что с 2000 года миграционный прирост имеет отрицательное значение – число выбывших превышает число прибывших. Статистические данные показали, что наибольшая часть населения региона мигрирует в возрасте от 17 до 24 лет. Таким образом, в основном уезжает молодежь для обучения и трудоустройства в другие регионы. Следует отметить, что ежегодно их численность растет, что отрицательно сказывается на численности экономически активного населения региона.

Моделирование зависимости функции от времени и возраста рассматривается функцией вида:

$$l(t,\tau) = b_6(t)\tau^6 + b_5(t)\tau^5 + b_4(t)\tau^4 + b_3(t)\tau^3 + b_2(t)\tau^2 + b_1(t)\tau + b_0(t). \qquad (3.13)$$

В качестве обучающей выборки использовались данные с 2006 по 2009 годы, в качестве тестовой – период с 2010 по 2011 годы. Как и в случае с уравнением рождаемости, были исследованы различные полиномиальные модели. Анализ данных показал, что наименьшее отклонение на конце участка ретропрогноза также получается при моделировании $b_6(t), b_5(t), ..., b_0(t)$ линейными функциями.

За период 2006-2011 годы коэффициенты уравнения (3.13) имеют вид:

$$\begin{aligned}
b_6(t) &= -2{,}91091 \cdot 10^{-12}(t-2006) - 7{,}25145 \cdot 10^{-12},\\
b_5(t) &= 6{,}49386 \cdot 10^{-10}(t-2006) + 1{,}84775 \cdot 10^{-9},\\
b_4(t) &= -5{,}51621 \cdot 10^{-8}(t-2006) - 1{,}80605 \cdot 10^{-7},\\
b_3(t) &= 2{,}18905 \cdot 10^{-6}(t-2006) + 8{,}35770 \cdot 10^{-6},\\
b_2(t) &= -3{,}93230 \cdot 10^{-5}(t-2006) - 1{,}80099 \cdot 10^{-4},\\
b_1(t) &= 2{,}50218 \cdot 10^{-4}(t-2006) + 1{,}48573 \cdot 10^{-3},\\
b_0(t) &= -5{,}60312 \cdot 10^{-4}(t-2006) - 4{,}43025 \cdot 10^{-3}
\end{aligned} \qquad (3.14)$$

3.1.3. Численное решение задачи

Для численного решение дифференциального уравнения (3.1) будем использовать явно-неявную схему с односторонними разностями [90,150,161]. Шаблон данной схемы представлен на рисунке 3.8. Для этого примем шаги по времени $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ и по возрасту $\Delta\tau = \tau_{j+1} - \tau_j$ одинаковыми. Положим $\Delta t = \Delta\tau = 1/n$, где $n = 1, 2, \ldots$ – число разбиений года.

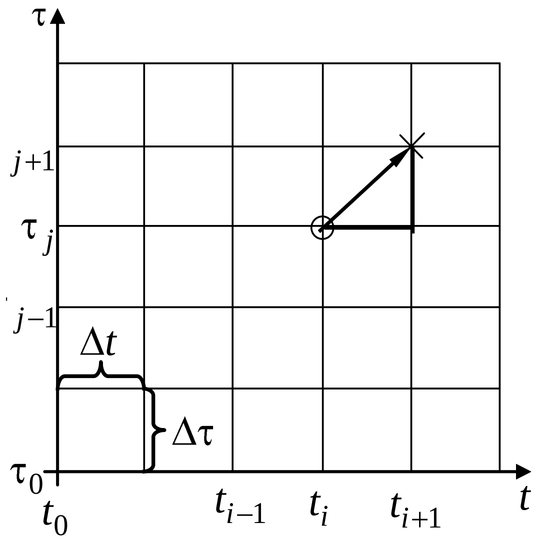


Рисунок 3.8 – Шаблоны разностных явно-неявных схем с односторонними разностями

Конечно-разностная аппроксимация дифференциального уравнения (3.1) имеет вид

$$\frac{\rho(t_{i+1},\tau_j) - \rho(t_i,\tau_j)}{t_{i+1} - t_i} + \frac{\rho(t_{i+1},\tau_{j+1}) - \rho(t_{i+1},\tau_j)}{\tau_{j+1} - \tau_j} = -\mu(t_i,\tau_j)\rho(t_i,\tau_j), \qquad (3.15)$$

$$t \ge t_0, \quad \tau > 0.$$

Примем, что $\Delta t = \Delta\tau = 1/n$ и $f_{i,j} = f(t_i,\tau_j)$, тогда

$$(\rho_{i+1,j} - \rho_{i,j})n + (\rho_{i+1,j+1} - \rho_{i+1,j})n = -\mu_{i,j}\rho_{i,j}. \qquad (3.16)$$

Следовательно,

$$\rho_{i+1,j+1} = \left(1 - (1/n)\mu_{i,j}\right)\rho_{i,j}. \qquad (3.17)$$

Расчет в точке $(t_{j+1}, 0)$, т.е. численность новорожденных, осуществляется уравнением [45]:

$$\rho_{i+1,0} = \left(/n \right) \sum_{j=\tau_{1\phi}}^{\tau_{2\phi}} \beta_{i+1,j}\rho_{i+1,j} \, . \qquad (3.18)$$

Таким образом, решение уравнения динамики возрастного состава для любого $\left(,\tau \right)$ осуществляется явно-неявная схема с односторонними разностями, путем повторения цикла формул (3.17), (3.18).

3.1.4. Анализ и прогноз демографических показателей

Построив функции плотности распределения рождений в диапазоне фертильности женщин, распределения смертности по возрастам и миграционного взаимодействия, рассмотрим решение задачи демографической динамики (3.1)-(3.3). Численное решение дифференциального уравнения (3.1) с граничными условиями (3.2)-(3.3) будем проводить с использованием метода явно-неявной схемы с односторонними разностями, изложенного выше. Базисным годом является 2011 год (см. рисунок 3.2,*б*).

Рассмотрим прогнозирование общей численности населения на 10-летний период до 2021 года. На рисунке 3.9 представлено прогнозное значение плотности распределения населения по возрастам, являющееся результатом численного решения задачи моделирования количественной составляющей человеческого капитала (3.1)-(3.3). Базисным годом является 2011 год.

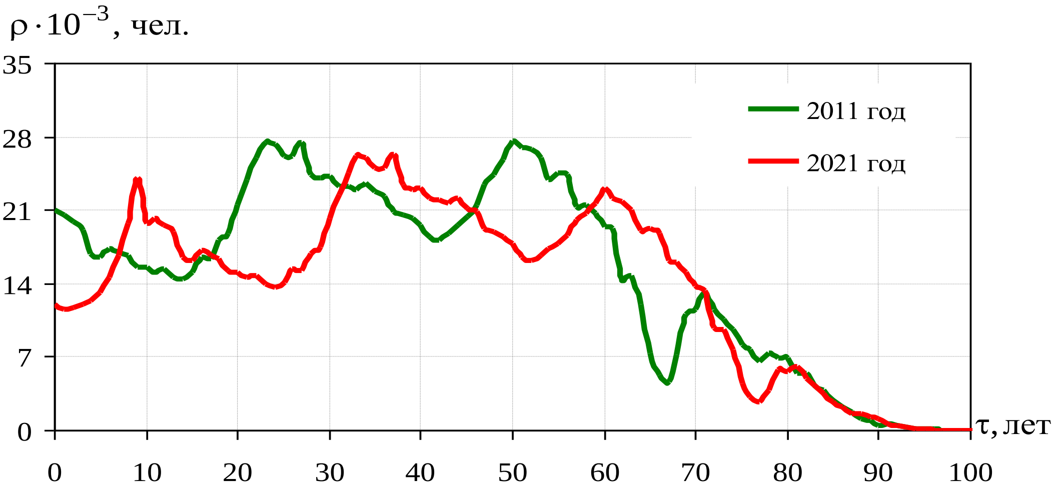


Рисунок 3.9 – Прогнозная плотность распределения населения УР по возрастам в 2021 году

Расчеты показали, что к 2021 году происходит снижение рождаемости. Данная тенденция обусловлена снижением численности населения в возрасте наибольшего числа рождений – 23-24 года.

На рисунке 3.10 по формуле (3.4) и численного решения задачи представлены прогнозные значения общей численности населения УР.

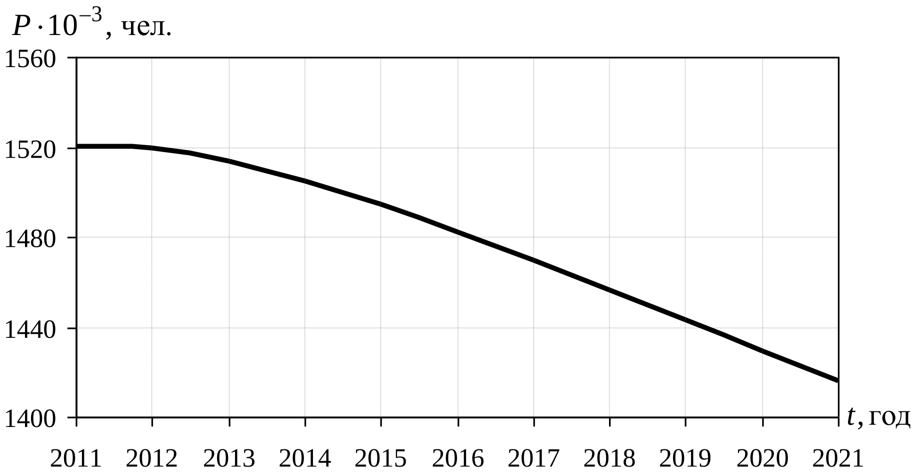


Рисунок 3.10 – Прогнозирование общей численности населения УР на период 2011-2021 годы

Расчеты показали, что через 10 лет, по сравнению с 2011 годом, общая численность населения уменьшится на 6,9 % и составит 1 415 797 человек.

На рисунке 3.11 представлены статистические и прогнозные значения общей численности населения и численности экономически активного населения. На рисунке 3.12 приведено их отношение $\lambda(t) = L(t)/P(t)$.

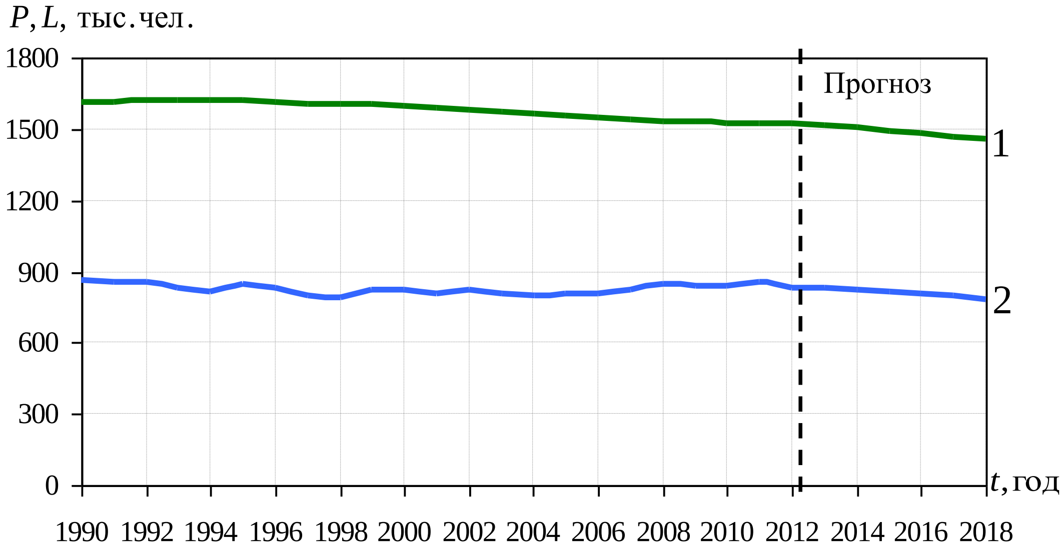


Рисунок 3.11 – Динамика демографических характеристик УР:
1 – общая численность населения
2 – численность экономически активного населения

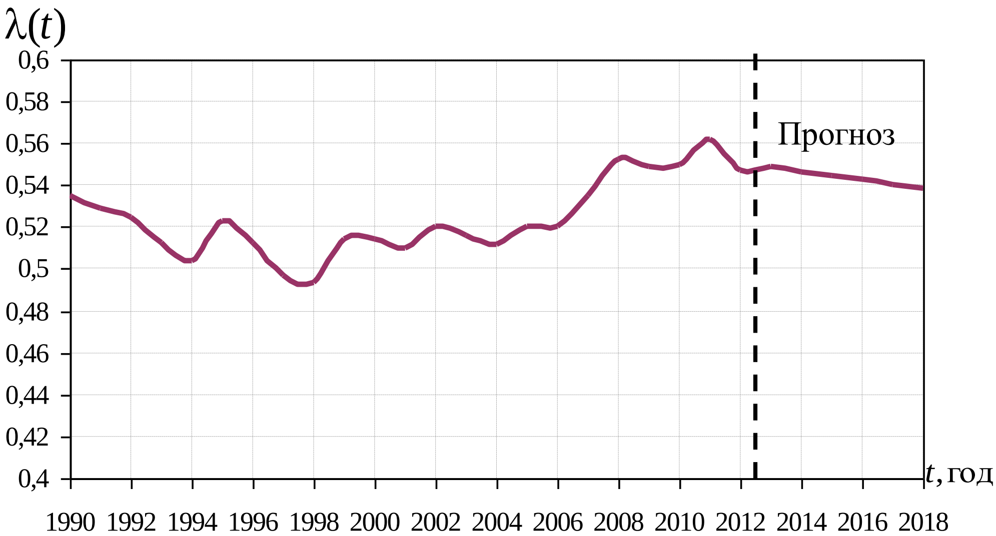


Рисунок 3.12 – Динамика $\lambda(t)$

Оценим общую погрешность моделирования численным методом и полученными функциями рождения, смертности и миграции. Для этого возьмем участок ретропрогноза с 2001 года по 2011 годы. Начальные данные плотности распределения населения по возрастам примем при t=2001 год. На рисунке 3.13 представлены модельные значения распределения населения по возрастам, спрогнозированные на 10 лет, и их статистические данные за 2011 год.

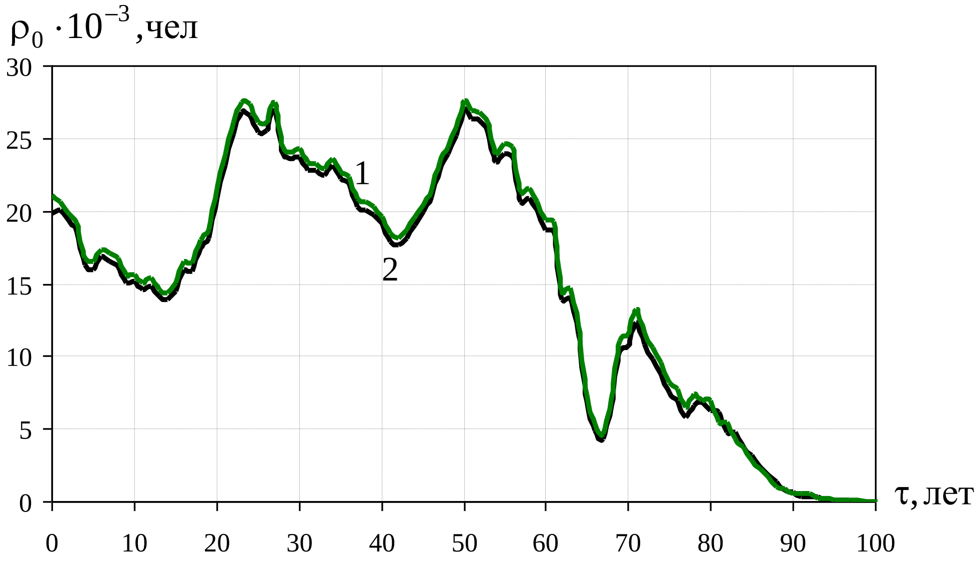


Рисунок 3.13 – Распределение населения УР по возрастам
в 2011 году: 1 – статистические данные; 2 – модельные значения

Результаты сравнения статистических данных P_c и расчетных P_p на участке ретропрогноза, рассчитанные по формуле

$$\xi(t) = \frac{|P_p(t) - P_c(t)|}{P_c(t)} \cdot 100\%, \qquad (3.19)$$

приведены в таблице 3.6.

Расчеты показали, что общая погрешность моделирования при полученных моделях функций рождения, смертности и миграции при прогнозе на 10 лет составила 3,1 %.

Таблица. 3.6. Анализ погрешности моделирования на участке ретропрогноза

Год	**Статистические данные** P_c**, чел**	**Расчетные значения** P_p**, чел.**	**Погрешность** ξ**, %**
2001	1 588,1	1 588,1	0
2003	1 574,0	1 568,2	0,37
2005	1 546,1	1 552,8	0,43
2007	1 511,9	1 537,9	1,69
2009	1 491,8	1 528,5	2,40
2011	1 473,2	1 520,4	3,10

3.2 Математическое моделирование динамики человеческого капитала с учетом социально-образовательного прогресса

3.2.1. Постановка задачи моделирования динамики человеческого капитала

Человеческий капитал региональной системы имеет многоаспектный характер и является сложной экономической категорией, состоящей из совокупности количественных и качественных характеристик. Носителями человеческого капитала являются демографические элементы. Численность демографических элементов определим как количественную составляющую человеческого капитала. К качественной составляющей региональной экономической системы будем относить капитал образования, здоровья и культуры населения.

Величина человеческого капитала существенно зависит от возраста. В этой связи важное значение имеет распределение демографических элементов по возрастам.

Для описания качественной стороны человеческого капитала будем полагать, что человеческий капитал состоит из трех компонент: капитала образования, капитала здоровья и капитала культуры [87, 90, 94]. Удельное среднестатистическое значение величины человеческого капитала в денежном выражении определяется по формуле:

$$h(t,\tau) = \alpha_1 h_1(t,\tau) + \alpha_2 h_2(t,\tau) + \alpha_3 h_3(t,\tau), \tag{3.20}$$

$$\alpha_i \in [0,1]; \ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1,$$

где α_i – весовые коэффициенты; индекс $i = 1$ соответствует образовательной составляющей, $i = 2$ – составляющей здоровья, $i = 3$ – культурной или духовной составляющей человеческого капитала.

Изменение компонент человеческого капитала $h_i(t,\tau)$ описывается уравнением вида [164, 165]:

$$\frac{\partial h_i(t,\tau)}{\partial t}+\frac{\partial h_i(t,\tau)}{\partial \tau}=-\nu_i h_i(t,\tau)+g_i(t,\tau)+i_i(t,\tau). \qquad (3.21)$$

Здесь $g_i = g_i(t,\tau)$, $i_i = i_i(t,\tau)$ – удельные инвестиции бюджета и удельные частные инвестиции в i-ю компоненту человеческого капитала соответственно; $\nu_i = \nu_i(t,\tau)$ коэффициент амортизации (выбытия) i-ой компоненты человеческого капитала.

При $t = t_0$ начальное условие имеет вид:

$$h_i(t_0,\tau) = h_{i0}(\tau), \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (3.22)$$

где $h_{i0}(\tau)$ – известные функции, находятся из решения (3.28).

Граничные условия на левом конце:

$$h_i(t,0) = 0, \quad (i = 1, 2, 3); \qquad (3.23)$$

на правом конце при $i = 1, 2$:

$$h_i(t,\infty) \approx h_i(t,\tau_m) = 0, \qquad (3.24)$$

где $\tau_m = \tau_m(t)$ – время дожития 5 процентов населения.

Будем полагать, что зависимость коэффициента амортизации ν_i от времени незначительна, тогда примем зависимость от возраста функции $\nu_i = \nu_i(\tau)$ $(i = 1, 2)$ в виде:

$$\nu_i(\tau)=\begin{cases}0\ , & \tau \le \tau_{ai},\\ b_i\left(\exp\left[\varepsilon_i(\tau-\tau_{ai})\right]-1\right), & \tau_{ai} \le \tau \le \tau_m,\end{cases} \qquad (3.25)$$

где (b_i, ε_i) находятся исходя из:

$$b_i\left(\exp\left[\varepsilon_i(\tau_m-\tau_{ai})\right]-1\right)=1, \qquad (3.26)$$

$$\int_0^{\tau_m}\left[g_i(t,\tau)+i_i(t,\tau)\right]d\tau=\int_{\tau_{ai}}^{\tau_m} b_i\left(\exp\left[\varepsilon_i(\tau-\tau_{ai})\right]-1\right)h_i(t,\tau)\,d\tau. \qquad (3.27)$$

Здесь τ_{ai} – верхняя граница активного периода трудовой деятельности $(i = 1)$ или физического состояния $(i = 2)$ [90]. Для культурной компоненты человеческого капитала примем $\nu_3 \equiv 0$.

Решение задачи (3.21)-(3.24) рассматривается как решение задачи Коши при известных $h_{i0}(\tau)$ [90].

$$\frac{dh_{i0}(\tau)}{d\tau} = -\nu_i(\tau) h_{i0}(\tau) + g_{i0}(\tau) + i_{i0}(\tau) \tag{3.28}$$

с начальными условиями:

$$h_{i0}(0) = 0\,, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{3.29}$$

где $\nu_3 = 0$, а коэффициенты выбытия человеческого капитала ν_1 и ν_2 находятся по формулам (3.25)-(3.27).

Для нахождения кривой распределения по возрастам удельных составляющих расходов государства $g_i(t,\tau)$, расходуемых на развитие человеческого капитала, используется решение задачи демографической динамики, представленной в п.3.1.

Суммы $B_{Ni}(t)$, инвестируемые бюджетом на статьи N_i (N_i – нумерация статей бюджета, расходуемых на образование $(i = 1)$, здравоохранение $(i = 2)$ и развитие культурной или духовной компонент человеческого капитала $(i = 3)$) будем распределять равномерно на соответствующие периоды жизни человека $[\tau_{1Ni}, \tau_{2Ni}]$ и на количество демографических единиц в этих периодах. В результате получим распределение удельных составляющих инвестиций государства, направленных на развитие человеческого капитала, по возрастам $g_i(t,\tau)$ [90]:

$$g_i(t,\tau) = \sum_{Ni} \frac{B_{Ni}(t,\tau)}{\int\limits_{\tau_{1Ni}}^{\tau_{2Ni}} \rho(t,\tau)\, d\tau}, \tag{3.30}$$

где

$$B_{Ni}(t,\tau) = \begin{cases} B_{Ni}(t), & \tau \in [\tau_{1Ni}, \tau_{2Ni}] \\ 0\,, & \tau \notin [\tau_{1Ni}, \tau_{2Ni}] \end{cases} \tag{3.31}$$

В отличие от [90], в расчетах примем и частные инвестиции. Распределение удельных составляющих частных инвестиций в человеческий капитал, направленных на приращение человеческого капитала, по возрастам $i_i(t,\tau)$ имеет вид:

$$i_i(t,\tau) = R(t) q_i(t)\,, \tag{3.32}$$

где $R(t)$ – среднедушевые денежные расходы населения в год t; $q_i(t)$ – доля составляющих человеческого капитала в общей структуре потребительских расходов.

Тогда общая величина человеческого капитала экономически активного населения находится по формуле:

$$H(t) = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{3} \alpha_i h_i(t,\tau)\varepsilon(t,\tau)\rho(t,\tau)d\tau, \tag{3.33}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(t,\tau)$ – доля экономически активного населения возраста τ в год t.

Одномерное кинетическое уравнение динамики человеческого капитала имеет вид [90]:

$$dH/dt = \bar{\varepsilon}J - \chi H, \tag{3.34}$$

где $\chi = const$ – коэффициент выбытия (амортизации) человеческого капитала; $J(t)$ – сумма бюджетных и частных инвестиции в человеческий капитал;

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(t) = \frac{\int_0^\infty \sum_{i=1}^{3} (g_i + j_i)\alpha_i \varepsilon(t,\tau)\rho(t,\tau)d\tau}{\int_0^\infty \sum_{i=1}^{3} (g_i + j_i)\alpha_i \rho(t,\tau)d\tau}. \tag{3.35}$$

Далее будем учитывать социально-образовательный прогресс в модели человеческого капитала. Для этого рассмотрим **два сценария развития экономики**:

- инерционный путь развития экономики;
- инновационный путь развития.

В случае инерционного пути развития предполагается, что темп СОП $\kappa = \kappa_1 = 0$. Тогда величина человеческого капитала определяется по формуле (3.33) или (3.34).

Инновационный сценарий предполагает, что с момента времени t_0 начинается инновационный путь развития экономической системы. Здесь различают два вида человеческого капитала: человеческий капитал H_1, который формируется с темпом СОП $\kappa_1 = 0$, и человеческий капитал H_2, который формируется с темпом СОП $\kappa_2 > 0$.

Одномерное уравнение динамики человеческого капитала имеет вид:

$$\dot{H}_i(t) = e^{\kappa_i(t-t_0)}(t)\bar{\varepsilon}J_i(t) - \chi_i H_i(t),\ i = 1,2\,,\ H = H_1 + H_2\,, \tag{3.36}$$

$$H_{10} = H(t_0),\ \ H_{20} = 0\,. \tag{3.37}$$

3.2.2. Решение задачи моделирования динамики человеческого капитала

Оценка человеческого капитала региона основана на решении задачи моделирования количественной составляющей человеческого капитала (задача моделирования демографических характеристик) и задачи моделирования качественных составляющих человеческого капитала. На рисунке 3.14 представлена схема методики количественной оценки человеческого капитала экономической системы.

Рассмотрим решение задачи моделирования качественной составляющей человеческого капитала на примере статистических данных по Удмуртской Республике. Решение задачи демографической динамики рассмотрено в п. 3.1.

Расходные статьи бюджетов федерального и регионального уровней, направленные на развитие человеческого капитала УР, по данным [157,162], представлены в таблице 3.7.

Рисунок 3.14 – Схема методики количественной оценки человеческого капитала экономической системы региона

Таблица 3.7 – Бюджетные инвестиции, направленные на развитие человеческого капитала УР (на основе расходных статей федерального и регионального бюджетов), в ценах 2011 года

№ статьи	Наименование статьи расходов	Временной интервал, год	Год, млн. руб.			
			1996	…	2010	2011
0700	**Образование**		**7 563,66**	**...**	**15 583,65**	**15 300,35**
0701	Дошкольное	$3 \le \tau \le 6$	1 787,62	…	3 835,19	3 909,70
0702	Общее	$7 \le \tau \le 17$	4 141,52	…	8 296,32	8 720,91
0703	Начальное	$14 \le \tau \le 17$	811,39	…	773,37	641,46

	профессиональное					
0704	Среднее профессиональное	$18 \le \tau \le 21$	195,78	…	527,80	564,42
0705	Переподготовка и повышение квалифика-ции	$25 \le \tau \le 59$	55,48	…	64,03	51,72
0706	Высшее профессиональ-ное	$18 \le \tau \le 22$	25,07	…	16,68	7,08
0707-0709	Прочие расходы в облас-ти образования	$3 \le \tau \le 59$	546,80	…	2 070,25	1 405,06
0900	**Здравоохранение и спорт**		**6 164,64**	…	**13 881,37**	**14 406,27**
0901	Здравоохранение	$1 \le \tau \le \tau_m$	5 943,85	…	4 201,40	4 273,09
0902	Спорт и физическая культура	$3 \le \tau \le \tau_m$	200,65	…	789,84	1 102,65
0903-0904	Прочие расходы в облас-ти здравоохранения и спорта	$1 \le \tau \le \tau_m$	20,14	…	8 890,12	9 030,53
0800	**Культура, кинемато-графия и средства мас-совой информации**		**1 336,70**	…	**2 223,84**	**2 233,59**
0801	Культура	$3 \le \tau \le \tau_m$	1 057,07	…	1 905,07	1 771,05
0802	Кинематография	$3 \le \tau \le \tau_m$	13,38	…	0,12	0,90
0803	Телевидение и радиовещание	$3 \le \tau \le \tau_m$	145,88	…	96,98	106,66
0804	Периодическая печать и издательства	$7 \le \tau \le \tau_m$	120,38	…	91,52	147,95
0805-0806	Прочие расходы в облас-ти культуры, кинемато-графии и средств массо-вой информации	$3 \le \tau \le \tau_m$	-	…	130,15	207,03
Дефлятор			1,15	…	1,16	1,00

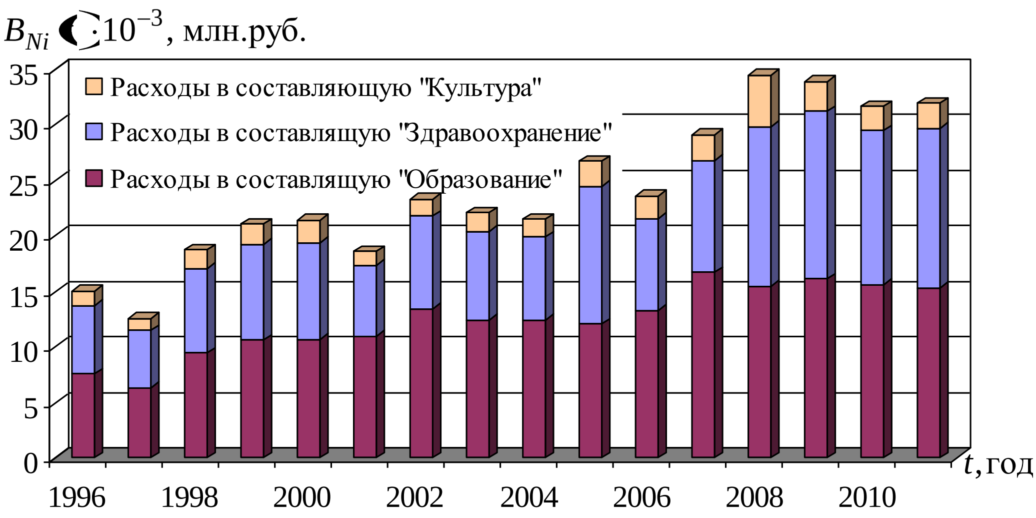


Рисунок 3.15 – Расходные статьи федерального и регионального бюджетов, направленные на развитие человеческого капитала УР, за период 1996-2011 годы (в ценах 2011 года)

Бюджетные расходы в три компоненты человеческого капитала (образование, здравоохранение, культура) приведены на диаграмме (см. рисунок 3.15). За период 1996-2011 годы расходы в образовательную составляющую увеличились на 49 %, в здравоохранение – на 43 %, в культурную составляющую – на 60 %.

Инвестирование человеческого капитала происходит и за счет частных инвестиций, которые будем определять на основе среднедушевых денежных расходов населения в составляющие человеческого капитала. В таблице 3.8 представлены статистические данные по среднедушевым денежным расходам $R(t)$ [157,158] населения УР и доли составляющих человеческого капитала $q_i(t)$ в их общей структуре.

Таблица 3.8 – Среднедушевые денежные расходы населения УР и доли составляющих человеческого капитала в их структуре

Год	$R(t)$, **руб., в текущих ценах**	**Дефлятор**	$R(t)$, **руб., в ценах 2011 года**	$q_1(t)$, **%**	$q_2(t)$, **%**	$q_3(t)$, **%**
1996	6 072	1,15	88 572	1,3	0,6	2,5
1997	7 104	1,19	90 109	1,1	0,7	2,6
1998	7 032	1,72	74 954	1,1	0,6	2,6
1999	10 476	1,38	64 921	1,5	0,6	2,1
2000	15 300	1,16	68 707	1,2	1,1	2,1
2001	16 032	1,16	62 064	1,4	1,6	5,2
2002	20 112	1,14	67 120	1,7	1,9	5,7
2003	24 168	1,20	70 751	1,3	1,6	6,2
2004	29 268	1,19	71 400	1,7	2,2	6,2
2005	36 600	1,15	75 031	1,5	2,7	5,8
2006	46 884	1,14	83 577	1,7	3,2	6,5
2007	60 744	1,18	94 986	1,5	3,2	7,2
2008	81 924	1,02	108 564	1,6	3,1	7,0
2009	88 140	1,12	114 511	1,5	4,0	6,6
2010	98 592	1,16	114 367	1,1	4,1	6,6
2011	117 584	1,00	117 584	1,2	4,0	6,7

Исходные данные показали, что основная часть государственных расходов в человеческий капитал направлена в здравоохранительную и образовательную составляющие, а частные расходы – в культурную составляющую (см. рисунок 3.16).

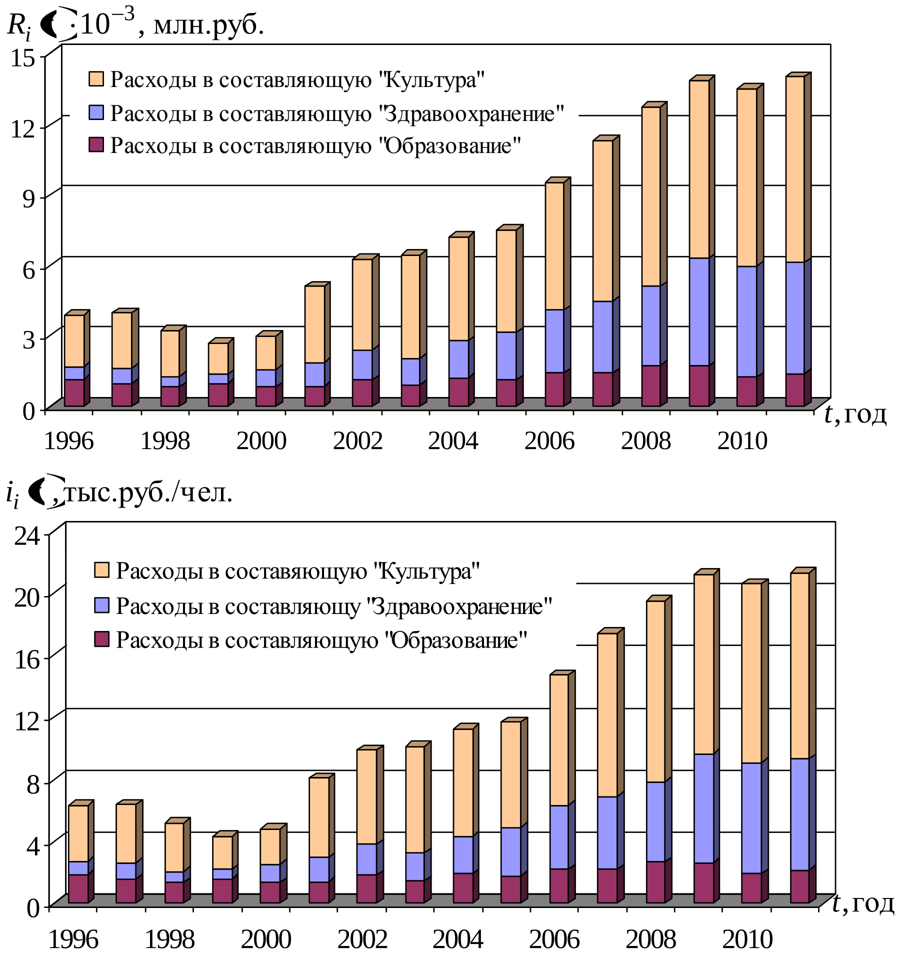


Рисунок 3.16 – Удельные (*а*) и общие (*б*) частные расходы, направленные на развитие человеческого капитала, за период 1996-2011 г.г. (в ценах 2011 года)

На рисунке 3.17 представлен график функции $\nu_1 = \nu_2 = \nu(\,)$ на основе рассчитанных в работе [90] констант функции (3.25) $b_i = 0{,}031$, $\varepsilon_i = 0{,}08$ $(=1,2)$

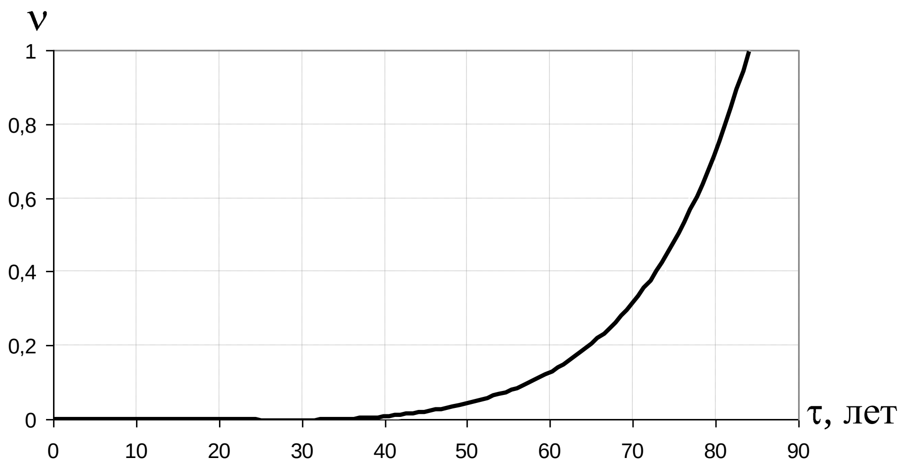
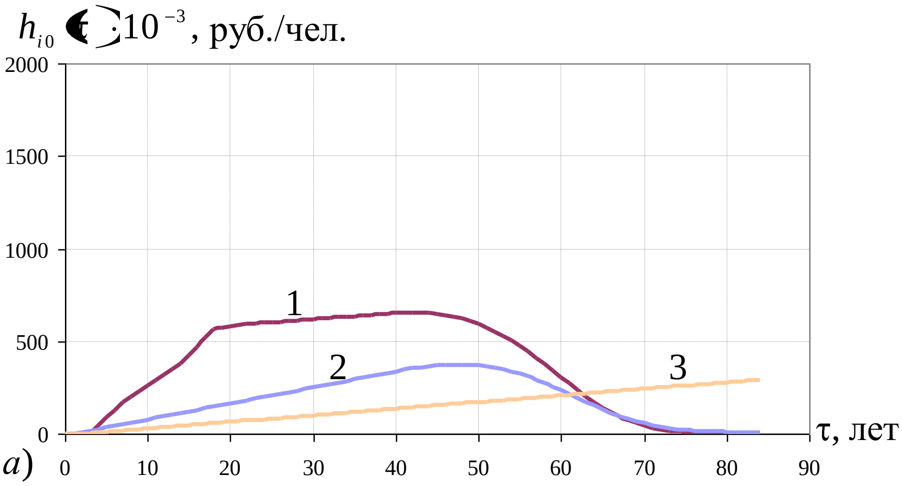
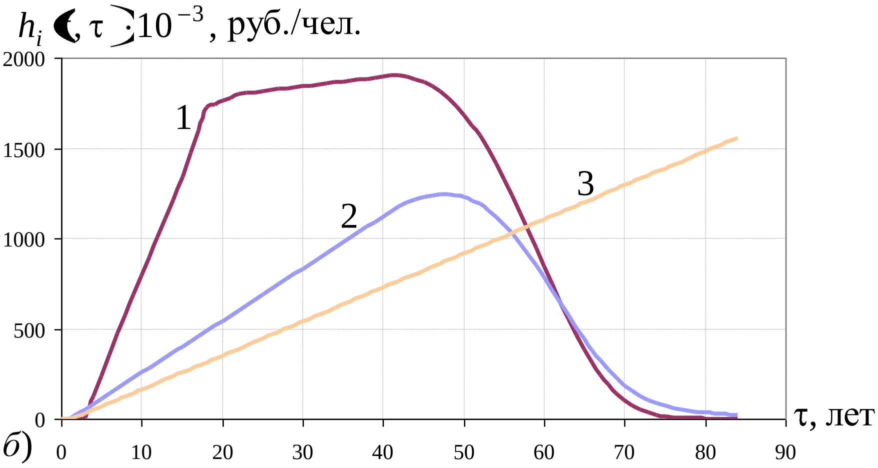


Рисунок 3.17 – Зависимость коэффициента выбытия образовательной составляющей и составляющей здоровья человеческого капитала от возраста

Решение задачи Коши (3.28)-(3.29), полученное для начального момента $t_0 = 1996$, представлено на рисунке 3.18 *а*). Текущие распределения удельных составляющих человеческого капитала $h_i(t,\tau)$ для любого момента времени находятся при решении задачи (3.21)-(3.24) конечно-разностной явно-неявной схемой с односторонними разностями. На рисунке 3.18 *б*) представлены графики составляющих человеческого капитала для момента времени t =2011 год.



а)



б)

Рисунок 3.18 – Начальное – *а*) и текущее– *б*) распределения составляющих удельного человеческого капитала: 1-образование, 2-здравоохранение, 3-культура

На рисунке 3.19 представлена динамика человеческого капитала за период 1996-2011 годы, рассчитанная по формуле (3.33) при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$.

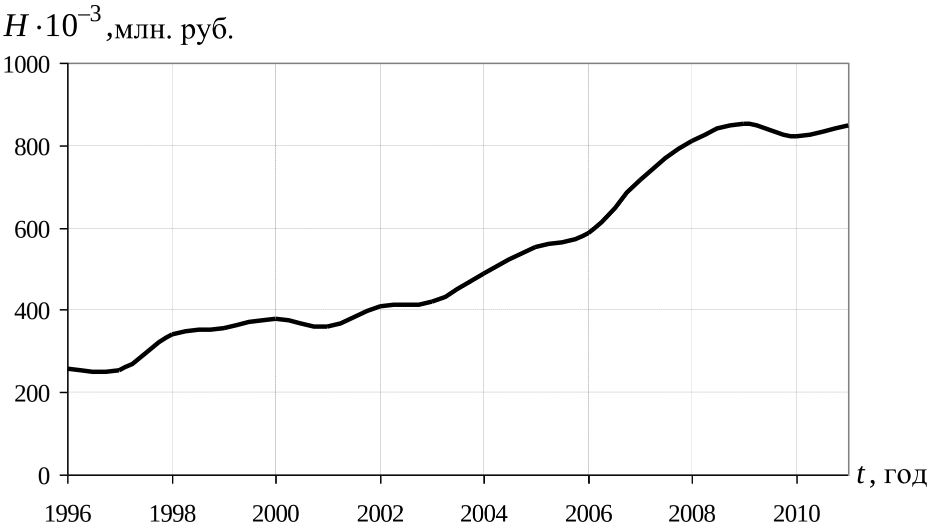


Рисунок 3.19 – Динамика человеческого капитала за период с 1996 года по 2011 год (в ценах 2011 года)

Расчеты показали, что динамика человеческого капитала имеет положительную тенденцию. Так, за 15-летний период данная величина увеличилась в 3,3 раза.

3.3 Математическое моделирование динамики производственного капитала с учетом научно-технического прогресса

3.3.1. Постановка задачи моделирования динамики производственного капитала

Производственный капитал является материально-технической основой производственной и служит для производства товаров, услуг и используется в течение длительного периода.

Моделирование динамики производственного капитала будем осуществлять с помощью классической модели изменения ОПФ с учетом амортизации и инвестиций:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \eta K(t), \tag{3.38}$$

где $I(t)$ – инвестиции в основные производственные фонды (ОПФ), $\eta = \mathrm{const}$ - коэффициент выбытия ОПФ.

Далее, как и п.2.2, будем учитывать научно-технический прогресс в модели производственного капитала. Рассмотрим **два сценария развития экономики**:

- инерционный путь развития экономики;
- инновационный путь развития.

В случае инерционного пути развития предполагается, что темп НТП $\beta = \beta_1 = 0$. Тогда величина производственного капитала определяется по формуле (3.38).

Инновационный сценарий предполагает, что с момента времени t_0 начинается инновационный путь развития экономической системы. Здесь различают два вида производственного капитала: капитал K_1, который формируется с темпом НТП $\beta_1 = 0$, и капитал K_2, который формируется с темпом НТП $\beta_2 > 0$. Кинетическое уравнение динамики производственного капитала в случае инновационного сценария имеет вид:

$$\dot{K}_i(t) = \mathrm{e}^{\beta_i(t-t_0)} I_i(t) - \eta K_i(t), \;\; i = 1{,}2, \;\; K = K_1 + K_2, \qquad (3.39)$$

$$K_{10} = K(0), \;\; K_{20} = 0. \qquad (3.40$$

3.3.2. Определение функции выбытия производственных фондов

Все объекты подвержены физическому и моральному износу: утрачивают свои свойства под влиянием различных факторов и не могут полноценно выполнять свои функции. Поэтому периодически возникает необходимость замены или обновления основных фондов.

Конечно, чем фонды новее и современнее, то тем выше их производительность и меньше затраты на их обслуживание. Для экономики региона УР средний возраст оборудования составляет 19-20 лет, а степень износа составляет около 50% [157]. Такая сложившаяся ситуация для современной экономики является достаточно сложной и требует значительных инновационных и технологических преобразований, которые должны уменьшать выбытие основных фондов.

Таблица 3.9 – Изменение возрастной структуры ОПФ в зависимости от времени (%)

Год	**Все оборудование**	**До 5 лет**	**6-10 лет**	**11-15 лет**	**16-20 лет**	**Более 20 лет**	**Ср. возраст оборудования, лет**
1996	100	7,2	27,5	23,4	16,1	25,8	15,2
1997	100	5,2	24,1	24,7	17,5	28,5	16,1
1998	100	4,1	20,1	25,3	18,9	31,6	17,0
1999	100	4,1	15,2	25,7	20,1	34,8	17,9
2000	100	4,7	10,6	25,5	21,0	38,2	18,7
2001	100	5,7	7,6	23,2	21,9	41,6	19,4
2002	100	6,7	5,8	20,0	22,6	44,9	20,1
2003	100	7,8	4,9	16,4	22,7	48,2	20,7
2004	100	8,6	5,1	12,3	22,5	51,5	21,2
2005	100	9,6	5,1	9,0	22,5	53,8	21,5
2006	100	5,7	9,0	12,7	15,7	56,9	20,6
2007	100	7,0	10,0	13,3	14,0	55,7	20,5
2008	100	7,0	9,0	14,3	12,0	57,7	20,4
2009	100	8,7	12,0	13,0	12,3	54,0	19,7
2010	100	8,3	12,8	13,9	12,7	52,3	19,3

Рассмотрим нахождение коэффициента выбытия ОПФ η на примере статистических данных экономической системы Удмуртской Республики за период 1996-2011 годы [157, 158], представленных в таблице 3.10 и на рисунке 3.20. Используя данные по ОПФ $K(t)$ и инвестициям в них $I(t)$, коэффициент выбытия, исходя из уравнения (3.38), можно рассчитать по формуле:

$$\eta(t) = \frac{I(t) - \Delta K(t)}{K(t)}. \tag{3.41}$$

Таблица 3.10 – Динамика ОПФ и инвестиций в ОПФ
экономической системы Удмуртской Республики за период 1980 – 2011 годы

Год	$K_{исх}^{тек}$, млн.руб.	$I_{исх}^{тек}$, млн.руб.	d	$K_{исх}^{2011}$, млн.руб.	$I_{исх}^{2011}$, млн.руб.	$K_{сгл}^{2011} := K$, млн.руб.	$I_{сгл}^{2011} := I$, млн.руб.	η
1996	126 131	3 577	1,15	1 829 658	51 888	1 463 241	49 295	0,13
1997	130 539	4 443	1,19	1 645 178	55 995	1 421 837	46 715	0,10
1998	145 111	3 234	1,73	1 542 011	34 366	1 353 728	45 211	0,42
1999	150 243	6 407	1,38	925 532	39 469	1 157 389	45 289	0,15
2000	184 560	9 904	1,17	826 262	44 339	997 884	41 727	0,03
2001	220 659	13 603	1,16	847 962	52 274	852 484	42 495	0,06
2002	254 769	11 477	1,14	847 653	38 186	820 741	42 155	0,08
2003	278 762	13 068	1,20	815 010	38 207	805 548	44 237	0,11
2004	315 521	15 540	1,19	766 819	37 767	775 615	45 917	0,07
2005	368 307	26 876	1,15	750 298	54 751	756 617	52 130	0,14
2006	394 881	34 312	1,14	698 293	60 676	739 368	58 589	0,01
2007	484 366	44 565	1,18	752 666	69 250	739 033	61 490	0,12
2008	553 400	53 536	1,02	728 762	70 501	739 712	60 348	0,05
2009	592 068	40 450	1,12	765 146	52 275	740 433	60 392	0,08
2010	650 857	42 346	1,16	753 692	49 037	728 925	57 183	0,13
2011	701 899	60 898	1,00	701 899	60 898	712 989	59 192	0,13

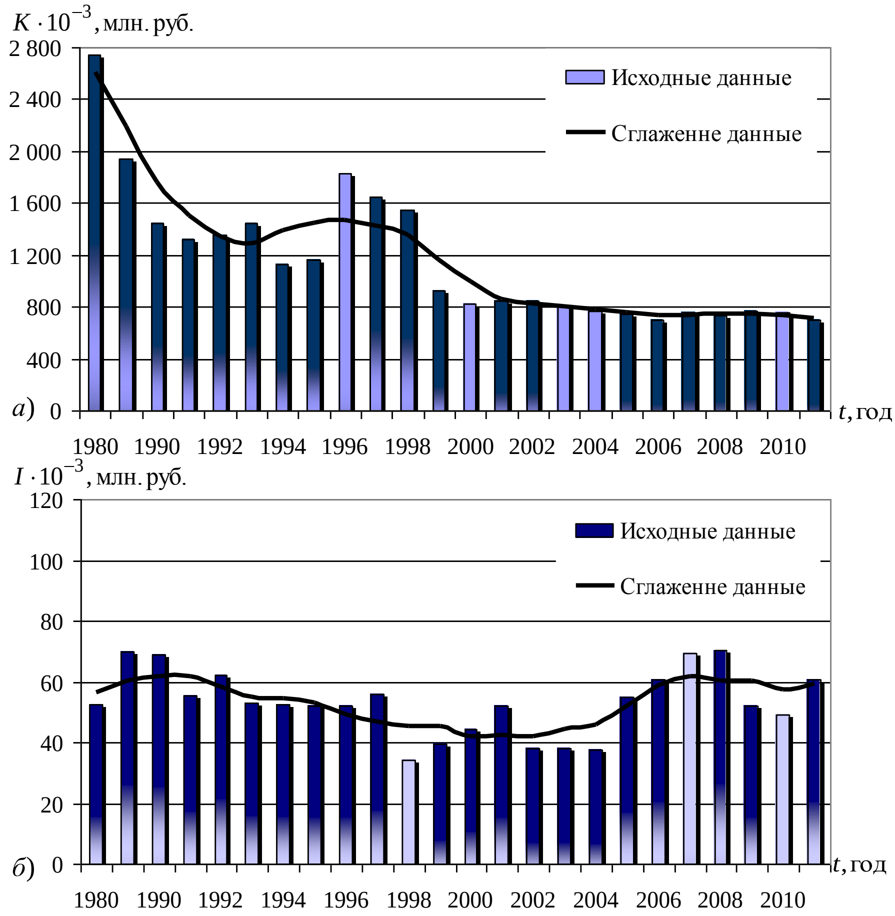


Рисунок 3.20 – Динамика ОПФ – *а*) и инвестиций в ОПФ – *б*) по УР в стоимостном выражении за период 1980-2011 гг. (в ценах 2011 года)

Как показывают расчеты, среднее значение коэффициента выбытия за рассматриваемый период составляет $\eta = 0{,}11$ (11%). Следует отметить, что коэффициент обновления по статистическим данным УР составляет 6,4%. Все это приводит к тому, что сейчас динамика ОПФ имеет тенденцию спада, ее эффективность использования ежегодно уменьшается. Для устранения сложившейся тенденции необходимы значительные преобразования в инновационной и управленческой сфере.

4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО И СОЦИАЛЬНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОГРЕССА

4.1 Информационно-аналитическая система для решения задачи оптимального управления

4.1.1 Назначение и структура

Для решения задачи оптимального управления экономической системой региона была разработана информационно-аналитическая система (ИАС).

ИАС оптимального управления экономической системой Удмуртской Республики включает в себя базу данных по демографическим и экономическим показателям, программно-вычислительный комплекс, реализующий модели динамики основных факторов развития региона и алгоритм численного решения задачи оптимального управления экономической системой с учетом НТП и СОП.

ИАС реализует следующие функции:

- Работа с базой данных: хранение, редактирование, отображение и обработка данных демографических и экономических показателей региона.
- Получение общей характеристики и визуальное представление результатов о текущем состоянии экономики и демографических показателей региона.
- Прогнозирование и решение задачи определения численности и состава населения.
- Расчет величины человеческого капитала.
- Прогнозирование экономических показателей региона.

ИАС предоставляет пользователю широкий спектр возможностей для анализа состояния экономики и демографических показателей региона. Настройки отображения информации дают возможность визуального представления текущего состояния показателей региона и их прогнозирование.

Основные возможности ИАС:

- Анализ информации и расчет основных показателей, характеризующих процесс воспроизводства населения и развитие демографических показателей региона.
- Анализ и расчет основных макроэкономических показателей региона.
- Информационно-справочное обслуживание, при котором по запросам пользователей выдаются данные, отражающих демографическое и экономическое состояние региона.
- Создание программно-вычислительного комплекса для прогнозирования демографической динамики населения Удмуртской Республики, расчета величины человеческого капитала и решения задачи оптимального управления экономической системой региона.
- Визуальное отображение результатов моделирования.

4.1.2 Структура базы данных

База данных экономических и демографических показателей региона разработана в СУБД Microsoft Access. Информационной основой базы данных служат данные о переписи населения, статистические данные по макроэкономическим и социально-экономическим показателям, предоставленные Государственным комитетом по статистике УР.

База данных демографических и экономических характеристик региона является трехблочной системой. Первый блок данных включает в себя статистические данные по демографическим и экономическим показателям Удмуртской Республики, второй блок – информацию о городском и сельском населении региона, третий блок – начальную информацию для анализа и прогнозирования региональной экономической системы.

В первом блоке данных представлена информация по демографическим показателям (общая численность населения; численность умерших; численность родившихся; численность трудоспособного населения; численность дотрудоспособного населения; численность послетрудоспособного населения;

численность мужчин и женщин; численность умерших мужчин и женщин; численности родившихся мальчиков и девочек; средняя продолжительность жизни) и основным макроэкономическим характеристикам региона.

Структура первого блока данных по демографическим показателям приведена в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Структура первого блока данных по демографическим показателям

№	Наименование поля	Описание	Тип
1	Год	Год	Числовой
2	Город	Данные по городам	Числовой
3	Село	Данные по сельской местности	Числовой
4	Всего	Данные по региону	Числовой

Структура первого блока данных по макроэкономическим показателям (данные 14-го пункта) приведена в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Структура первого блока данных по макроэкономическим показателям

№	Наименование поля	Описание	Тип
1	Год	Год	Числовой
2	Город	Стоимость ОПФ в приведенных ценах, млн. руб.	Числовой
3	ВРП	ВРП в приведенных ценах, млрд. руб.	Числовой

Второй блок данных (см. таблицы 4.3 и 4.4) включает в себя характеристики сельского и городского населения.

Таблица 4.3 – Структура второго блока данных по сельскому населению

№	Наименование поля	Описание	Тип
1	Ключ		Счетчик
2	Год	Год	Числовой
3	Численность	Численность	Числовой
4	Родившиеся	Родившиеся	Числовой
5	Умершие	Умершие	Числовой

Таблица 4.4 – Структура второго блока данных по городскому населению

№	Наименование поля	Описание	Тип
1	Ключ		Счетчик
2	Год	Год	Числовой
3	Численность	Численность	Числовой
4	Родившиеся	Родившиеся	Числовой
5	Умершие	Умершие	Числовой

Третий блок данных (см. таблицу 4.5) включает повозрастные характеристики.

Таблица 4.5 – Структура третьего блока данных по возрастным характеристикам

№	Наименование поля	Описание	Тип
1	Год	Год	Числовой
2	Место жительства	Город/Село	Строковый
3	Пол	Пол	Строковый
4	Возраст	Возраст	Числовой
5	Численность	Численность	Числовой
6	Умершие	Умершие	Числовой
7	Родившиеся	Родившиеся	Числовой

Программный комплекс построен таким образом, что предусматривает возможность визуальной работы с базой данных, а также возможность дополнения ее таблиц.

База данных предоставляет возможность дополнения таблиц, что позволяет расширять базу данных посредством обновления рассматриваемых показателей.

4.1.3 Основные возможности

Разработанный программно-вычислительный комплекс «Решение задачи оптимального управления экономической системой региона» предназначен для анализа и прогноза количественной и качественной составляющих человеческого капитала и построения оптимального управления региональной экономической системы с учетом НТП и СОП.

Возможности программно-вычислительного комплекса:

- Наглядное графическое представление статистических данных и производных показателей, позволяющих осуществить анализ сложившейся демографической ситуации в регионе.
- Численное решение уравнения динамики возрастного состава населения. Расчет и прогнозирование демографической динамики региона на основе уравнения демографического состава.
- Расчет величины человеческого капитала региона.
- Решение задачи оптимального управления экономической системой региона с учетом НТП и СОП.

Платформой программно-вычислительного комплекса является интерфейс, определяющий взаимосвязь между блоками системы. В состав системы входят: интерфейс; база данных; блок структурных запросов к базе данных; блок визуализации данных; блок экономико-математического моделирования.

Структура взаимодействия блоков системы показана на рисунке 4.3.

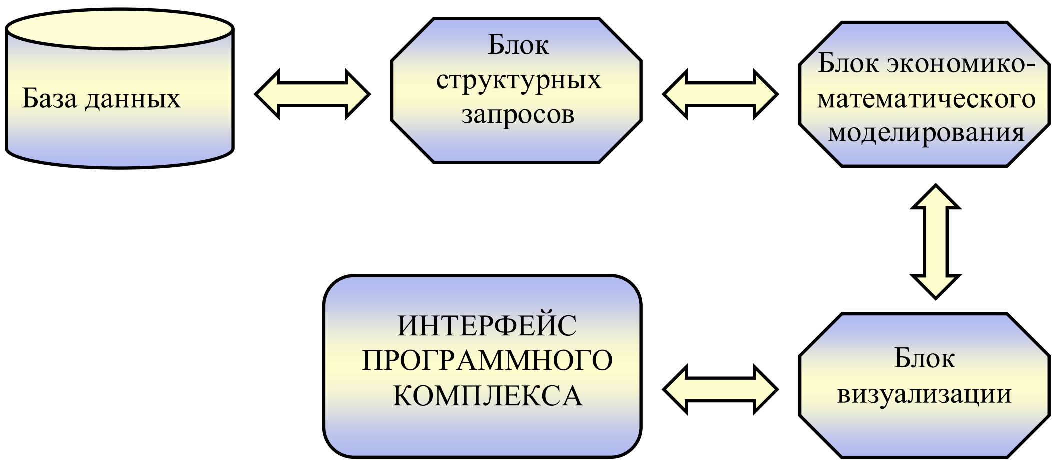


Рисунок 4.3 – Структурная схема программно-вычислительного комплекса

На рисунках 4.4–4.8 представлены некоторые фрагменты программно-вычислительного комплекса.

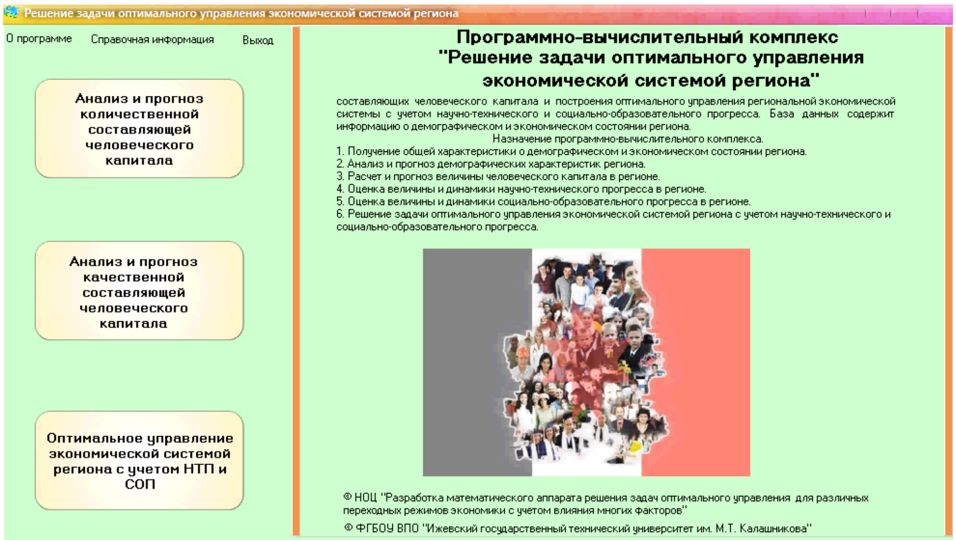


Рисунок 4.4 – Меню программно-вычислительного комплекса

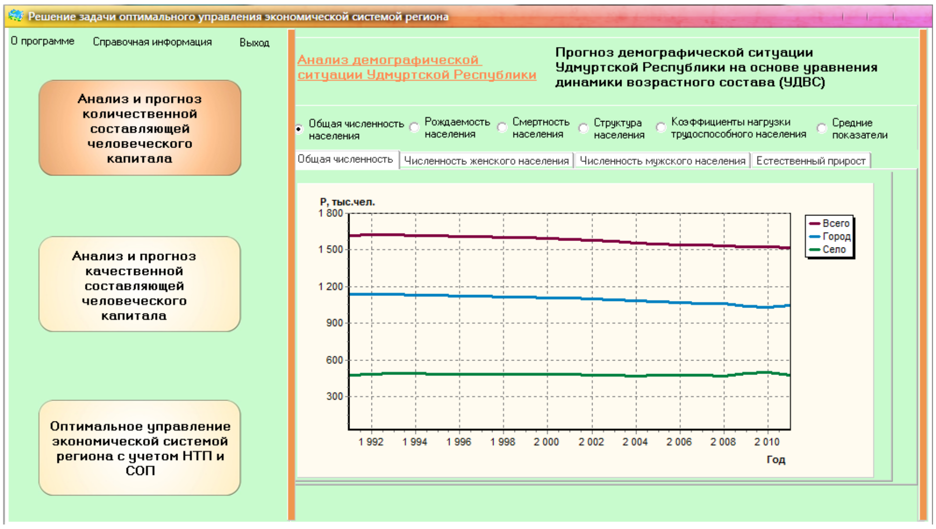


Рисунок 4.5 – Общая информация о демографической ситуации УР

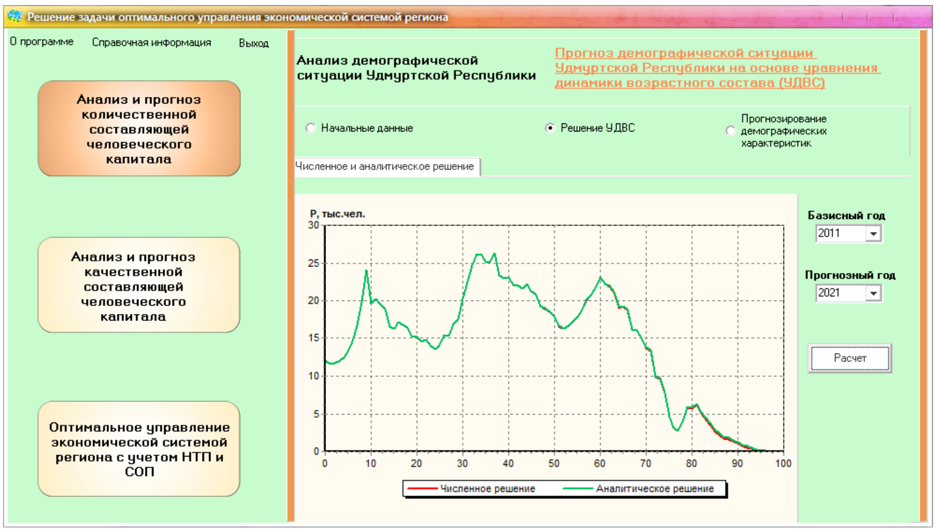


Рисунок 4.6 – Численное и аналитическое решение уравнения динамики возрастного состава с прогнозом на 10 лет

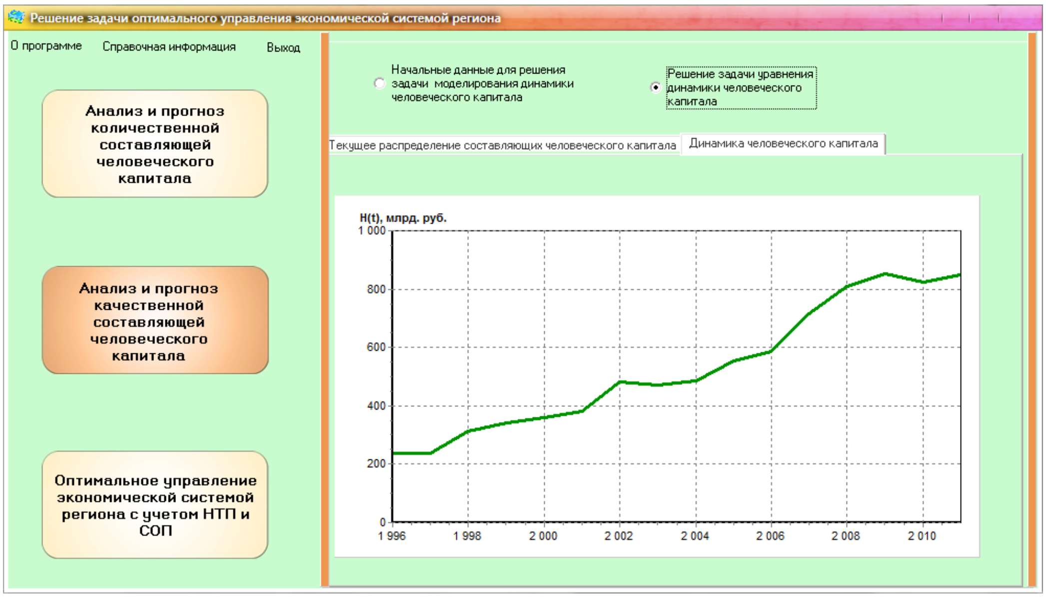


Рисунок 4.7 – Динамика человеческого капитала

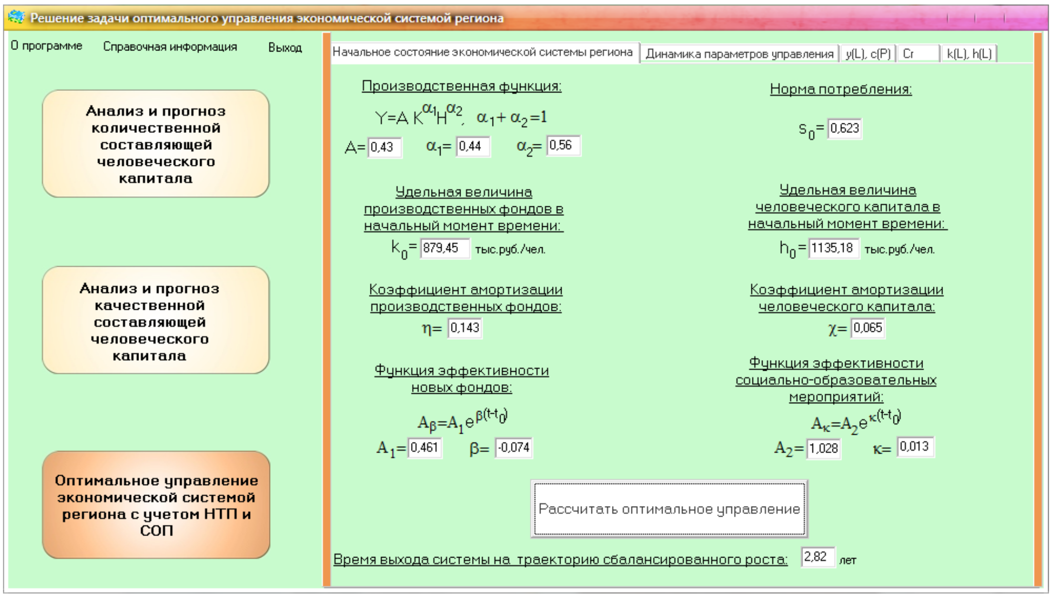


Рисунок 4.8 – Решение задачи оптимального управления

4.2 Результаты численных исследований

4.2.1 Идентификация неизвестных параметров

Для решения задачи оптимального управления экономической системой необходимо определить значения неизвестных параметров математической модели экономической системы региона. Для этого была решена задача идентификации параметров модели (2.1)–(2.10) на основе имеющейся статистической информации по экономическим показателям Удмуртской Республики за 1996-2011 годы [155-159, 162].

Для повышения точности расчетов производилось сглаживание колебаний временных рядов методом скользящей средней. Полученные таким образом исходные временные ряды основных экономических параметров региона представлены в таблице 4.6.

Таблица 4.6 – Исходные данные макроэкономических показателей экономики УР в ценах 2011 года

Обозначение	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**
Y, млн. руб.	259 083,4	253 385,5	241 451,1	242 501,7	244 614,2	254 190,8	257 558,4
K, млн. руб.	1 824 004,7	1 621 103,5	1 360 451,2	1 163 325,0	1 002 214,5	856 078,4	823 809,9
H, млн. руб.	255 309,7	276 972,9	317 445,6	337 728,0	368 756,8	384 197,6	410 430,9
B, млн. руб.	-	-	9 700,4	8 879,8	7 782,0	6 950,3	5 488,4
I, млн. руб.	52 576,6	51 418,5	45 437,0	45 533,7	41 922,9	42 679,8	42 320,9
J, млн. руб.	16 209,8	17 352,0	20 316,3	22 300,5	24 403,6	22 811,4	21 339,1
C, млн. руб.	-	-	-	-	-	-	-
N^F, млн. руб.	-	-	-	-	-	-	37 549,4
N^R, млн. руб.	-	-	-	-	-	-	39 316,0
T, млн. руб.	-	-	-	-	-	-	7 541,5
D, млн. руб.	-	-	-	-	-	45 587,9	49 485,3
Дефлятор	1,15	1,19	1,72	1,38	1,16	1,16	1,14
L, тыс. чел.	809,6	792,1	772,4	810,2	809,0	799,8	821,2
P, тыс. чел.	1 612,6	1 607,7	1 604,0	1 601,4	1 595,6	1 588,1	1 578,2

Продолжение таблицы 4.6

Обозначение	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
Y, млн. руб.	264 855,8	269 790,9	281 812,9	294 124,0	304 526,0	308 482,7	310 304,1	306 131,4	305 391,4
K, млн. руб.	809 059,0	778 999,2	760 434,0	743 893,4	743 791,0	743 781,4	753 789,4	753 222,2	755 670,6
H, млн. руб.	445 829,8	491 154,7	552 464,6	630 786,9	704 096,4	757 817,4	810 287,5	823 989,7	859 849,1
B, млн. руб.	4 110,8	3 667,7	3 374,9	3 017,9	3 280,7	3 535,9	3 714,1	3 788,3	4 018,5
I, млн. руб.	44 445,2	46 146,2	52 423,2	58 961,0	61 889,5	60 694,4	60 640,8	57 293,2	59 206,4
J, млн. руб.	21 061,4	23 499,7	28 579,8	33 546,3	37 960,5	39 655,3	38 194,7	33 754,7	32 521,3
C, млн. руб.	-	-	-	-	-	-	-	-	-
N^F, млн. руб.	48 106,8	58 226,9	71 316,1	89 227,7	111 620,3	129 981,7	144 308,3	152 418,2	161 504,8
N^R, млн. руб.	38 548,9	36 466,7	36 811,0	39 518,9	39 935,3	40 174,5	40 327,1	36 782,7	35 685,8
T, млн. руб.	6 588,9	5 443,4	5 464,3	5 635,5	6 274,7	8 144,1	8 993,3	10 132,9	9 795,4
D, млн. руб.	51 781,5	56 558,4	63 589,1	73 450,0	79 111,5	76 239,1	74 569,9	63 009,4	61 773,7
Дефлятор	1,2	1,19	1,15	1,14	1,18	1,02	1,12	1,16	1,00
L, тыс. чел.	809,6	798,0	821,0	843,0	835,6	841,0	852,0	842,1	845,3
P, тыс. чел.	1 568,2	1 560,3	1 552,8	1 544,4	1 537,9	1 532,7	1 528,5	1 520,3	1 526,3

Следует сказать, что статистические данные по потреблению в таблице 4.6 отсутствуют. Потребление на макроуровне определяется как параметр, представляющий собой разницу между произведенным продуктом и его частью, распределенной между производящим капиталом. В этом случае величина потребления является реальной величиной.

Идентификация неизвестных параметров макроэкономической модели региона производится на основе данных, представленных в таблице 4.6.

Моделирование характеристик экономической системы региона производится с помощью производственной функции Кобба-Дугласа (2.3), устанавливающей зависимость производимого продукта Y от величины производственного капитала K и величины человеческого капитала H. Замена $y = Y/L$; $k = K/L$; $h = H/L$ приводит (2.3) к уравнению вида:

$$y = Ak^{\alpha} h^{1-\alpha} \quad , \tag{4.1}$$

Идентификация неизвестных констант A, α, β проводится методом наименьших квадратов. Для этого сначала уравнение (4.1) приводят к линейному виду, прологарифмировав правую и левую части.

Расчеты, проведенные на основе статистических данных Удмуртской Республики (см. таблицу 4.1), показали, что параметры производственной функции региона имеют следующие значения: $A = 0{,}42$; коэффициент эластичности по производственным фондам $\alpha_1 = 0{,}45$; коэффициент эластичности по человеческому капиталу $\alpha_2 = 0{,}55$. Коэффициент детерминации построенной зависимости $R^2 = 0{,}96$.

Отношение коэффициентов эластичности составляет 0,76. Рассматриваемая экономическая система работает в условиях дефицита человеческого капитала.

Учитывая отдачу от масштаба производства постоянной, производственную функцию (4.1) можно представить в виде $v = Aw^{\alpha_1}$, где $v = y/h$, $w = k/h$. На рисунке 4.8 представлены функция $v = 0{,}42\, w^{0{,}45}$ и значения (v, w), построенные по данным таблицы 4.6.

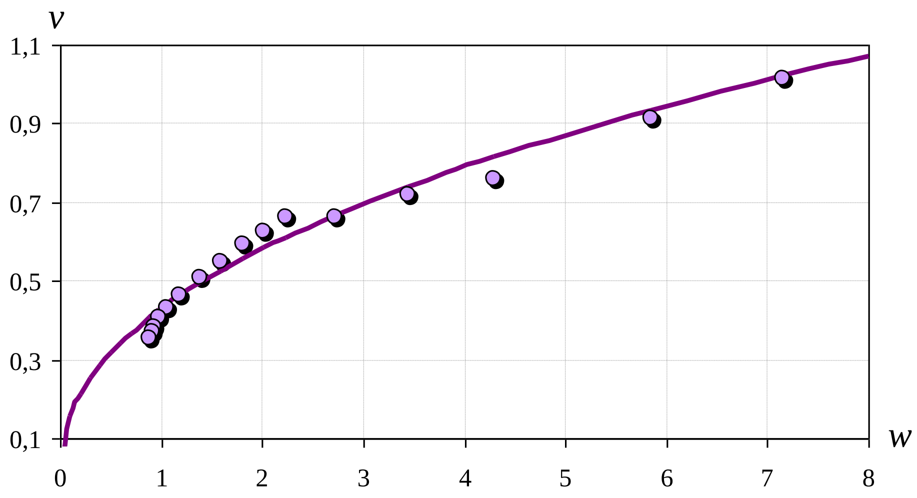


Рисунок 4.8 – График производственной функции региона и значения $(v, w,)$, построенные по статистическим данным УР и решению задачи моделирования человеческого капитала

Предельная норма замещения человеческого капитала производственными фондами, представленная на рисунке 4.9, рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{HK} = \frac{\partial Y/\partial H}{\partial Y/\partial K} = \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} w. \tag{4.2}$$

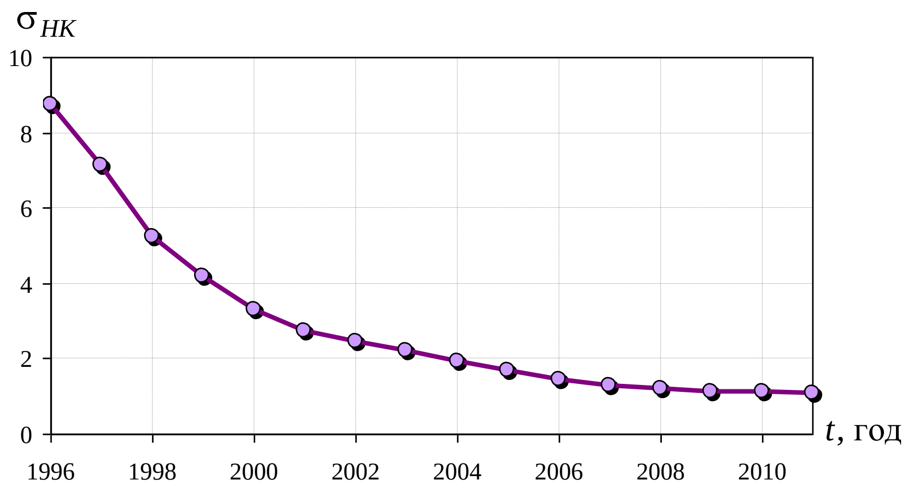


Рисунок 4.9 – Динамика предельной нормы замещения человеческого капитала производственными фондами за период 1996-2011 годы

Величина σ_{HK} определяет отношение приращений ресурсов, приводящих в отдельности к приращению одного и того же объема производства. Так, например, для 1996-го года $\sigma_{HK} = 8{,}7$, из чего следует, что для приращения производства одного и того же количества Y фактор K требует приращения в

8,7 раза большего, чем фактор H. За период 1996-2011 годы предельная норма замещения человеческого капитала производственными фондами уменьшилась в 8,1 раза. Поскольку на всем рассматриваемом периоде величина $\sigma_{HK} > 1$, то для изучаемой экономической системы региона наиболее выгодными являются инвестиции в человеческий капитал.

Для решения задачи идентификации было рассмотрено, что доли отчислений в федеральный и региональный бюджеты до 2005 года составляют $\rho^F = \rho^R = 0{,}5$, а с 2006 года – $\rho^F = 0{,}7$ и $\rho^R = 0{,}3$ [158].

В таблице 4.7 приведены результаты идентификации параметров модели экономической системы региона, используя данные таблицы 4.6 и формулы (2.1)-(2.10).

Таблица 4.7 – Результаты идентификации параметров модели региональной экономической системы УР за период 1996-2011 годы

A	α_1	α_2	η	$\bar{\varepsilon}$	χ	υ	ν	s_0	s_k	s_h	ω
0,42	0,44	0,56	0,133	0,580	0,065	0,366	0,194	0,645	0,240	0,115	0,753

В таблице 4.8 представлены расчетные значения макроэкономических показателей региона, полученные на основе подстановки значений из таблицы 4.7 в модель (2.2)-(2.8).

Таблица 4.8 – Расчетные данные макроэкономических показателей экономики УР в ценах 2011 года

Обозначение	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**
Y, млн. руб.	260 712,8	253 806,7	248 216,4	244 174,2	242 000,8	242 046,2	244 612,6
K, млн. руб.	1 857 248,7	1 574 616,1	1 343 885,2	1 159 722,9	1 016 872,6	910 154,7	834 466,1
H, млн. руб.	253 217,4	276 029,1	301 765,4	330 426,4	362 011,9	396 522,0	433 956,8
B, млн. руб.	0	0	0	0	0	0	0
I, млн. руб.	47 087,9	45 840,6	44 830,9	44 100,8	43 708,3	43 716,5	44 180,0
J, млн. руб.	22 529,8	21 933,0	21 449,9	21 100,6	20 912,8	20 916,7	21 138,5
C, млн. руб.	126 748,1	123 390,7	120 672,9	118 707,7	117 651,1	117 673,2	118 920,8
N^F, млн. руб.	25 262,5	24 593,4	24 051,7	23 660,0	23 449,4	23 453,8	23 702,5
N^R, млн. руб.	25 262,5	24 593,4	24 051,7	23 660,0	23 449,4	23 453,8	23 702,5
T, млн. руб.	9 255,2	9 010,0	8 811,6	8 668,1	8 590,9	8 592,5	8 683,6
D, млн. руб.	34 517,7	33 603,4	32 863,2	32 328,1	32 040,3	32 046,3	32 386,1
Дефлятор	1,15	1,19	1,72	1,38	1,16	1,16	1,14
L, тыс. чел.	809,6	792,1	772,4	810,2	809,0	799,8	821,2
P, тыс. чел.	1 612,6	1 607,7	1 604,0	1 601,4	1 595,6	1 588,1	1 578,2

Продолжение таблицы 4.8

Обозначение	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
Y, млн. руб.	249 875,3	257 821,5	268 225,0	280 657,2	294 519,5	309 078,1	323 483,6	336 768,5	347 813,4
K, млн. руб.	784 780,2	756 147,4	743 694,4	742 625,0	748 219,3	755 834,2	760 903,3	758 936,9	745 521,7
H, млн. руб.	474 316,2	517 600,1	563 808,7	612 941,9	664 999,7	719 982,2	777 889,2	838 720,8	902 477,1
B, млн. руб.	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I, млн. руб.	45 130,5	46 565,7	48 444,7	50 690,1	53 193,8	55 823,3	58 425,1	60 824,5	62 819,4
J, млн. руб.	21 593,3	22 279,9	23 179,0	24 253,3	25 451,2	26 709,3	27 954,2	29 102,2	30 056,7
C, млн. руб.	121 479,4	125 342,5	130 400,3	136 444,3	143 183,6	150 261,4	157 264,8	163 723,4	169 093,0
N^F, млн. руб.	24 212,4	24 982,4	25 990,5	38 073,2	39 953,7	41 928,7	43 882,9	45 685,1	47 183,4
N^R, млн. руб.	24 212,4	24 982,4	25 990,5	16 317,1	17 123,0	17 969,4	18 806,9	19 579,3	20 221,4
T, млн. руб.	8 870,5	9 152,6	9 521,9	5 977,9	6 273,2	6 583,3	6 890,1	7 173,1	7 408,3
D, млн. руб.	33 082,9	34 134,9	35 512,3	22 295,0	23 396,2	24 552,7	25 697,1	26 752,4	27 629,8
Дефлятор	1,2	1,19	1,15	1,14	1,18	1,02	1,12	1,16	1,00
L, тыс. чел.	809,6	798,0	821,0	843,0	835,6	841,0	852,0	842,1	842,1
P, тыс. чел.	1 568,2	1 560,3	1 552,8	1 544,4	1 537,9	1 532,7	1 528,5	1 526,1	1 520,4

В таблице 4.9 приведена средняя погрешность определения макроэкономических показателей экономики УР за период ретропрогноза, рассчитанная по формуле:

$$\Delta = \frac{1}{N}\sum\frac{\left|x^p - x^c\right|}{x^c}, \quad x = \{Y, K, H, I, J, N^F, N^R, T, D\}, \qquad (4.3)$$

где $N = 16$ – количество показателей за период ретропрогноза с 1996 по 2011 годы; x^c – статистические данные; x^p – расчетные значения.

Таблица 4.9 – Средняя погрешность определения макроэкономических показателей экономики УР за период ретропрогноза

Параметр	Y	K	H	I	J	N^F	N^R	T	D
Погрешность, ζ_y**, %**	7,14	4,80	6,56	9,18	9,75	10,69	9,24	9,44	8,85

Так, средняя погрешность отклонения ВРП за период 1996-2011 годы составила 7,14 %, производственного капитала – 4,80 %, человеческого капитала – 6,56 %.

4.2.2. Прогнозирование динамики экономической системы региона

Прогнозные расчетные значения макроэкономических показателей региона проведены на основе модели (2.1)-(2.10), используя результаты решения задачи идентификации, представленные в таблице 4.7. В таблицах 4.10 – 4.11 представлены результаты прогнозирования макроэкономических показателей экономики УР в абсолютных и удельных величинах соответственно, рассчитанные в ценах 2011 года, на период 2012-2018 годы. Здесь y^p – удельное значение ВРП в расчете на одного жителя региона, k^L – удельное значение производственного капитала в расчете на одного работающего (фондовооруженность труда), h^L – удельное значение человеческого капитала в расчете на одного работающего (капиталовооруженность труда), i^L – объемы удельных инвестиций в производственный капитал, j^L – объемы удельных инвестиций в человеческий капитал, c^p – удельное общественное потребление в системе, рассчитанное на одного жителя, d^p – удельные, в расчете на одного жителя, доходы регионального бюджета.

На рисунках 4.10-4.12 представлена динамка расчетных макроэкономических показателей региона с 1996 по 2018 годы. На рисунках 4.13 и 4.14 приведены кривые изменения соответствующих удельных показателей за этот же период.

Величина производственного капитала уменьшается (см. рисунок 4.10). Так, по сравнению с 1996 годом в 2011 году он уменьшился в 2,4 раза. Темп уменьшения составил в среднем 3,9 % в год. Производственный капитал в 2011 году составил величину 745 522 млн. руб. В прогнозном периоде, к 2018 году, капитал снизится до значения 613 237 млн. руб., рассчитанного в ценах 2011 года (ежегодное снижение в среднем составит 2,7 %).

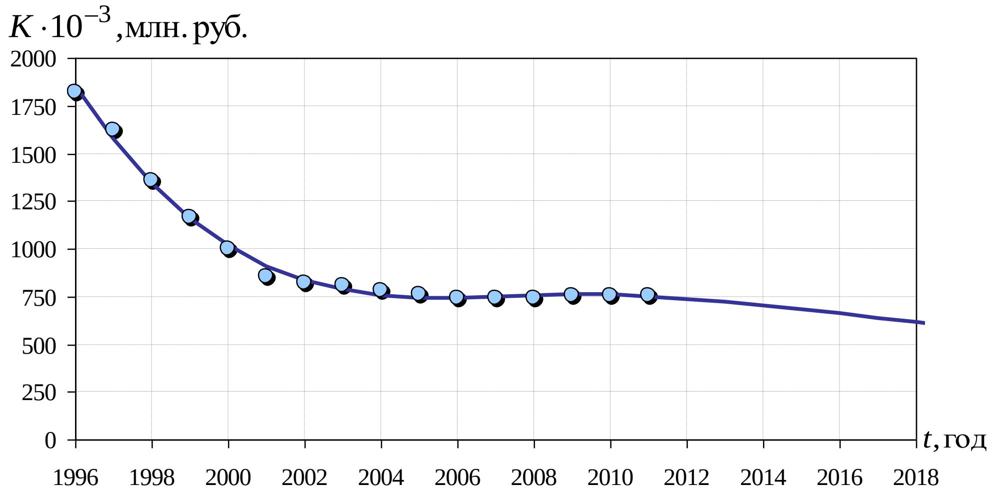


Рисунок 4.10 – Динамика производственного капитала
“– ”- расчетные данные; “ ● ” – статистические данные

Таблица 4.10 – Прогнозные значения абсолютных макроэкономических показателей экономики УР в ценах 2011 года

Обозначение	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**
Y, млн. руб.	355 220,0	360 742,7	366 109,3	370 438,4	373 722,8	375 963,4	377 168,9
K, млн. руб.	734 987,6	719 089,6	702 177,3	682 732,1	661 172,3	637 887,2	613 237,4
H, млн. руб.	948 705,0	993 306,8	1 040 401,2	1 087 581,9	1 134 577,2	1 181 118,9	1 226 944,4
B, млн. руб.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
I, млн. руб.	62 819,4	65 154,5	66 123,8	66 905,7	67 498,9	67 903,6	68 121,3
J, млн. руб.	30 056,7	31 174,0	31 637,8	32 011,9	32 295,7	32 489,3	32 593,5
C, млн. руб.	172 693,8	175 378,7	177 987,7	180 092,3	181 689,1	182 778,3	183 364,4
N^F, млн. руб.	48 188,1	48 937,3	49 665,4	50 252,6	50 698,2	51 002,1	51 165,7
N^R, млн. руб.	20 652,1	20 973,1	21 285,2	21 536,8	21 727,8	21 858,1	21 928,1
T, млн. руб.	7 566,1	7 683,7	7 798,0	7 890,2	7 960,2	8 007,9	8 033,6
D, млн. руб.	28 218,2	28 656,9	29 083,2	29 427,1	29 688,0	29 866,0	29 961,7
L, тыс. чел.	835,7	832,6	827,8	821,9	815,3	808,3	801,0
P, тыс. чел.	1 519,5	1 513,8	1 505,1	1 494,4	1 482,4	1 469,6	1 456,4

Таблица 4.11 – Прогнозные значения относительных макроэкономических показателей экономики УР в ценах 2011 года (тыс. руб./чел.)

Обозначение	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
y^p	233,8	238,3	243,2	247,9	252,1	255,8	259,0
k^L	879,5	863,7	848,2	830,7	811,0	789,2	765,6
h^L	1 135,2	1 193,0	1 256,8	1 323,3	1 391,6	1 461,3	1 531,7
i^L	75,2	78,3	79,9	81,4	82,8	84,0	85,0
j^L	36,0	37,4	38,2	38,9	39,6	40,2	40,7
c^p	113,7	115,9	118,3	120,5	122,6	124,4	125,9
d^p	18,6	18,9	19,3	19,7	20,0	20,3	20,6

За рассматриваемый период 1996-2011 годы величина человеческого капитала увеличилась в 3,6 раза (см. рисунок 4.11). К 2018 году прогнозируется рост человеческого капитала до величины 1 226 944 млн. руб.

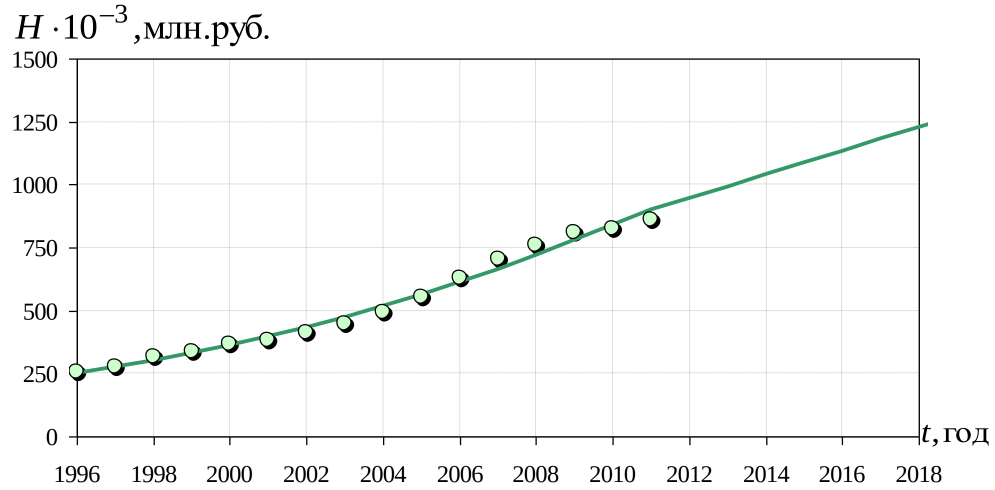


Рисунок 4.11 – Динамика человеческого капитала
“– ”- расчетные данные; “ ● ” – статистические данные

Расчеты показали (см. рисунок 4.12), что в перспективе до 2018-го года будет наблюдаться общая тенденция к росту ВРП.

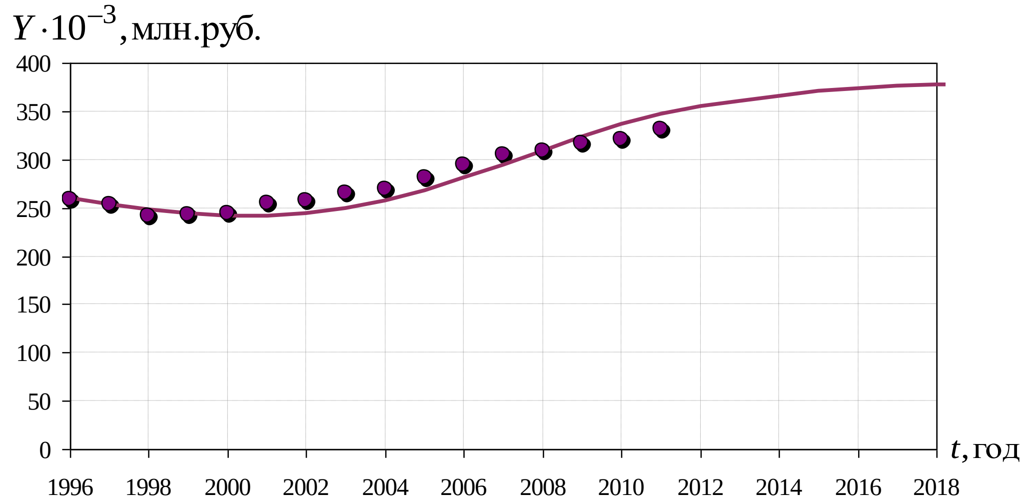


Рисунок 4.12 – Динамика валового регионального продукта:
“– ”- расчетные данные; “ ● ” – статистические данные

Динамика удельных показателей, представленных на рисунках 4.13-4.14, повторяет динамику абсолютных показателей экономической системы.

Наблюдается рост удельного значения ВРП за период 2012-2018 годы на 15,5 % (см. рисунок 4.13).

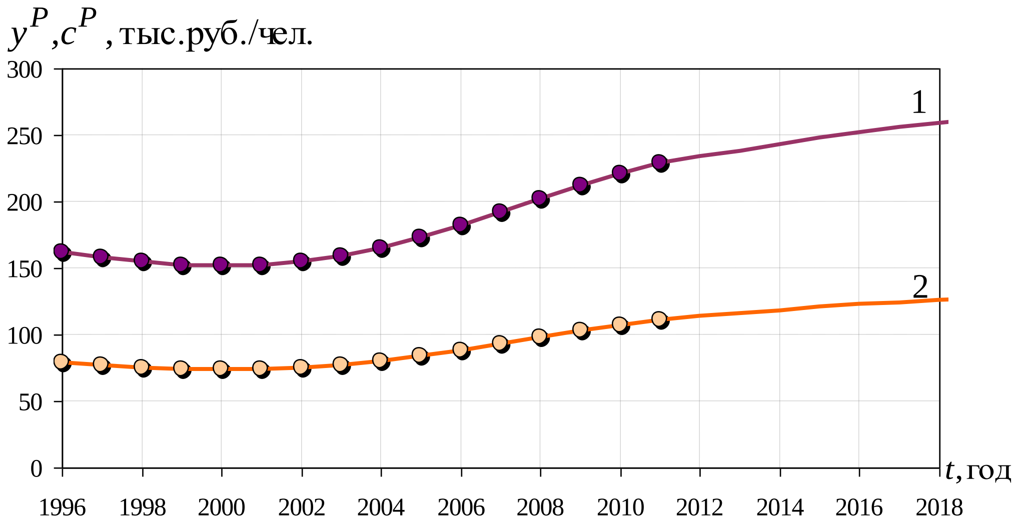


Рисунок 4.13 – Динамика удельных значений
валового регионального продукта (1) и общественного потребления (2)

Объем производственных фондов в расчете на одного работающего (см. рисунок 4.14) также снизится с 885 тыс. руб./чел. в 2011 году до 766 тыс. руб./чел. к 2018 году (на 13,4 %). Удельное значение человеческого капитала в расчете на одного работающего к 2018 году, по сравнению с 2011 годом, вырастет в 1,4 раза (см. рисунок 4.14).

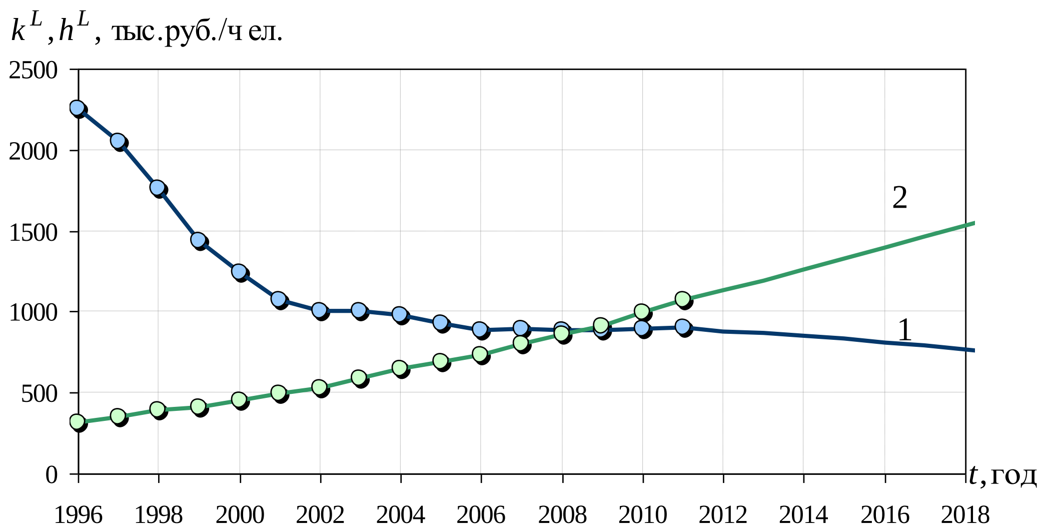


Рисунок 4.14 – Динамика фондовооруженности (1)
и капиталовооруженности (2) труда

4.2.3 Результаты решения задачи оптимального управления

Рассмотрим результаты решения задачи оптимального управления динамикой экономической системы на примере статистических данных по УР.

В качестве планового периода рассмотрим период с 2012 года до 2018 года ($t_0 = 2012$ год) и приведем динамику некоторых из основных макроэкономических показателей. Коэффициент дисконтирования δ принимался равным 0,05. Норма потребления $s_0 = 0{,}645$.

На рисунке 4.15 представлен выход экономической системы на траекторию сбалансированного роста. Расчеты показали, что выход на траекторию сбалансированного роста происходит почти через 7 лет. Изменение параметров управления инвестициями приведено на рисунке 4.16.

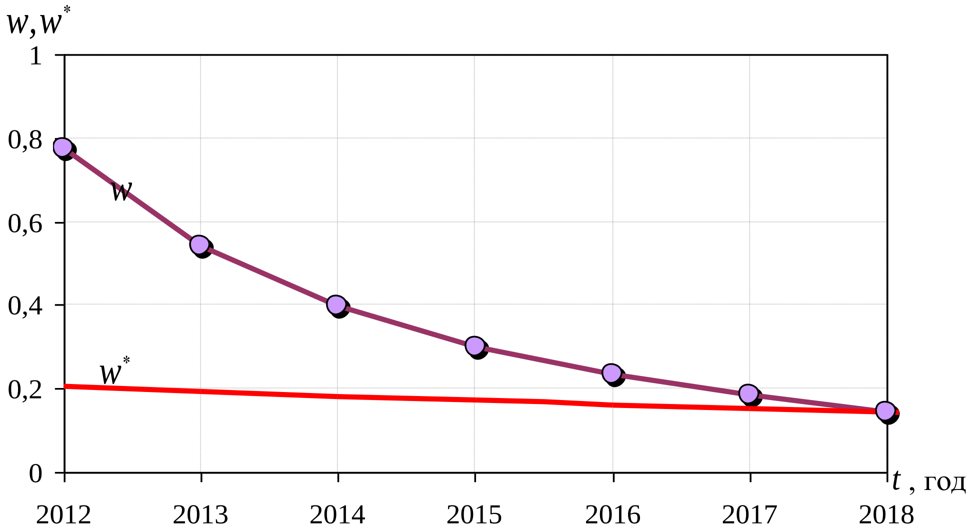


Рисунок 4.15 – Выход экономической системы
на траекторию сбалансированного роста ($s_0 = 0{,}645$):
w – оптимальная траектория движения экономической системы,
w* – траектория сбалансированного роста

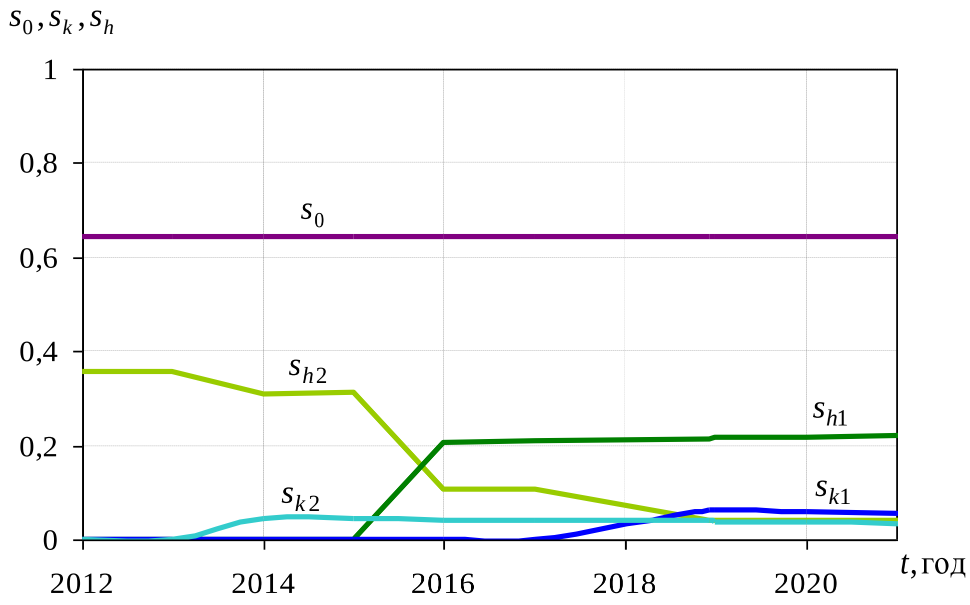


Рисунок 4.16 – Динамика изменения параметров управления инвестициями при $s_0 = 0{,}645$

На рисунках 4.17 и 4.18 представлены динамика удельных величин производственного и человеческого капитала соответственно при инерционном сценарии развития.

Ведущим фактором развития экономики УР является человеческий капитал. Так, за период 2012-2018 годы удельный производственный капитал уменьшается в 0,6 раза, что дает возможность увеличиться человеческому капиталу за этот же период в 3,4 раза. Таким образом, уменьшая вложения в производственный капитал, экономическая система наращивает свой потенциал за счет увеличения человеческого капитала. Такое положение в дальнейшем при движении по траектории сбалансированного роста, в конечном итоге, приведет к росту всех параметров экономики региона (в том числе и производственного капитала).

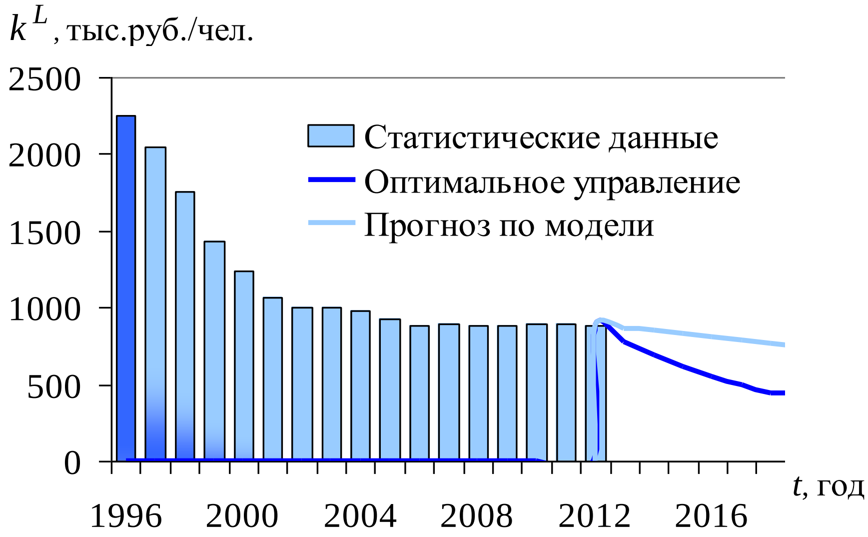


Рисунок 4.17 – Динамика удельной величины производственного капитала при оптимальном управлении с учетом инерционного сценария развития

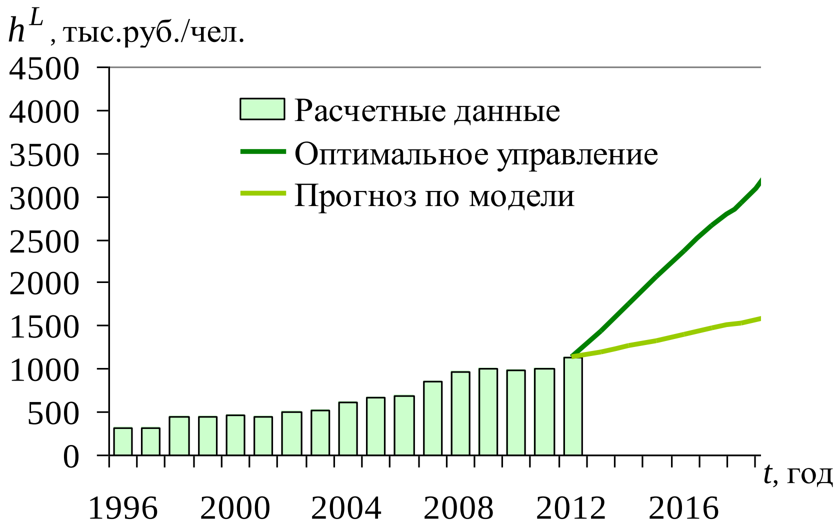


Рисунок 4.18 – Динамика удельной величины человеческого капитала при оптимальном управлении с учетом инерционного сценария развития

На рисунке 4.19 представлена динамика удельного общественного потребления в региональной экономической системе при оптимальном управлении.

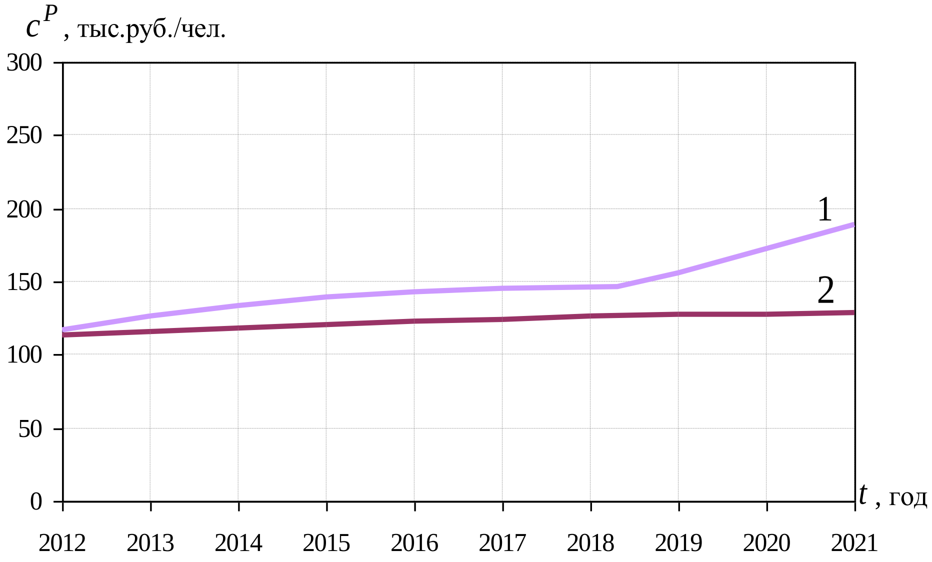


Рисунок 4.19 – Динамика удельного общественного потребления:
1 – оптимальное управление при инерционном сценарии развития;
2 – прогноз без оптимального управления

На рисунке 4.20 представлено изменение удельного значения ВРП (производительности труда) за период 2012-2018 годы. В конце периода при наличии оптимального управления в случае инерционного сценария развития экономики производительность труда увеличивается в 1,3 раза.

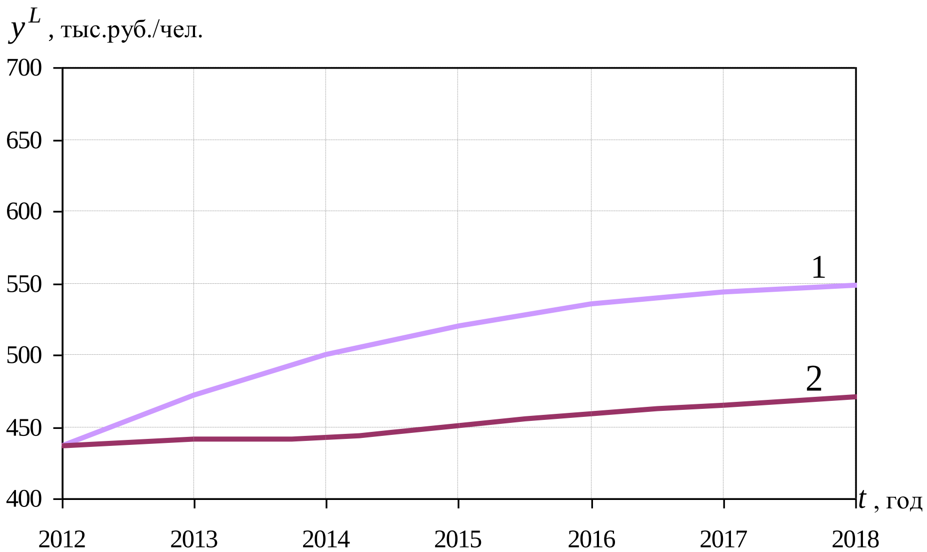


Рисунок 4.20 – Динамика производительности труда:
1 – оптимальное управление при инерционном сценарии развития;
2 – прогноз без оптимального управления

На рисунке 4.21 представлены графики удельного потребления, накопленного до момента t, в случае оптимального управления и его прогнозное значение при инерционном сценарии развития. Увеличение критериального функционала при оптимальном управлении ($s_0 = 0{,}645$) по сравнению с его прогнозным значением составило 1,3 раза.

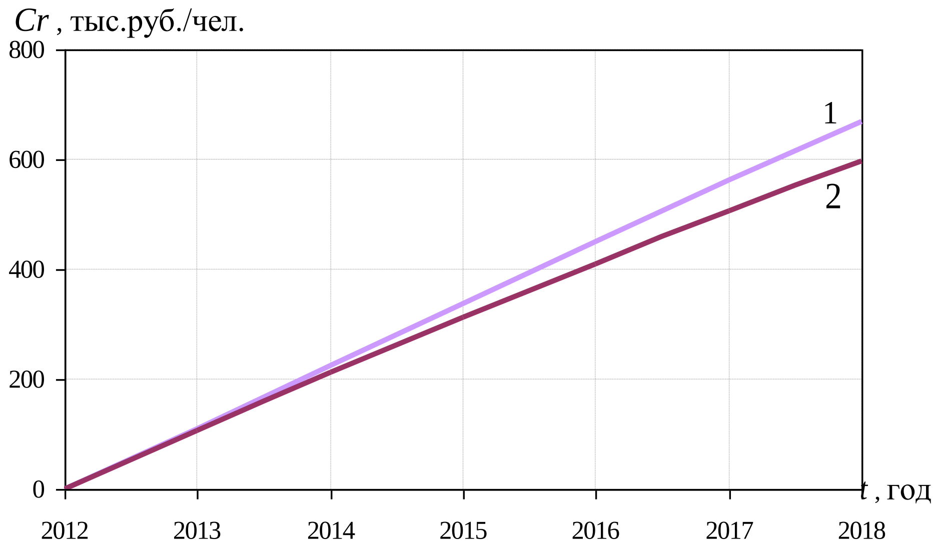


Рисунок 4.21 – Изменение накопленного удельного потребления
при инерционном сценарии развития:
1 – оптимальное управление; 2 – прогноз без оптимального управления

Таким образом, представленные на рисунках 4.16-4.20 графики являются решением задачи оптимального управления экономической системой региона при инерционном сценарии развития экономики при норме потребления $s_0 = 0{,}645$ для планового периода с 2012 года до 2018 года. На данном этапе развития региональной экономической системы приоритетным является развитие человеческого капитала региона. Это позволяет достичь скорейшего роста экономических показателей. Так, потребление за рассматриваемый период увеличивается на 26 %. А в случае отсутствия оптимального управления увеличение происходит на 13 %.

4.2.4. Результаты параметрических исследований задачи оптимального управления

Рассмотрим влияние изменения темпов научно-технического и социально-образовательного прогресса на развитие региональной экономической системы. Численные результаты этих показателей сведены в таблицу 4.12. Также в таблице 4.12 приведены результаты анализа влияния темпов научно-технического и социально-образовательного прогресса на развитие региональной экономической системы. Представлены варианты расчетов при:

I. прогнозировании динамики экономической системы;

II. решении задачи оптимального управления динамикой экономической системы для инерционного сценария ($\beta = \kappa = 0$);

III. проведении параметрических исследований:

а) при одинаковых темпах изменения научно-технического и социально-образовательного прогресса;

б) при увеличении темпа только научно-технического прогресса;

в) при увеличении темпа только социально-образовательного прогресса.

Таблица 4.12 – Результаты численных исследований при изучении экономической системы региона на период 2012-2018 годы

Варианты развития / Показатели	I Прогнозные значения	II Оптимальное управление	III Параметрические исследования		
			а) при одинаковых темпах изменения НТП и СОП	б) при увеличении темпа только НТП	в) при увеличении темпа только СОП
Темп НТП β	$\beta = 0$	$\beta = 0$	$\beta = 0{,}05$	$\beta = 0{,}05$	$\beta = 0$
Темп СОП κ	$\kappa = 0$	$\kappa = 0$	$\kappa = 0{,}05$	$\kappa = 0$	$\kappa = 0{,}05$
Время выхода на траекторию сбалансированного роста, лет	-	6,98	4,17	5,12	5,15
Изменение k^L за период 2012-2018 годы	уменьшение в 1,28 раза	уменьшение в 2,00 раза	уменьшение в 1,20 раза	уменьшение в 1,61 раза	уменьшение в 1,67 раза
Изменение h^L за период 2012-2018 годы	увеличение в 1,54 раза	увеличение в 2,59 раза	увеличение в 3,82 раза	увеличение в 4,18 раза	увеличение в 3,63 раза
Изменение c^P за период 2012-2018 годы	увеличение в 1,13 раза	увеличение в 1,26 раза	увеличение в 2,67 раза	увеличение в 2,57раза	увеличение в 2,61 раза
Значение критерия Cr на конец периода, тыс.руб./ чел.	596,75	668,49	798,11	745,24	719,47

Таким образом, при параметрическом исследовании моделировалось инновационное развитие экономической системы региона. Как показывают расчеты, большая отдача в экономику происходит от научно-технического прогресса. Но при этом нужно учесть, что научно-технический и социально-образовательный прогресс являются взаимосвязанными процессами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана математическая модель экономической системы региона с учетом научно-технического и социально-образовательного прогресса, которая включает демографическую структуру региона. На базе данной модели сформулирована задача оптимального управления экономической системой региона при инерционном и инновационном путях развития.

2. Построена математическая модель величины и динамики человеческого капитала экономической системы региона с учетом социально-образовательного и научно-технического прогресса, включающая в себя индивидуальные и бюджетные инвестиции. Особенностью модели является то, что она учитывает и количественную (демографическую структуру), и качественную составляющие человеческого капитала. По статистическим данным УР за период 1996-2011 годы получены численные значения человеческого капитала с учетом частных инвестиций. Расчеты показали, что за 15 лет величина человеческого капитал выросла в 3,4 раза.

3. На базе разработанной математической модели экономической системы региона с учетом научно-технического и социально-образовательного прогресса решена задача оптимального управления экономической системой региона при инерционном и инновационном путях развития.

- Анализ статистических данных УР за период 1996-2011 годы показал, что, несмотря на уменьшение объема производственного капитала в 2,4 раза, валовой региональный продукт вырос в 1,3 раза, это обусловлено ростом величины человеческого капитала (в 3,4 раза) и его ролью в развитии экономической системы.

- Прогноз параметров региональной экономической системы УР по макроэкономической модели показал, что при сохранении текущих темпов социально-экономического развития величина производственного капитала за период 2012-2018 годы уменьшиться в 1,3 раза, величина человеческого капитал увеличится в 1,5 раза; валовой региональный продукт возрастает в 1,2 раза, общественное потребление – в 1,1 раза.

- Стратегия оптимального управления при инерционном пути развития предусматривает уменьшение объема производственного капитала вплоть до 2019 года. Начиная с 2019 года, тенденция изменения производственного капитала меняется, и в дальнейшем его величина возрастает. Данная стратегия в итоге позволит достичь большего роста макроэкономических показателей региона. Так, производительность труда за период 2012-2018 годы увеличится почти в 1,5 раза, потребление – в 1,3 раза.
- Параметрические исследования инновационного пути развития показали, что научно-технический прогресс, по сравнению с социально-образовательным прогрессом, дает большую экономическую отдачу.

4. Разработан программно-вычислительный комплекс, включающий базу данных по демографическим и экономическим показателям УР, реализующий модели динамики основных факторов развития региона и алгоритм решения задачи оптимального управления экономической системой с учетом общей демографической динамики и динамики трудовых ресурсов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Распоряжение Правительства РФ от 7 февраля 2011 г. N 165-р “О Стратегии социально-экономического развития Приволжского федерального округа на период до 2020 г.” [электронный ресурс] / Информационно-правовой портал. – Режим доступа: http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/6648235.

2. Распоряжение Правительства РФ от 8 декабря 2011 г. № 2227-р “Об утверждении стратегии инновационного развития Российской Федерации до 2020 года” [электронный ресурс] / Официальный сайт Министерства связи и массовых коммуникаций. – Режим доступа: http://minsvyaz.ru/ru/doc/?id_4=685#doc_save.

3. Иванов В.И. Трудовые ресурсы и рост благосостояния народа.– Минск: Наука, 1987. – 117 с.

4. Иванов В.И. Население и глобализация.– М.: Наука, 2002.– 87 с.

5. Добрынин А. И., Дятлов С.А. Человеческий капитал в транзитивной экономике. – СПб.: Наука, 1999. – 305 с.

6. Дятлов С.А. Инвестиции в человеческий капитал: критерий эффективности // Известия СПбУЭФ. 1996 №4. 298 с.

7. Борисов Г.В. Инвестирование в человеческий капитал в условиях трансформирующейся экономики России. – СПб., 1998. 320 с.

8. Агабеков С.И. Инновационный человеческий капитал и эволюция социально – инновационной структуры России. – Москва, 2003.

9. Ильинский И.В. Инвестиции в будущее: образование в инвестиционном воспроизводстве. СПб.: СПбУЭФ, 1996. – 250 с.

10. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976.

11. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М., 1960. – 326 с.

12. Solow R. Technical change and the aggregate production function // Review of Economics and Statistics, v. 39, 1957. – Pp. 312 – 330 с.

13. Глазьев С. Ю. Экономическая теория технического развития. – М.: Наука, 1990. – 232 с.

14. Lucas R.E. On the mechanics of economic development // Journal of Monetary Economics, v. 22, 1988. – Pp. 3 – 42.

15. Lucas R.E. Making a miracle // Econometrica, v. 61, 1993. – Pp. 251 – 272.

16. Romer P. Increasing returns and long-run growth // Journal of Political economy, v. 94, 1986. – Pp. 1002 – 1037.

17. Петти У. Экономические и статистические работы. М.: Соцэкгиз, 1940. – 70 с.

18. Смит А. Исследование о природе и причинах богатства народов. В книге “Антология экономической классики”. Т.1. – М.: Эконов, 1993.

19. Аширова Г.Т. Современные проблемы оценки человеческого капитала / Г.Т. Аширова // Вопросы статистики. – 2003. – № 3. – с. 26-31.

20. Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения 2-е изд. - Т. 46. - М.: Политическая литература, 1960. – 805 с.

21. Беков Х.А. Российские проблемы с позиции теории человеческого капитала / Х.А. Беков // ЭКО: Экономика и организация промышленного производства. – 2008. – № 7. – с. 158-166.

22. Маршалл А. Принципы экономической науки: в 2 т./ пер. с англ. – М.: Прогресс, 1993. – т. 2.

23. Fisher Irving. “Senses of Capital”, Econ. J., VII (June, 1897), pp. 201-202.

24. Кочеткова А. Формирование человеческого капитала: (системно-концептуальный подход)/ А. Кочеткова // Alma Mater: Вестник высшей школы. - 2004. - N 11. - С. 17-21.

25. Корицкий А.В. Введение в теорию человеческого капитала. – Новосибирск: Изд-во СибУПК, 2000. – 112 с.

26. Критский М.М. Человеческий капитал. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1991.

27. Mill J. Principles of Political Economy. L, 1920, p.756.

28. Becker G.S. Human capital: A Theoretical and Empical Analisis with Special Reference to Education. N.Y., Columbia University Press, 1975. – p. 89.

29. Schultz T.W., Economic value of education, N.Y.- L., 1963. – p.148.

30. Bowen H.R. Investment in Learning. San Francisco, 1978. p. 362.

31. Thurow L. Greating Wealth. The New Rules for Individuals. Companies Countries in a Knowledge – Based Economy N.Y., 1999. p. 157.

32. Ben-Porath Y. the production of Human Capital and the life Cycle of Earning // Journal of Political Economy. 1987.

33. Денисон Э. Исследование различий в темпах экономического роста. М.: Прогресс, 1972.

34. Кендрик Дж. Совокупный капитал США и его функционирование. — М.: Прогресс, 1976.

35. Кендрик Дж. Экономический рост и формирование капитала. Вопросы экономики, 1976, № 11.

36. Добрынин А.И., Дятлов С.А., Цыренова Е.Д. Человеческий капитал в транзитивной экономике: формирование, оценка, эффективность использования. - СПб.: Наука, 1999.

37. Капелюшников Р.И. Записка об отечественном человеческом капитале / Р.И. Капелюшников. М., 2008.

38. Корицкий А. В. Введение в теорию человеческого капитала / А. В. Корицкий. – Новосибирск: Изд-во СибУПК. – 2000. – 112 с.

39. Курганский С. А. Человеческий капитал: сущность, структура, оценка / Курганский, С. А. – Иркутск: Изд-во ИГЭА, 1999. – 288 с.

40. Марцинкевич В.И. Экономика человека: учебное пособие / В.И.Марцинкевич, И.В. Соболева М. : Аспект-Пресс, 1995. – 364 с.

41. Форрестер Дж. Мировая динамика. – М.: Наука, 1978. – 368 с.

42. Бобылев С.Н. Развитие человеческого потенциала в России / С. Бобылев // Вестн. МГУ. Экономика. – 2005. – № 1. – С. 41-53.

43. Моисеев Н.Н. «Устойчивое развитие» или «стратегия переходного периода» // Экономика. Предпринимательство. Окружающая среда. – 1995. - № 1-2. – С. 30.

44. Тарасова Н. П., Кручина Е. Б., Судаков С. А. и др. Оценка вклада показателей в динамику комплексного показателя человеческого потенциала при формировании механизмов устойчивого развития экономических систем // Менеджмент в России и за рубежом. №2. 2009. С.17-28.

45. Староверов О.В. Азы математической демографии. М.: Наука, 1997. – 157 с.

46. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления / Р.Е. Калман // Труды I конгресса ИФАК / Изв. АН СССР. – М., 1961. – Т. 2. – 231 с.

47. Атанс М. Оптимальное управление / М. Атанс, П.Л. Фалб. – М. : Наука, 1968. – 764 с.

48. Ли Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. – М. : Наука, 1972. – 576 с.

49. Красовский Н.Н. Управление динамической системой / Н.Н. Красовский. М.: Наука, 1985. 520 с,

50. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

51. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем / Н.Н. Моисеев. – М. : Наука, 1975. – 420 с.

52. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем / А.А. Фельдбаум. – М. : Физматлит, 1963. – 552 с.

53. 11. Зубов В.И. Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М. : Физматлит, 1975. – 495 с.

54. Беленький В.З. Оптимальное управление: принцип максимума и динамическое программирование: учеб. Пособие. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 132 с.

55. Экономика предприятия и предпринимательство: Учебное пособие 2 издание/ под редакцией В. П. Грузинова.-М.: Юнити, Москва 2003.

56. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2011: Стат. сб. / Росстат. – М., 2011. – 990 с.

57. Ковалев В.В. Финансовый анализ: методы и процедуры. - М.: Финансы и статистика, 2002. - 559 с.

58. Ковалев В.В. Курс финансового менеджмента, учебник. Издательство: МарТ – 2008 – 376 с.

59. Савицкая Г.В. Анализ хозяйственной деятельности предприятия: учеб.пос. - Изд. 6-е, перераб. и доп.- Минск: Новое знание, 2001.–704 с.

60. Ушвицкий Л. И., Малеева А. В., Васильев Ю. В., Алексеева А. И. Комплексный экономический анализ хозяйственной деятельности. Учебное пособие. Издательство: Кнорус, 2009.

61. Берзон Н. Инвестиции предприятия в современных условиях. // Вопросы экономики.-2000.-июль.-С.114.

62. Шеремет А. Д. Анализ и диагностика финансово-хозяйственной деятельности предприятия. Учебник. Издательство: Инфра-М, 2009.

63. Экономика предприятия: Учебное пособие / В.С. Рыжиков, В.А. Панков, В.В. Ровенская, С.В. Рыжиков; Под ред. В.С. Рыжикова - Краматорск: ДГМА, 2003 – 267 с.

64. Закиров Р. Х. Экономическая эффективность капитальных вложений и производственных фондов / Р. Х. Закиров. – М.: Прогресс, 1976. – 210 с.

65. Твисс Б. Управление научно-техническими нововведениями / Б. Твисс. – М.: Экономика, 1989. – 115 с.

66. Бетехтина Е. Мировая практика формирования научно-технической политики / Е. Бетехтина, М. Пойсик. – Кишинев: 1990. – 231 с.

67. Оппенлендер К. Технический прогресс: воздействие, оценки, результаты / К. Оппенлендер. – М.: Экономика, 1981. – 176 с.

68. Царьков В. А. Экономическая динамика и эффективность капитальных вложений / В. А. Царьков. – М.: Издательство дома “Лексикон”, 1997. – 278 с.

69. Браун М. Теория и измерение технического прогресса / М. Браун. – М.: Статистика, 1971.

70. Калюжный В. Усовершенствованные и новые методы измерения влиятельности на рост ВВП // Экономика Украины. –2003. –№6. –С.42-48.

71. Измерение научно-технического прогресса предприятий и объединений промышленности. – Л.: Изд-во «Машиностроение», 1980.

72. Управление научно-техническим прогрессом / Под ред. Г.Х. Попова. – М.: Экономика, 1982.

73. Валдайцев С.В. Экономическое обоснование темпов научно-технического прогресса. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1984.

74. Лахтин Г.А. Экономика научного учреждения. – М.: Экономика, 1979.

75. Терехов Л. Л. Производственные функции. М.: Статистика, 1974. 128 с.

76. Багриновский К.А., Матюшок В.М. Экономико-математические методы и модели (макроэкономика): Учеб. Пособие. – М.: Изд-во РУДН, 1999. – 183 с.

77. Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И. Макроэкономика: Учебник. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Высшее образование, 2006. – 654 с.

78. Власов М. П. Моделирование экономических процессов / М. П. Власов, П. Д. Шимко. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. –409 с.

79. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику.– М.: Наука, 1984.– 293 с.

80. Solow R. Investment and Technical Progress//Mathematical Methods in the Social Sciences, Stanford, 1959.

81. Arrow K.Z. The economic implications of learning by doing. Review of Economic studies, v.39, p.155, 1962.

82. Чечурина М. Н. Анализ моделей научно-технического прогресса как фактора экономического развития / М. Н. Чечурина. – М.: Вестник МГТУ, 2005. – вып. 8. – № 2. – С. 338 – 347.

83. Shultz T. Investment in Human Capital. N.Y., London, 1971, p. 26-28.

84. Дятлов С. А. Инвестиции в человеческий капитал: критерий эффективности / С. А. Дятлов // Известия СПбУЭФ. – Сп.-б.: Изд-во СПбУЭФ. – 1996. – № 4. – С. 298.

85. Ильинский И.В. Инвестиции в будущее: образование в инвестиционном воспроизводстве. СПб.: СПбУЭФ, 1996. 250 с.

86. Капелюшников Р.И. Современные западные концепции формирования рабочей силы. – М.: Наука, 1981. – 210 с.

87. Полищук Е.А. Человеческий капитал в экономике современной России: проблемы формирования и реализации. – Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2005. – 184 с.

88. Schultz T. P. Investing in People. The Economics of Population Quality / T.P. Schultz. – Berkeley: University of California Press, 1981.

89. Schultz T. P. Economics of Population / T.P. Schultz. – Reading (Massachusetts): Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

90. Кетова К.В. Математические модели экономической динамики: монография. – Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2013. – 284 с.

91. Борисов Г. В. Инвестирование в человеческий капитал в условиях трансформирующейся экономики России / Г. В. Борисов. – СПб., 1998. – 320 с.

92. Фотеева Е. А. Качественные характеристики населения СССР / Е.А Фотеева. – М.: Финансы и статистика, 1984.

93. Фишер С. Экономика / С. Фишер, Р. Дорнбуш. – М.: Дело, 1993.

94. Дятлов С. А. Теория человеческого капитала / С. А. Дятлов // Учебное пособие. – СПб.: СПбУЭФ, 1992.

95. Нестерова В. Инвестиции в человеческий капитал / В. Нестерова. – М.: Аспект пресс, 2002. – 215 с.

96. Farr W. On the Economic Value of the Population / W. Farr // Population and Development Reviev. – № 27 (3). – 2001 [1877]. – P. 565–571.

97. Rice D. The economic Value of Human Life / D. Rice, B. Cooper // American Journal of Public Health. – № 57 (11). – 1967. – P. 1954–1966.

98. Mushkin S. Health as Investment / S. Mushkin // Journal of Political Economy. – № 70 (5). – 1962. – P. 129–157.

99. Макконелл К.Р. Брю С.Л. Экономикс: принципы, проблемы и политика. Т. 2. М.: Республика, 1992.

100. Галаева Е. В. Исследование человеческого капитала в зарубежной литературе / Е. В. Галаева // Общество и экономика. – 1997. – № 7. – С. 244-255.

101. Айвазян С.А. Анализ синтетических категорий качества жизни населения субъектов РФ: их измерение, динамика, основные тенденции / Айвазян С. А. // Уровень жизни населения регионов России. – 2002. – № 11.

102. Агабеков С. И. Инновационный человеческий капитал и эволюция социально - инновационной структуры России / С. И. Агабеков. – М.: Наука, 2003.

103. Mincer J. The Production of Human Capital and The Lifccyclc of Earnings: Variations on a Theme. – Working Paper of the NBER – 1994. – № 4838.

104. Mulligan C.B. X.Sala-i-Martin. Measuring Aggregate Human Capital. — Working Paper of the NBER – 1995. – № 50156.

105. Эренберг Р. Современная экономика труда. Теория и государственная политика / Р. Эренберг. – М.: Изд-во МГУ, 1996. – 198 с.

106. Акопян А. С. Эргодинамическая модель человека и человеческий капитал / А. С. Акопян, В. В. Бушуев, В. С. Голубев // Общественные науки и современность. – № 6. – 2002. – С. 98 – 106.

107. Русяк И.Г., Кетова К.В. Оценка и моделирование динамики человеческого капитала // III конференция “Медицинские, социальные и экономические проблемы сохранения здоровья населения” с международным участием, 21-28 мая 2007, Турция (Кемер) / Периодический научно-теоретический журнал “Современные наукоемкие технологии”. – М.: Изд-во Академии Естествознания. – № 9, 2007. – С. 56 – 58.

108. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. – М.: Изограф, 1997. – 223 с.

109. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Дело и сервис, 2001. – 365 с.

110. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика. – М.: Экономика, 1997. – 182 с.

111. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – М.: Гостехиздат, 1939.

112. Гранберг А.Г. Моделирование социалистической экономики. – М.: Экономика, 1988. – 486 с.

113. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства // учебное пособие для студентов ВУЗов, обучающихся по специальности “Экономическая кибернетика”. – М.: Экономика, 1985. – 240 с.

114. Багриновский К.А., Рубцов В.Н. Модели и методы прогнозирования и долгосрочного планирования народного хозяйства. – М.: Изд-во РУДН, 1992.

115. Багриновский К.А., Сумин Г.А. Математические методы в экономике и планировании народного хозяйства. – М.: Изд-во РУДН, 1993.

116. Имитационное моделирование экономических систем: Сб. ст. под ред. К.А. Багриновского. – М.: Наука, 1978. – 221 с.

117. Соколовский Л.Е. Модели оптимального функционирования предприятия. – М.: Наука, 1980. – 172 с.

118. Информационное моделирование экономической системы / Под ред. Е.Г. Ясина. – М.: Изд-во ЦЭМИ АН СССР, 1979.

119. Полтерович В.М. Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. – М.: Наука, 1990.

120. Полтерович В.М. Равновесные траектории экономического роста.//Методы функционального анализа в математической экономике. – М.: Наука, 1978.

121. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. – М.: Энергоатомиздат, 1996.

122. Петров А.А., Шананин А.А. Экономические механизмы и задача агрегирования модели межотраслевого баланса. //Математическое моделирование. 1993, т.5, № 9.

123. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анализ развивающейся экономики: к теории производственных функций // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, № 2, 1979. – С. 28–38.

124. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.

125. Макаров В.Л., Рубинов А.М, Левин М.И. Математические модели экономического взаимодействия. – М.: Наука-Физматлит, 1993.

126. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. – М.: Наука, 1973.

127. Макаров В.Л. Состояние равновесия сбалансированного роста в модели Неймана с функцией полезности // Оптимальное планирование. – Вып. 8. – Новосибирск: Наука, сиб. отд-ние, 1967. – С. 168 – 169.

128. Беленький В.З. Стационарные динамические модели управления экономическими системами / Дис… д-ра физ.-мат. наук. – М.: ЦЭМИ РАН, 1992.

129. Беленький В.З. Стационарные модели экономической динамики. – М.: Изд-во ЦЭМИ РАН, 1981.

130. Беленький В.З. Экономическая динамика: обобщающая “бюджетная” факторизация гейловской технологии // Экономика и математические методы. – 1990. – Вып. 1. – С. 165–177.

131. Беленький В.З. Объективные функционалы в стационарных моделях экономической динамики // Математический аппарат экономического моделирования. – М.: Изд-во ЦЭМИ РАН, 1983. – С.216–222.

132. Матвеенко В.Д. Структура оптимальных траекторий в моделях экономической динамики: Дис… д-ра физ.-мат. наук. – С-Пб, 2004.

133. Ramsey F.P. A mathematical theory of saving // Econ. Journ. – December 1928. – Pp. 543–559.

134. Cass D. Optimum saving in an Aggreativ Model of Capital Accumulation. – 1963.

135. Koopmans T.C. On the concept of optimal economic growth. – Ex Aedibvs Academicis in Civitate Vaticana, 1965. – Pp. 225–287.

136. Столерю Л. Равновесие и экономический рост. – М.: Статистика, 1974.– 472 с.

137. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975. – 605 с.

138. Алексеев В.М. и др. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 429 с.

139. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. – 408 с.

140. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. – М.: Наука, 1973. – 446 с.

141. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 191 с.

142. Тер-Крикоров А.М. Оптимальное управление и математическая экономика. – М.: Наука, 1977. –216 с.

143. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 495 с.

144. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский и др. – М.: Наука, 1983. – 392 с.

145. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова. – М.: Высш. шк., 1990. – 429 с.

146. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. – Т. 2. – М.: Наука, 1998.

147. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1961.

148. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. – М.: Наука, 1989. – 61 с.

149. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Иностранная литература, 1960.

150. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

151. Кетова К.В. Применение принципа оптимальности Беллмана к решению задачи оптимального экономического роста в стационарной постановке // Интеллектуальные системы в производстве – Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2004. – № 1. – С. 145 – 155.

152. Русяк И.Г., Кетова К.В. Математическое моделирование демографических показателей // Сб. статей “Интеллектуальные системы в производстве” – Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2002. – № 2. – С. 163 – 169.

153. Русяк И.Г., Кетова К.В. Постановка задачи управления демографоэкономическим состоянием региона // Материалы IV Междунар. науч.-техн. конф. “Информационные технологии в инновационных проектах”.– Ч. 2. – Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2003. – С. 62 – 64.

154. Русяк И.Г., Кетова К.В. К вопросу о выводе уравнения динамики возрастного состава // Периодический научно-теоретический журнал “Вестник ИжГТУ”: Изд-во ИжГТУ. – Ижевск, 2004. – № 2. – С. 49 – 52.

155. Российский статистический ежегодник: Стат. сб. Госкомстата России. – М.: Финансы и статистика, 2006.

156. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2003: Стат. сб. Госкомстат России. – М., 2003. – 895 с.

157. Удмуртия в цифрах [электронный ресурс] / Официальный сайт территориального органа федеральной службы государственной статистики по Удмуртской Республике – Режим доступа: http://udmstat.gks.ru.

158. Информационный сайт Госкомстата России [электронный ресурс] / Официальный сайт федеральной службы государственной статистики Российской Федерации. – Режим доступа: http: //www.gks.ru.

159. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2012: Стат. сб. – М.: Росстат, 2012. – 990 с.

160. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 352 с.

161. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 400 с.

162. Отчетность об исполнении консолидированного бюджета РФ , Министерство Финансов Российской Федерации [электроны ресурс] / Официальный сайт Федерального казначейства (Казначейство России) . – Режим доступа: http://www.roskazna.ru/reports/mb.html.