

Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи

Новиков Олег Олегович

**Низкоэнергетическая физика в моделях
вселенной на доменной стенке (бране)**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Андрианов Александр Андреевич

Санкт-Петербург – 2014

Содержание

Введение	4
Глава 1. Модели с дополнительными измерениями	10
1.1. Ранние модели	10
1.2. Основные сценарии миров на бране	12
1.3. Модели «толстых бран»	16
1.4. Локализация фермионов	19
1.5. Локализация калибровочных бозонов	21
Глава 2. Решения в виде бран в присутствии дефекта	24
2.1. Скалярный сектор модели	24
2.2. Решения в пределе выключенных гравитации и дефекта	29
2.3. Поправки к решениям в двухполевой модели	34
2.4. Выводы ко второй главе	38
Глава 3. Скалярные флуктуации	40
3.1. Скалярные флуктуации в модели без гравитации	40
3.2. Калибровочно-инвариантные скалярные флуктуации	44
3.3. Спектр флуктуаций в канале ϕ в фазе с $\langle H \rangle = 0$	51
3.4. Спектр флуктуаций в канале χ и скалярное состояние типа Хиггса	62
3.5. Выводы к третьей главе	69
Глава 4. Фермионный сектор	71
4.1. Локализация массивных фермионов на доменной стенке	71
4.2. Нарушение сохранения CP четности в модели с одним скалярным дублетом	75
4.3. CP-несохранение в модели с несколькими полями	79
4.4. Ограничения на параметры модели с одним дублетом	81

4.5. Выводы к четвертой главе	84
Заключение	86
Литература	90
Список иллюстраций	103

Введение

Актуальность темы исследования. В последние годы достаточно популярной стала гипотеза, что наша вселенная представляет собой четырехмерную пространственно-временную поверхность (3-брану), вложенную в фундаментальное многомерное пространство (см. обзоры [3, 5, 6, 44, 55, 59, 65, 68, 83, 106]). Она стала базой для многочисленных моделей физики за пределами Стандартной Модели, призванных ответить на ряд вопросов физики элементарных частиц, такие как проблема иерархии [27, 118], объяснение структуры фермионного сектора [28, 30], а также малости космологической постоянной [118]. Предполагается, что размер дополнительных измерений достаточно велик, и они могут, в принципе, проявить себя в наземных экспериментах ближайшего будущего и/или в астрофизических наблюдениях [29, 50, 52, 62, 83, 113].

Хотя брана часто рассматривается как элементарный геометрический объект нулевой толщины, существует не противоречащая альтернатива, предоставляемая эффективной многомерной теорией поля [5, 6, 15, 65, 73, 115, 120, 121, 125, 135]. В этом подходе брана является доменной стенкой, порождаемой фоновыми скалярными и/или гравитационными полями, когда их вакуумные конфигурации обладают нетривиальной топологией. Материя, взаимодействующая с этими фоновыми полями, локализуется в определенной окрестности доменной стенки, которая может быть охарактеризована некоторой ненулевой толщиной. По этой причине иногда употребляется название «толстая брана» («thick brane» или «fat brane»).

Подробное описание локализации материи на этих доменных стенках представляет особенный интерес, поскольку оно может как дать важный ключ к низкоэнергетической физике, так и установить связь с моделями фундаментальных бран, прояснить сущность предельного перехода к бране нулевой толщины. [16, 36, 48, 70, 90, 97, 100, 104, 108, 139]

Степень разработанности темы исследования.

Несколько неожиданным свойством моделей «толстых бран» оказывается то, что присутствие гравитации существенным образом меняет спектр локализованных скалярных состояний даже в пределе выключенной гравитации [23, 56, 58, 75, 81]. Влияние этих непертурбативных эффектов на спектр флуктуаций остается недостаточно понятой задачей.

Исходя из анализа соответствующего вклада в массовый оператор, который приведен в третьей главе основной части данной работы, оказывается целесообразным изучить влияние присутствия дефекта, явно нарушающего трансляционную симметрию. С более концептуальной точки зрения, введение подобного дефекта может быть мотивировано также тем, что образование доменной стенки в определенной точке дополнительного измерения со спонтанным нарушением трансляционной симметрии в квантовой теории оказывается не вполне физически самосогласованным. Влияние дефекта на формирование «толстых бран» изучалось ранее, но в моделях без гравитации [17].

С другой стороны, большое число работ [16, 28, 36, 48, 49, 70, 97, 100, 104, 108, 139] посвящено изучению фермионного сектора в моделях данного типа. Для феноменологически приемлемых моделей необходимо обеспечить нарушение сохранения CP -четности [114]. Единственный известный на сегодняшний день источник CP -нарушения в виде матриц смешивания Кабиббо-Кобаяши-Маскавы (СКМ) и Понтекорво-Маки-Накагавы-Сакаты (PMNS) может быть реализован различными способами. CP нарушающий механизм был ранее изучен в работах [43, 51, 111] за счет локализации компонент разной киральности в разных точках объемлющего пространства [30], но для реалистичных моделей этот механизм требует двух дополнительных измерений. В данной работе, мы концентрируемся на построении альтернативного механизма, обеспечивающего фермионы CP -нарушающей массовой матрицей, и его феноменологических последствиях.

Цели и задачи диссертационной работы: Целями данной диссертаци-

ционной работы являлось изучение влияния гравитации и наличия дефекта на образование доменной стенки (браны), а также исследование механизмов локализации скалярной и фермионной материи. Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

- Построение теории возмущений для нахождения фоновых решений в модели с двумя скалярными полями минимально взаимодействующими с гравитацией и тонкой браной, моделирующей дефект, на примере потенциала четвертого порядка с мягко нарушенной $O(2)$ -симметрией.
- Изучение спектра скалярных флуктуаций этой модели.
- Построение механизмов локализации фермионов, допускающих нарушение сохранения CP четности.

Научная новизна. В данной работе было подробно исследовано совместное влияние дефекта и гравитации на образование доменной стенки («толстой браны») и локализацию на ней скалярных состояний, в результате чего в случае отрицательного натяжения дефекта обнаружен принципиально новый механизм локализации, а также предложены новые механизмы локализации фермионов, реализующие CP -нарушение.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для построения расширений Стандартной Модели электрослабых, сильных и гравитационных взаимодействий в рамках концепции больших дополнительных измерений, а также для развития голографических методов, применимых в частности в теории сильных взаимодействий.

Методология и методы исследования. В работе активно используются методы суперсимметричной квантовой механики [20–22, 54, 98, 136], в частности для построения решений в пределе выключенных гравитации и дефекта, изучения спектра скалярных и фермионных состояний в этом же пределе.

Проблема нахождения поправок к решениям и профильным функциям локализованных состояний, а также массы состояния типа Хиггса была сведена к квантовомеханической теории возмущений.

Положения, выносимые на защиту:

1. По теории возмущений найдены фоновые решения и поправки к ним в модели с двумя скалярными полями, минимально взаимодействующими с гравитацией и тонкой браной, моделирующей дефект, с потенциалом четвертого порядка с мягко нарушенной $O(2)$ -симметрией
2. В этой же модели подробно изучен спектр скалярных флуктуаций в различных фазах и для различных значений натяжения тонкой браны-дефекта, включая расчет по теории возмущений массы массивного скалярного состояния типа Хиггса
3. Для отрицательного натяжения тонкой браны-дефекта обнаружен принципиально новый механизм локализации бесконечного дискретного спектра скалярных состояний в окрестности браны
4. Предложены механизмы локализации фермионных состояний, позволяющие реализовать в низкоэнергетической эффективной теории нарушение сохранения CP четности, и рассмотрены их экспериментальные следствия

Апробация результатов и публикации. Материалы диссертации опубликованы в 3 статьях в ведущих рецензируемых научных журналах [1, 2, 19]. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- 17th International Seminar on High Energy Physics Quarks-2012, Yaroslavl, Russia, 2012
- IV Международная конференция «Модели в квантовой теории поля» (МКТП-2012), посвященная А.Н.Васильеву, Санкт-Петербург, Россия

- XXI International Workshop High Energy Physics and Quantum Field Theory, Saint-Petersburg, Russia, 2013
- II Russian-Spanish Congress, Particle and Nuclear Physics at all Scales and Cosmology, Saint-Petersburg, Russia, 2013

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 103 страницы, из них 88 страницы текста, включая 5 рисунков. Библиография включает 140 наименований на 11 страницах.

Первая глава представляет собой краткий обзор литературы, связанной с темой диссертационного исследования. Рассматриваются базовые сценарии физики за пределами Стандартной Модели, основанные на идее мира на бране. Далее кратко изложены основные работы, посвященные формированию доменных стенок («толстых бран») в многомерных моделях. Также рассказано об известных механизмах локализации фермионных и векторных полей.

Вторая глава посвящена изучению классических фоновых решений в виде доменной стенки в модели со скалярной материей минимально взаимодействующей с гравитацией с учетом влияния дефекта, моделируемого жесткой фундаментальной браной. В разделе 2.1 приведена математическая формулировка изучаемой модели с двумя полями. Также сформулирован ее минимальный вариант с потенциалом четвертого порядка с мягко нарушенной $O(2)$ симметрией и его возможное обобщение на случай нескольких полей. Далее, в разделе 2.2 рассмотрены соответствующие двум фазам серии решений для минимальной модели в пределе выключенных гравитации и дефекта. Также

рассмотрен метод построения решений для ее обобщения на случай нескольких полей. Глава завершается разделом 2.3, который посвящен построению теории возмущений для классических фоновых решений и нахождению с ее помощью первых поправок по силе гравитационного взаимодействия, отклонению от критической точки и натяжению тонкой браны, моделирующей дефект.

В **третьей главе** рассматриваются флуктуации около полученных во второй главе решений в квадратичном приближении. Сначала, в разделе 3.1 для сравнения приведен спектр флуктуаций в минимальной модели без гравитации. Также указана нестабильность найденных нетривиальных решений в ее обобщении на случай нескольких полей. Раздел 3.2 посвящен выводу спектральных уравнений для произвольного потенциала в калибровочно-инвариантных переменных. Далее, в разделе 3.3 для минимальной модели подробно изучен спектр флуктуаций в канале поля, образующего кинк. Потенциал, учитывающий непертурбативные вклады, оказывается точно решаемым в пределе слабой гравитации, что позволяет найти спектр как в случае без дефекта, так и с учетом его влияния. Для отрицательного натяжения моделирующей дефект тонкой браны обнаруживается принципиально новый механизм локализации скалярных состояний. Наконец, в разделе 3.4 рассматривается легкое скалярное состояние, которое в механизме локализации фермионов играет роль бозона типа Хиггса. По теории возмущений рассчитывается его масса.

Четвертая глава посвящена CP -нарушению за счет механизма локализации фермионов на толстой бране. После краткого изложения в разделе 4.1 известного в литературе механизма локализации массивных фермионов в модели с двумя скалярными полями, в разделе 4.2 рассматривается его обобщение, допускающее CP -нарушение. Затем, в разделе 4.3 рассматривается обобщение данного механизма на случай двух скалярных дублетов. Наконец, в разделе 4.4 рассматриваются экспериментальные следствия данной модели и приведены некоторые ограничения на параметры.

В **заключении** суммируются основные результаты работы.

Глава 1

Модели с дополнительными измерениями

1.1. Ранние модели

Первые попытки построения моделей с дополнительными измерениями пространства-времени были предприняты уже в первые годы существования общей теории относительности. Нордстрём в рамках своей теории [112] и независимо от него Калуца в рамках ОТО [87] показали как пятимерный метрический тензор может быть разбит на тензорную, векторную и скалярную четырехмерные компоненты. Несколько позднее О.Клейн объяснил ненаблюдаемость дополнительного измерения на низких энергиях тем, что оно компактифицировано, т.е. свернуто в кольцо очень малого радиуса [94]. Импульс вдоль дополнительного измерения получает интерпретацию четырехмерной массы и любое многомерное поле с четырехмерной точки зрения при этом представляется в виде бесконечной башни состояний. Увы отождествление гравивекторов с электромагнитным полем оказывается невозможным из-за того, что это ведет к недопустимо большому взаимодействию с гравискаляром. Пятимерные же векторные поля обладают размерной константой связи $(e_5)^2 = R(e_4)^2$. Для пятимерного пространства естественная оценка $(e_5)^2 \sim 1/M_*$, где M_* - пятимерная масса Планка, означает, что и масштаб компактификации R должен быть сопоставим с масштабом Планка $1/M_*$ [55].

Позднее однако было осознано, что дополнительные измерения могут быть большими и даже бесконечными в том случае, если вся материя кроме гравитации сосредоточена в окрестности некоторой $(p + 1)$ -мерной поверхности, называемой p -браной (сокращение от «мембрана»). С одной стороны, брана может вводиться как фундаментальная поверхность нулевой толщины, на которой по построению идеально локализованы поля. С другой стороны, мы можем ввести

брану в виде доменной стенки, порожденной многомерными полями, обладающими вакуумной конфигурацией с нетривиальной топологией. При этом поля материи локализуются неидеально, т.е. брана обладает некоторой толщиной. По этой причине в литературе иногда встречается название «толстая брана» («thick brane» или «fat brane») в противоположность фундаментальным «тонким бранам» («thin brane»). Достаточно очевидно, что эти два подхода необязательно противоречат друг другу и возможно рассмотреть предел, в котором толстая брана эффективно ведет себя как тонкая. При этом динамическое образование браны оправдывает само ее существование и может ограничить получающуюся эффективную теорию поля. Примечательно, что ранние работы по этой теме [15, 73, 115, 120, 121, 135] рассматривали именно толстые браны.

Новый стимул для моделей с бранами дало развитие теории струн. В ходе так называемой «второй суперструнной революции» было обнаружено, что теория струн с необходимостью содержит протяженные объекты, называемые D -бранами, которые появляются в непертурбативном спектре и потому могут рассматриваться как аналоги солитонов квантовой теории поля. В пертурбативном описании они могут быть введены как фундаментальные браны, на которых закреплены концы открытых струн. Колебания закрепленных струн соответствуют в низкоэнергетическом пределе полям, локализованным на бране. [116] Даже если теория струн не является корректной фундаментальной теорией, она является богатой математической конструкцией, которая может найти широкое применение в других областях. В частности в ее рамках появилось предположение, на данный момент подтверждаемое вычислениями, о так называемом AdS/CFT соответствии, т.е. дуальности гравитационной теории в пространстве Анти-де-Ситтера со слабой связью и конформной теории поля меньшей размерности на конформной бесконечности этого пространства с сильной связью [13, 84, 107]. Эта предполагаемая дуальность реализует идею голографического принципа и позволяет применить результаты многомерных теорий поля к решению многих задач обычной физики. Основные надежды связаны прежде всего

с изучением КХД в режиме сильной связи. Данная работа посвящена моделям толстых бран как возможным расширениям Стандартной Модели, поэтому мы не будем исследовать их возможное применение в голографических задачах и ограничимся только упоминанием такой возможности.

1.2. Основные сценарии миров на бране

Результаты, упомянутые в предыдущем разделе, мотивировали рассмотрение ряда моделей с тонкими бранами. Первой из них стала предложенная Н.Аркини-Хамедом, С.Димопулосом и Г.Двали (ADD) [27]. Рассмотрим плоское пространство-время с 1 временным и $3 + n$ пространственными измерениями. n дополнительных измерений считаются компактифицированными. В этом пространстве рассматривается, протяженная поперечно компактифицированным измерениям $(3 + 1)$ -мерная брана. Вся материя предполагается локализованной на бране за исключением гравитации, которая свободно распространяется по всему объемлющему пространству.

Состояния гравитационного поля с разными значениями импульсов вдоль дополнительных измерений образуют башню Калуцы-Клейна. На больших расстояниях в гравитационном взаимодействии доминирует не зависящая от дополнительных измерений нуль-мода. Соответствующее эффективное действие легко получается интегрированием,

$$\frac{1}{M_*^{n+2}} \int d^{4+n}x \sqrt{|g^{(4+n)}|} R^{(4+n)} \simeq \frac{V_n}{M_*^{n+2}} \int d^4x \sqrt{|g^{(4)}|} R^{(4)}, \quad (1.1)$$

где M_* - многомерный масса Планка, а V_n - объем компактифицированного пространства. Если обозначить характерный масштаб компактификации через R , мы получаем следующую оценку для четырехмерной массы Планка,

$$M_{Pl} \simeq M_* (M_* R)^{\frac{n}{2}} \quad (1.2)$$

Если считать, что масштаб компактификации R намного больше $1/M_*$, наблюдаемая четырехмерная масса Планка может быть очень большой. В действи-

тельности, многомерный масштаб Планка может быть сравним с масштабом нарушения электрослабого взаимодействия, к примеру $M_* \sim 30TeV$ для $n = 2$ и $R \sim 1 - 10\mu m$. [6]

На коротких расстояниях сравнимых с R начинают играть роль старшие моды Калуцы-Клейна, что ведет к отклонению от закона Ньютона. Эти отклонения могут быть выявлены в астрономических наблюдениях и экспериментах с крутильными весами [12]. Кроме того, в ускорительных экспериментах на энергиях достаточно больших в сравнении с M_* эта модель предсказывает богатую феноменологию, обусловленную рождением Калуца-Клейновских гравитонов и проявлением иных гравитационных эффектов, таких как рождение микроскопических черных дыр [24, 52, 69, 74, 77, 92, 105, 113, 130]. Учет флуктуаций самой браны ведет к появлению новых частиц - бранонов, которые также могут проявить себя в экспериментах на коллайдере [50]. Дополнительные ограничения следуют из космологических соображений и астрофизических наблюдений [29, 67, 89].

Другие два популярных сценария были предложены Л.Рэнделл и Р.Сундрумом [117, 118]. Объемлющее пространство в них предполагается искривленным, а именно, имеющим геометрию типа Анти-де-Ситтера. Модель первого типа RSI формулируется на 5-мерном орбифолде, т.е. на компактифицированном пространстве $y \in [-y_b, y_b]$ с отождествленными точками $y \leftrightarrow -y$. Орбифолд наделяется метрикой $g_{AB}(x, y) = g_{AB}(x, -y)$, а на его концах $y = 0, y_b$ размещены две браны.

Действие для такой модели, если считать обе браны тонкими и пренебречь локализованной на них материей за исключением натяжения, записывается в следующем виде,

$$S_{RSI} = - \int d^4x \int_{-y_b}^{+y_b} \sqrt{|g^{(5)}|} \left(\frac{M_*^3}{2} R^{(5)} + \Lambda_c \right) + \\ - \int d^4x \sqrt{|g^{(4)}|} \lambda_0|_{y=0} - \int d^4x \sqrt{|g^{(4)}|} \lambda_b|_{y=y_b}, \quad (1.3)$$

Где $\Lambda_c < 0$. Согласованное решение имеет следующий вид,

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad k = \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6M_*^3}}, \quad \lambda_0 = -\lambda_b = 6kM_*^3 \quad (1.4)$$

где мы выбрали брану на конце $y = 0$ имеющей положительное натяжение, а брану на конце $y = y_b$ имеющей отрицательное натяжение. При переходе к четырехмерной теории четырехмерная космологическая константа для обеих бран оказывается одинаковой. Она складывается из отрицательного вклада отрицательной космологической константы объемлющего пространства Λ_5 и положительного вклада от натяжения браны,

$$\frac{\Lambda}{M_{Pl}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_c}{M_*^3} + 6k^2 \right) \ll k^2 = \frac{\lambda_0^2}{36M_*^3}, \quad (1.5)$$

например равна нулю, если $|\lambda_{0,b}| = \sqrt{-6\Lambda_c M_*^3}$. Таким образом, в этой модели существует механизм, позволяющий сделать космологическую константу малой.

Гравитационная нуль-мода для этой модели принимает следующий вид,

$$e^{-2k|y|} \left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \right) dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (1.6)$$

Таким образом, безмассовые гравитоны оказываются сосредоточены вблизи от браны на конце $y = 0$ (называемой Планковской). Это ведет к тому, что гравитация на второй бране на конце $y = \lambda_b$ оказывается тем слабее, чем больше расстояние между бранами.

Этот факт можно попытаться использовать для решения проблемы иерархии масс, не прибегая к суперсимметрии [118]. Рассмотрим модель Хиггса на бране,

$$S_0 = \int d^4x \left(\eta^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda_4 (H^\dagger H - v^2)^2 \right), \quad (1.7)$$

Без суперсимметрии и точной подстройки затравочные константы получают квадратно-расходящиеся вклады, в частности для вакуумного среднего,

$$\langle H^\dagger H \rangle \simeq \int_{|p| < \Lambda} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \sim \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \quad (1.8)$$

Что для $\Lambda \sim M_{Pl}$ означает, что естественно ожидать, что все массы будут порядка массы Планка. Решение, предлагаемое Рандалл и Сундрумом состоит в том, что соответствующие вклады ожидаются для теории, размещенной на Планковской бране (т.е. на конце $y = 0$). При переходе же на другую брану (т.е. на конце $y = y_b$) мы получаем следующий масштабный фактор,

$$\begin{aligned} S_0 &= \int d^4x e^{-4ky_b} \left(e^{2ky_b} \eta^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda_4 (H^\dagger H - v^2)^2 \right) = \\ &= \int d^4x \left(\eta^{\mu\nu} D_\mu \tilde{H}^\dagger D_\nu \tilde{H} - \lambda_4 (\tilde{H}^\dagger \tilde{H} - e^{-2ky_b} v^2)^2 \right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

Т.е. на второй бране (на которой и предполагается разместить наблюдаемую вселенную) массы оказываются подавленными фактором e^{-ky_b} . Для $ky_b \simeq 50$ этого достаточно, чтобы понизить характерный масштаб до $1TeV$.

Проблема этой модели состоит в том, что расстояние между бранами в принципе является динамической величиной. Соответствующая флуктуационная мода - радион, оказывается безмассовой, с плоским потенциалом. По этой причине модель должна быть снабжена некоторым дополнительным механизмом стабилизации. Его можно ввести самосогласованным образом, если предположить существование в объемлющем пространстве некоторого скалярного поля с нелинейным взаимодействием [25, 42, 58, 80, 82, 109, 110], что сближает данный класс моделей с моделями толстых бран.

Модель второго типа RSII содержит только одну брану в некомпактном пятимерном пространстве и может быть получена из RSI, если устремить расстояние между бранами к бесконечности $y_b \rightarrow \infty$, считая что наша вселенная расположена на бране с положительным натяжением (т.е. Планковской бране) [117]. При этом мы отказываемся от предложенного выше механизма решения проблемы иерархии. Именно этот сценарий будет реализован в пределе тонкой браны в моделях, рассматриваемых в данной работе.

Гравитация в такой модели имеет локализованную около браны нуль-моду и непрерывный спектр нелокализованных массивных состояний, не отделенные

массовой щелью. В результате закон Ньютона получает поправки,

$$V(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2 k^2} \right) \quad (1.10)$$

Четырехмерная масса Планка M_P оказывается связана с пятимерной M_* следующим соотношением,

$$M_*^3 = k M_P^2, \quad (1.11)$$

Для допустимых значений $k > 0.004 eV$ [12] оно дает $M_* > 10^8 GeV$, что намного превышает энергии, достижимые в современных ускорительных экспериментах.

1.3. Модели «толстых бран»

Рассмотрим теперь основные походы к моделям с «толстой браной». Хороший обзор по данной теме может быть найден в [65] и данный раздел будет преимущественно кратким изложением этой работы, дополненным ссылками на некоторые свежие работы.

Простейший пример полевой конфигурации, допускающей локализацию на ней материи был рассмотрен в [120]. Рассмотрим в пятимерном пространстве-времени вещественное скалярное поле ϕ с лагранжианом,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_A \phi \partial^A \phi - V(\phi), \quad (1.12)$$

где потенциал выбран в виде

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2. \quad (1.13)$$

Классические уравнения движения допускают следующее решение, зависящее только от пятой координаты y ,

$$\phi = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left(\frac{my}{\sqrt{2}} \right). \quad (1.14)$$

Данная полевая конфигурация называется кинком и на бесконечности стремится к разным минимумам потенциала V . За счет взаимодействия другие поля

могут локализовываться в окрестности перескока в $y = 0$ (см. Рис 1.1). К такой материи относятся в том числе и локализованные флуктуации полей, образующих брану. В частности в теории без гравитации в спектре флуктуаций ϕ присутствует безмассовая мода Гольдстоуна.

Рассмотрим теперь общий случай с минимальным взаимодействием с гравитацией [8, 46],

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left(-R + \partial_A \phi \partial^A \phi - 2V(\phi) \right) \quad (1.15)$$

Будем рассматривать в нем решения, которые не нарушают четырехмерную Пуанкаре-инвариантность и возьмем следующий анзац для метрики,

$$ds^2 = a(y)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (1.16)$$

уравнения движения тогда запишутся в виде,

$$6 \frac{(a')^2}{a^2} - 6 \frac{K}{a^2} = \frac{1}{2} (\phi')^2 - V, \quad (1.17)$$

$$3 \frac{a''}{a} + 3 \frac{(a')^2}{a^2} - 3 \frac{K}{a^2} = -\frac{1}{2} (\phi')^2 - V, \quad (1.18)$$

$$\phi'' + 4 \frac{a'}{a} \phi' - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (1.19)$$

Частый подход состоит в том, чтобы ввести вспомогательную функцию W , которая носит название суперпотенциала [37, 57, 58, 81, 123, 124],

$$V = -6W^2 + \frac{9}{2\gamma^2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2, \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{K}{a^2 W^2}} \quad (1.20)$$

Уравнения движения тогда принимают следующий вид,

$$\phi' = \frac{3}{\gamma} \frac{dW}{d\phi}, \quad \frac{a'}{a} = -\gamma W(\phi), \quad (1.21)$$

Если суперпотенциал найден, решения могут быть получены интегрированием уравнений. Данный метод обобщается и на случай нескольких полей. В других работах [14, 95, 131] считают потенциал V неизвестным и отталкиваются от известной части решения: либо от заданного метрического фактора, либо от заданного профиля скалярного поля.

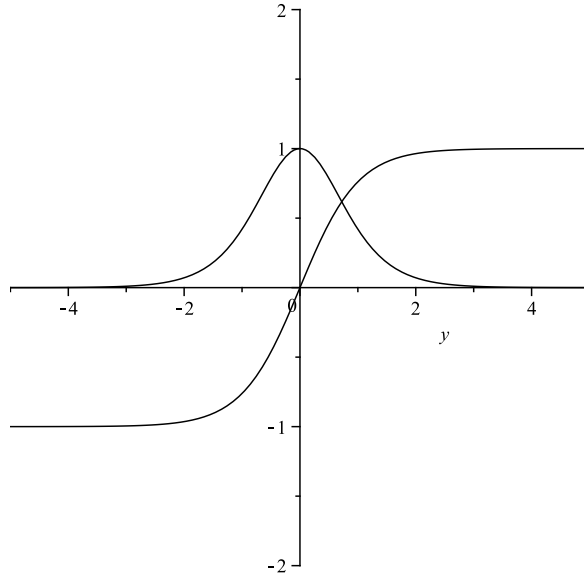


Рис. 1.1. Простейший кинк и локализованная около него полевая конфигурация

Значительная часть работ посвящена изучению решений в более сложных моделях. Основные рассматриваемые модификации можно классифицировать следующим образом:

- модели с кинетическими членами общего вида (K -полями) [10, 11, 39, 40, 103, 140],

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{2}R + \mathcal{L}(\phi, K) \right), \quad K = \frac{1}{2} \partial_A \phi \partial^A \phi, \quad (1.22)$$

- модели со скалярным полем, неминимально связанным с гравитацией [41, 79, 102],

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left(f(\phi)R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \right) \quad (1.23)$$

Особо стоит выделить работы, в которых скалярные поля имеют геометрическую интерпретацию, как в моделях Вейлевской гравитации [26, 33, 34].

- модели с фантомным полем (т.е. имеющим нарушающее сильное энергетическое условие знак кинетического члена) [78, 79, 96],

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left(-R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \right) \quad (1.24)$$

- модели с «таххионным полем» [71, 138]

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left(-R + 2\Lambda - V(T) \sqrt{1 - g^{MN} \partial_M T \partial_N T} \right) \quad (1.25)$$

Многие работы посвящены попыткам построить реалистичные модели, использующие солитоны, обнаруженные в теории суперпроводников, а именно вихри Абрикосова-Нильсена-Ольсена [28, 66, 76, 101, 119] и доменные стенки Блоха [38].

1.4. Локализация фермионов

Простой механизм локализации фермионов на доменной стенке был предложен Рубаковым-Шапошниковым [120]. Если поле Φ образует кинк, на бесконечности стремящийся к M , для этого достаточно рассмотреть взаимодействие типа Юкавы пятимерных фермиона с этим полем,

$$\mathcal{L}_f = \bar{\Psi} \left[i\gamma^A \partial_A + \Phi(y) \right] \Psi \quad (1.26)$$

Начиная с M спектр становится непрерывным. Соответствующие состояния оказываются рассредоточенными по всему пятимерному пространству. Спектр содержит нуль-моду определенной киральности,

$$\psi_{L(R)}^{(0)} \sim f(y) = \exp \left(\mp \int \Phi(y) dy \right), \quad (1.27)$$

В зависимости от конфигурации поля Φ также могут существовать и массивные локализованные состояния, однако они оказываются тяжелыми, с массами сравнимыми по порядку с M . Для построения легкого локализованного состояния, таким образом, требуется два фермионных поля Ψ_1 и Ψ_2 , которые имеют в качестве нуль-мод разные киральные компоненты $\psi_L^{(0)} \sim f_L(y)$ и $\psi_R^{(0)} \sim f_R(y)$. Затем их следует смешать, например за счет взаимодействия с некоторым скалярным полем H , получив четырехмерную массу,

$$m_f \simeq \int dy f_R(y) H(y) f_L(y), \quad (1.28)$$

Конкретные предсказания зависят от выбора фоновых полей, образующих «толстую брану» [16, 28, 36, 48, 49, 70, 97, 100, 104, 108, 139]. Данный механизм будет подробно рассмотрен в разделе 4.1.

Локализация фермионов именно на толстой бране в принципе может решить следующую проблему, присущую моделям вселенной на тонкой бране. Высокоэнергетическая физика в принципе может нарушать низкэнергетические симметрии (разумеется за исключением калибровочных). В частности, распространенным является мнение, что квантовая гравитация нарушает любую некалибровочную симметрию. [86]. Таким образом, сохранение барионного числа, являющееся в Стандартной Модели следствием случайной глобальной симметрии, почти наверняка нарушается в эффективной теории вкладом неперенормируемых операторов, в частности $QQQL$, что ведет к распаду протона. Обычно, если новая физика появляется только на очень больших масштабах, например на масштабе Великого Объединения $M_{GUT} \sim 10^{16} GeV$ или даже на Планковском $M_{Pl} \sim 10^{19} GeV$, это не представляет проблемы, поскольку нарушающие сохранение барионного числа операторы подавлены этим большим масштабом.

Проблема моделей мира на бране состоит в том, что масштаб квантовой гравитации заменяется многомерной постоянной Планка M_* . Она в принципе может, а часто из феноменологических интересов и считается довольно малой. Как следствие, это потенциально ведет к неприемлемо быстрому распаду протона. [5, 55]

Н.Аркани-Хамедом и М.Шмальтцом было предложено следующее решение этой проблемы – модель разделенных фермионов (split fermions) [30]. Они предлагают локализовать разные типы фермионов в разных точках дополнительного измерения, что можно сделать например присвоив пятимерным фермионным полям некоторую массу, разную для разных ароматов,

$$\mathcal{L}_f = \sum_{ik} \bar{\Psi}_k \left[i\gamma^A \partial_A + \Phi(y) - m_k \right] \Psi_k \quad (1.29)$$

Если приближенно считать $\Phi(y) \simeq My$ киральная нуль-мода оказывается локализована в окрестности $x^5 \simeq \frac{m_k}{M}$. За счет экспоненциального убывания волновых функций, разные фермионы могут очень слабо перекрываться, даже если массы соответствующих пятимерных полей остаются одного порядка величины. С одной стороны, это ведет к тому, что опасные операторы оказываются экспоненциально подавлены. С другой стороны, к значениям пятимерных масс m_k оказывается очень чувствительна четырехмерная масса (1.28), что может объяснить наблюдаемую иерархию масс фермионов.

Локализация разных киральных компонент в разных точках объемлющего пространства может ввести в модель нарушение сохранения CP -четности. Данный механизм рассматривался в работах [43, 51, 111]. Для построения этим способом феноменологически приемлемых моделей приходится использовать два дополнительных измерения.

1.5. Локализация калибровочных бозонов

В сравнении с локализацией фермионных и скалярных полей на доменной стенке задача локализации на ней калибровочных полей оказывается весьма нетривиальной. Это весьма удручающий факт, поскольку калибровочные поля являются одним из главных компонентов современной Стандартной Модели физики элементарных частиц. В связи с этим, любая модель, не учитывающая их существование, может рассматриваться только как «игрушечная», решающая только отдельные феноменологические вопросы.

Причина, по которой обычный подход буксует для калибровочных полей заключается в следующем [5, 61]. Предположим, что калибровочное поле также образует нуль-моду, локализованную в окрестности толстой браны. Тогда эффективная константа взаимодействия этой нуль-моды с локализованными состояниями например фермионов будет определяться следующим интегралом

произведения соответствующих профильных функций,

$$\int dy \Psi_0^\dagger(y) A_0(y) \Psi_0(y) \quad (1.30)$$

Проблема состоит в том, что разные фермионы обладают различными профилями и в принципе нет никаких оснований, что получающаяся константа связи является универсальной для всех типов фермионов. В то же время доказано, что неабелевые калибровочные поля требуют универсальной константы связи. Это подразумевает, что нуль-мода должна быть постоянной (при этом она может быть нормализуемой с учетом геометрии объемлющего пространства [60, 91, 126]) Однако, такие делокализованные полевые конфигурации не могут быть порождены локализованными источниками, и в работах [132, 133] были приведены аргументы, что если непрерывный спектр состояний отделен массовой щелью, появляются не устранимые перенормировкой расходимости. С другой стороны, модели без массовой щели, судя по всему, свободны от этих патологий [60, 93].

Самая успешная идея механизма, обеспечивающего локализацию калибровочных полей за счет средств теории поля, была предложена в работе [64]. Она заключается в предположении, что калибровочное поле в объемлющем пространстве находится в фазе конфайнмента, в то время как на бране оно конфайнмента не имеет. Если вынести заряд за пределы браны, поле оказывается ограничено в некоторую трубку, связывающую этот заряд с браной. Таким образом, появляется дополнительная связь с браной, которая может обеспечивать локализацию на ней частиц, несущих калибровочный заряд. Этот механизм можно моделировать, если ввести зависимость константы связи калибровочного взаимодействия от положения относительно браны, например через зависимость от образующего доменную стенку поля. [88]

С помощью данного механизма в теорию поля вводятся объекты в виде бран, к которым оказываются прикреплены протяженные объекты в виде струн. Таким образом прослеживается аналогия с теорией струн, в которой фигури-

руют D -браны, на которых оказываются закреплены концы открытых струн [63, 127, 128, 134]. В суперсимметричных моделях удастся построить элементарные доменные стенки с локализованными на них $U(1)$ векторными полями, а поля с неабелевой калибровочной группой локализуются на составленных из них «стопках». [32, 127–129]

Глава 2

Решения в виде бран в присутствии дефекта

2.1. Скалярный сектор модели

2.1.1. Общий потенциал

Мы будем рассматривать локализацию скалярной и фермионной материи в окрестности четырехмерной гиперповерхности (3-браны) в пятимерном пространстве. В данной работе брана считается не фундаментальным объектом, а является доменной стенкой, порожденной скалярными полями и гравитацией с топологически нетривиальной вакуумной конфигурацией. Рождение доменной стенки с определенным положением в пространстве-времени спонтанно нарушает трансляционную симметрию. С точки зрения квантовой теории оно не является полностью физически самосогласованным, поскольку истинным вакуумом теории является суперпозиция состояний с всевозможными положениями доменной стенки. Возникает проблема возникновения браны именно в определенной точке дополнительного измерения, которую можно решить введением некоторого нарушающего симметрию возмущения¹, например предположительно слабого дефекта пространственно-временной геометрии, который и инициирует образование доменной стенки[17].

Для реализации изложенной выше программы рассмотрим пятимерное пространство-время с гравитацией, описываемой псевдо-Римановым метрическим тензором g_{AB} . В плоском пространстве-времени в прямоугольной координатной системе этот тензор сводится к метрике Минковского η_{AB} . Дополни-

¹ Данная проблема в общем случае спонтанного нарушения симметрии в квантовой теории обсуждается например в [4, с.178]

ное измерение считается пространственно-подобным,

$$(X_\alpha) = (x_\mu, y), \quad (x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad (2.1)$$

$$(\eta_{\alpha\alpha}) = (+, -, -, -, -), \quad (2.2)$$

а подпространство x_μ соответствует четырехмерному пространству Минковского.

Мы будем рассматривать преимущественно модель с двумя вещественными скалярными полями $\Phi(X)$ и $H(X)$ минимально взаимодействующих с гравитацией. Мы также вводим дефект, нарушающий трансляционную инвариантность. Соответствующий функционал действия [1, 19] выглядит как,

$$S[g, \Phi, H] = \int d^5 X \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{2} M_*^3 R + \mathcal{L}_{mat}(g, \Phi, H) \right) - 3M_*^3 \lambda_b \int_{y=0} d^4 X \sqrt{|^{(4)}g|} + S_{GH}, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{mat} = Z \left(\frac{1}{2} (\partial_A \Phi \partial^A \Phi + \partial_A H \partial^A H) - V(\Phi, H) \right), \quad (2.4)$$

где R обозначает скалярную кривизну, $|g|$ и $|^{(4)}g|$ - определители пятимерного и индуцированного на фундаментальной бране четырехмерного метрических тензоров, причем последний определен в гауссовой системе координат. M_* обозначает пятимерный масштаб Планка, т.е. характерный масштаб пятимерной гравитации. Дефект моделируется *жесткой* фундаментальной тонкой 3-браной, наделенной космологической константой λ_b . Флуктуации этой браны считаются подавленными. Как было показано в [72, 137] для самосогласованной динамики гравитации и материи в присутствии тонкой браны необходимо добавление в действие компенсирующего члена Гиббонса-Хокинга-Йорка, который включен в (2.3) как S_{GH} . Он выражается через компоненты аффинной связности Γ_{BD}^C как,

$$S_{GH} = \frac{1}{2} M_*^3 \int_{y=0} d^4 X \sqrt{|^{(4)}g|} [\Gamma_{\mu 5}^\mu g^{55} - \Gamma_{\mu\nu}^5 g^{\mu\nu}]_\pm \quad (2.5)$$

Нормализационный коэффициент Z в лагранжевой плотности скалярного поля (2.4) имеет размерность массы и введен для упрощения уравнений движения.

Соответствующие уравнения движения в объемлющем пространстве за пределами тонкой браны, $y \neq 0$ принимают следующий вид,

$$R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = \frac{1}{M_*^3}T_{AB}, \quad (2.6)$$

$$D^2\Phi = -\frac{\partial V}{\partial\Phi}, \quad D^2H = -\frac{\partial V}{\partial H}, \quad (2.7)$$

где D^2 - ковариантный оператор д'Аламбера, а тензор энергии импульса равен,

$$T_{AB} = Z \left\{ \partial_A\Phi\partial_B\Phi + \partial_A H\partial_B H - g_{AB} \left(\frac{1}{2}(\partial_C\Phi\partial^C\Phi + \partial_C H\partial^C H) - V(\Phi, H) \right) \right\}. \quad (2.8)$$

Для того, чтобы построить толстую 3+1-мерную брану мы ищем классические вакуумные конфигурации, которые не нарушают четырехмерную инвариантность относительно преобразований Пуанкаре. Фоновые решения для метрики ищутся в гауссовой форме

$$ds^2 = e^{-2\rho(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (2.9)$$

Для такой метрики за пределами тонкой браны, $y \neq 0$, уравнения записываются как,

$$\rho'' = \frac{Z}{3M_*^3}(\Phi'^2 + H'^2), \quad (2.10)$$

$$\frac{2Z}{3M_*^3}V(\Phi, H) = \rho'' - 4(\rho')^2, \quad (2.11)$$

$$\Phi'' - 4\rho'\Phi' = \frac{\partial V}{\partial\Phi}, \quad H'' - 4\rho'H' = \frac{\partial V}{\partial H}. \quad (2.12)$$

Можно доказать [18], что только три из этих уравнений независимы.

Эти уравнения в балке должны быть дополнены условиями сшивания Из-

раеля на тонкой бране [85], которые для нашего анзаца принимают вид,

$$[\rho']_{\pm} = 2\lambda_b, \quad [\Phi']_{\pm} = 0, \quad (2.13)$$

$$[\Phi'']_{\pm} = 8\lambda_b\Phi'(0), \quad [H']_{\pm} = 0. \quad (2.14)$$

Согласованность этих условий с уравнениями движения обеспечивается компенсирующим членом Гиббонса-Хокинга-Йорка [72, 137] в действии.

Мы будем рассматривать потенциалы аналитические по скалярным полям и ограниченные снизу, которые обладают дискретной симметрией относительно отражений $\Phi \rightarrow -\Phi$ и $H \rightarrow -H$ и имеют малое число минимумов для ненулевых вакуумных ожиданий скалярных полей. Для таких потенциалов существуют фоновые решения в виде постоянных $\{\Phi, H\} = \{\Phi_{min}, H_{min}\}$, которые совместны с уравнениями Эйнштейна при условии, что вакуумная энергия равна

$$\begin{aligned} Z\langle V(\Phi, H) \rangle &= ZV(\{\Phi_{min}, H_{min}\}) \\ &\equiv -\Lambda_c M_*^3 > 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

т.е. при отрицательной пятимерной космологической константе Λ_c . В этом случае получается классическая геометрия типа Анти-де-Ситтера.

2.1.2. Минимальная модель

Модель приведенная в предыдущем разделе будет рассматриваться на примере модели [17, 23] с минимальным потенциалом ограниченным снизу и допускающим решения в виде кинка, которые соединяют два минимума потенциала. Этот потенциал содержит четверное самодействие с $O(2)$ -симметрией, которая явно нарушена массовыми членами с неправильным знаком для обоих скалярных полей. Лагранжиан скалярной материи тогда выглядит следующим образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mat} &= \frac{3\kappa M_*^3}{2M^2} \left(\partial_A \Phi \partial^A \Phi + \partial_A H \partial^A H \right. \\ &\quad \left. + 2M^2 \Phi^2 + 2\Delta_H H^2 - (\Phi^2 + H^2)^2 - V_0 \right) + M_*^3 \Lambda_c, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Где нормализационный коэффициент выбран равным $Z = 3\kappa M_*^3/M^2$ для упрощения уравнений движения и разложений в теории возмущений. Чтобы связать новую константу κ с пределом слабой гравитации, мы считаем, что $\kappa \sim M^3/M_*^3$ - малый параметр $\kappa \ll 1$, который характеризует взаимодействие гравитационного поля и полей материи. Положим $M^2 > \Delta_H$, тогда абсолютный минимум соответствует $\Phi_{min} = \pm M$, $H_{min} = 0$, а сдвиг потенциальной энергии должен быть принят равным $V_0 = M^4$ для корректного определения пятимерной константы связи Λ_c .

Классические уравнения движения за пределами браны (2.12) для этой модели записываются в гауссовых координатах как,

$$\Phi'' = -2M^2\Phi + 4\rho'\Phi' + 2\Phi(\Phi^2 + H^2), \quad (2.17)$$

$$H'' = -2\Delta_H H + 4\rho'H' + 2H(\Phi^2 + H^2), \quad (2.18)$$

$$\rho'' = \frac{\kappa}{M^2} \left((\Phi')^2 + (H')^2 \right), \quad (2.19)$$

$$\Lambda_c = -6\rho'^2 + \frac{3\kappa}{2M^2} \left\{ (\tilde{\Phi})'^2 + (\tilde{H}')^2 + 2M^2\tilde{\Phi}^2 + 2\Delta_H\tilde{H}^2 - (\tilde{\Phi}^2 + \tilde{H}^2)^2 - M^4 \right\}. \quad (2.20)$$

Полезно также рассмотреть обобщение этой модели на случай нескольких скалярных полей,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mat} = & \frac{3\kappa M_*^3}{2M^2} \left[\sum_n^N \partial_A \Phi_n \partial^A \Phi_n + \sum_n^N 2\Delta_n \Phi_n^2 - \left(\sum_n^N \Phi_n^2 \right)^2 - V_0 \right] + \\ & + M_*^3 \Lambda_c, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $\Delta_1 = M^2$. Эта модель обладает мягко нарушенной $O(N)$ симметрией. Уравнения для решений с гауссовым анзацем неоднородных по y и ненарушающих четырехмерную Пуанкаре-инвариантность записываются аналогично модели с двумя полями

$$\Phi_k'' = -2\Delta_k \Phi_k + 4\rho'\Phi_k' + 2\Phi_k \sum_n^N \Phi_n^2, \quad \rho'' = \frac{\kappa}{M^2} \sum_n^N (\Phi_n')^2, \quad (2.22)$$

$$\Lambda_c = -6\rho'^2 + \frac{3\kappa}{2M^2} \left\{ \sum_n^N \left((\tilde{\Phi}_n)'^2 + 2\Delta_n \tilde{\Phi}_n^2 \right) - \left(\sum_n^N \tilde{\Phi}_n^2 \right)^2 - M^4 \right\} \quad (2.23)$$

2.2. Решения в пределе выключенных гравитации и дефекта

2.2.1. Модель с двумя полями

Уравнения (2.17),(2.18) содержат члены разного порядка по малому параметру κ и могут быть решены по теории возмущений, если положить

$$\frac{|\rho'(y)|}{M} = O(\kappa) = \frac{|\rho''(y)|}{M^2}, \quad \frac{\lambda_b}{M} = O(\kappa), \quad (2.24)$$

что в соответствии (2.20) означает $\Lambda_c = O(\kappa)$. При этом уравнения в ведущем порядке по κ не зависят как от метрического фактора $\rho(y)$, так и от натяжения тонкой браны $\lambda_b \ll M$.

В зависимости от соотношения между квадратичными константами связи M^2 и Δ_H существует два типа решений неоднородных по y [17] Для нулевой гравитации и натяжения тонкой браны первое решение доминирует, когда $\Delta_H \leq M^2/2$,

$$\Phi = \pm M \tanh(My) + O(\kappa M, \lambda_b), \quad H(y) = 0. \quad (2.25)$$

В ведущем порядке $\kappa \sim \lambda_b$ оно порождает конформный фактор следующего вида,

$$\rho_1(y) = \frac{2\kappa}{3} \left\{ \ln \cosh(My) + \frac{1}{4} \tanh^2(My) \right\} + \lambda_b |y| + O(\kappa^2, \kappa \lambda_b / M, \lambda_b^2 / M^2), \quad (2.26)$$

Который выбран как четная функция по y для сохранения так называемой τ -симметрии [17], которая будет подробно рассмотрена в разделе 4.1. Для скалярных полей симметрия сводится к отражению по обоим полям с одновременным отражением пятой координаты y ,

$$\Phi(y) \rightarrow -\Phi(-y), \quad H(y) \rightarrow -H(-y).$$

Очевидно эти отражения оставляют бозонное действие (2.16) инвариантным и сохраняются как симметрия кинка (2.25). В присутствии гравитации индуци-

рованной фоновой материей τ -симметрия выживает для четных конформных факторов.

Как будет показано в третьей главе, для спектра флуктуаций метрики и скалярных полей существенную роль играет производная конформного фактора [1]. А именно, нули $\rho'(y)$ порождают сингулярные барьеры $\sim 1/(\rho'(y))^2$ в массовом операторе флуктуаций скалярной моды. Рассмотрим различные варианты для профиля (2.26). Без дефекта $\lambda_b = 0$ очевидно $\rho'(0) = 0$ и возникает сингулярный барьер на гиперповерхности $y = 0$ [1, 23]. Если же постоянная λ_b положительна, то функция $|\rho'(y)|$ нигде не обращается в ноль соответственно $|\rho'(0)| = \lambda_b$. Отсутствие сингулярного барьера открывает возможность локализовать скалярную нуль-моду, как это будет показано в разделе 3.3.

С другой стороны можно рассмотреть случай отрицательного натяжения браны $\lambda_b < 0$. Для того, чтобы сохранить асимптотическую геометрию типа Анти-де-Ситтера, следует сохранить положительной ее кривизну

$$k = \frac{2}{3}\kappa M + \lambda_b > 0 \Rightarrow |\lambda_b|/M < \frac{2}{3}\kappa. \quad (2.27)$$

При этом метрический фактор

$$\rho'_1(y) = \kappa M \left(\tanh My - \frac{1}{3} \tanh^3 My \right) - |\lambda_b| \epsilon(y), \quad (2.28)$$

где $\epsilon(y)$ знаковая функция, обладает двумя нулями, расположенными симметрично относительно $y = 0$. Эти нули порождают два сингулярных барьера, которые разбивают пятое измерение на три области с практически независимыми состояниями. В области между этими барьерами обнаруживается бесконечная башня локализованных скалярных состояний, которая будет рассмотрена в разделе 3.3.4.

Второй кинк возникает только если $M^2/2 \leq \Delta_H \leq M^2$ (в пределе нулевых гравитации и натяжения тонкой браны), т.е. $2\Delta_H = M^2 + \mu^2$, $\mu^2 < M^2$ [17],

$$\Phi_0(y) = \pm M \tanh(\beta My), \quad H_0(y) = \pm \frac{\mu}{\cosh(\beta My)},$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{M^2}}, \quad (2.29)$$

Это решение нарушает τ -симметрию. Конформный фактор в ведущем порядке по κ , λ_b принимает следующий вид,

$$\rho_1(y) = \frac{\kappa}{3} \left\{ (3 - \beta^2) \ln \cosh(\beta My) + \frac{1}{2} \beta^2 \tanh^2(\beta My) \right\} + \lambda_b |y| + O(\kappa^2, \kappa \lambda_b / M, \lambda_b^2 / M^2), \quad (2.30)$$

который также симметричен относительно $y \rightarrow -y$.

Можно проверить, что асимптотическая кривизна Анти-де-Ситтера k , определенная в пределе $y \gg 1/M$ при $\rho(y) \sim ky$, несколько отличается для фаз с ненарушенной и нарушенной τ -симметрией,

$$\begin{aligned} k_{unbroken} &= \frac{2}{3} \kappa M + \lambda_b \quad \text{vs.} \\ k_{broken} &= \frac{2}{3} \kappa M \left(1 + \frac{\mu^2}{2M^2} \right) \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{M^2}} + \lambda_b, \\ k_{broken} &< k_{unbroken}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Поскольку потенциал скалярных полей инвариантен относительно отражений $\Phi(y) \rightarrow -\Phi(y)$ и $H(y) \rightarrow -H(y)$, для любого решения в виде кинка существует решение с противоположным знаком в асимптотике на больших y . Далее выберем для определенности положительный знак $\Phi(y), H(y)$ на $y \rightarrow +\infty$.

Как будет показано в разделе 4.1 второе решение с ненулевым вакуумным средним поля H порождает массы фермионов, в то время как первое решение с $H(y) = 0$ оставляет фермионы безмассовыми. По этой причине именно второе решение представляет интерес для построения реалистичных моделей. В фермионном лагранжиане [1, 17] второе решение нарушает τ симметрию. Таким образом существует две фазы с различными вакуумными средними скалярных полей, разделенные критической точкой. Как будет показано во третьей главе, при $\Delta_H < M^2/2$ первый кинк обеспечивает локальный минимум, однако для $M^2/2 < \Delta_H < M^2$ он соответствует седловой точке, в то время как второй кинк с ненулевым вакуумным средним H гарантирует локальную стабильность. Когда учитываются поправки гравитации и натяжения тонкой браны точка фазового перехода сдвигается относительно $\Delta_H = M^2/2$ (см. раздел 3.4.1).

2.2.2. Решения модели с произвольным количеством полей

Рассмотрим теперь решения для минимальной модели N полями в пределе выключенной гравитации $\kappa \rightarrow 0$ и дефекта $\lambda_b \simeq \kappa M$. Уравнения (2.22)-(2.23) в этом пределе могут быть записаны как,

$$-\Phi_k'' + 2\mathcal{U}\Phi_k = 2\Delta_k\Phi_k, \quad \mathcal{U} = \sum_k \Phi_k^2, \quad (2.32)$$

В такой записи решения Φ_k можно рассматривать как решения одномерного уравнения Шредингера для потенциала \mathcal{U} соответствующие различным энергетическим уровням Δ_k . В то время как поля Φ_k , убывающие на бесконечности, могут являться локализованными состояниями для этого потенциала, для локализации в частности фермионных полей нам необходимо наличие кинка, который стремится на бесконечности по разные стороны браны к разным минимумам $\Phi_1 \rightarrow \pm M$. Для потенциала $\mathcal{U} \rightarrow M^2$ это решение можно организовать как граничное состояние непрерывного спектра с $\Delta_1 = M^2$.

Если у нас есть N полей, но в фоновом решении ненулевым вакуумным средним обладают только M полей, остальные не входят не только в уравнения (2.32) для других полей, но и их флуктуации отщепляются как в модели без гравитации (см. раздел 2.2.2), так и в модели с гравитацией в пределе выключенной гравитации (см. раздел 3.2). Таким образом, в этом случае сектор с M полями можно рассматривать в первом приближении как модель, в которой есть только M полей.

Рассмотрим следующую, хорошо известную в суперсимметричной квантовой механике [20–22, 54, 98, 136] цепочку потенциалов,

$$Q_n Q_n^\dagger = -\partial_y^2 + n^2 \beta^2 - \frac{n(n+1)\beta^2}{\cosh^2 \beta y}, \quad Q_n = -\partial_y + n\beta \tanh \beta y \quad (2.33)$$

Потенциалы с разными n связаны как суперпартнеры,

$$Q_n Q_n^\dagger + (2n+1)\beta^2 = Q_{n+1}^\dagger Q_{n+1}, \quad (2.34)$$

и за счет этой суперсимметрии спектр потенциала с $n + 1$ может быть построен из спектра потенциала с n ,

$$Q_n Q_n^\dagger \psi_E = E \psi_E, \quad \tilde{\psi}_E = Q_{n+1} \psi_E, \quad Q_{n+1} Q_{n+1}^\dagger \tilde{\psi}_E = \left(E + (2n + 1)\beta^2 \right) \tilde{\psi}_E \quad (2.35)$$

единственным исключением является нуль-мода,

$$Q_{n+1} \tilde{\psi}_0 = 0, \quad \tilde{\psi}_0 = e^{-\int dy (n+1)\beta \tanh \beta y} = \frac{1}{\cosh^{n+1} \beta y} \quad (2.36)$$

Поскольку для $n = 0$ потенциал оказывается постоянным, $Q_0 Q_0^\dagger = -\partial_y^2$, спектр потенциала $Q_n Q_n^\dagger$ оказывается состоящим из непрерывного спектра и n локализованных состояний. Как уже было сказано выше, для нас представляет особый интерес пограничное состояние непрерывного спектра, которое строится из постоянного решения для $n = 0$. Оно отождествляется с решением для Φ_1 , в то время как локализованные состояния отождествляются с решениями для остальных $N - 1 = n$ полей. Нормировочные константы определяются из условия,

$$-\partial_y^2 + 2 \sum_k^N \Phi_k^2 = -\partial_y^2 + 2\mathcal{U} = Q_n Q_n^\dagger + \text{const} \quad (2.37)$$

В отдельных случаях некоторые из констант могут оказаться равными нулю, и такое решение может быть реализовано в модели с меньшим числом полей.

Решения для $N = 2$ были приведены в предыдущем разделе. Решения для $N = 3$ записываются как,

$$\Phi_1 = \frac{M}{2} \left(3 \tanh^2 \beta y - 1 \right), \quad (2.38)$$

$$\Phi_2 = \sqrt{3M^2 - 3\beta^2} \frac{\tanh \beta y}{\cosh \beta y}, \quad \Delta_2 = M^2 - \frac{1}{2}\beta^2, \quad (2.39)$$

$$\Phi_3 = \sqrt{3M^2 - 12\beta^2} \frac{1}{2 \cosh^2 \beta y}, \quad \Delta_3 = M^2 - 2\beta^2. \quad (2.40)$$

Данное решение существует для $0 < \beta \leq \frac{1}{2}M$, причем при $2\beta = M$ решение для Φ_3 оказывается тривиальным и оно может быть применено к модели с двумя полями. Однако это решение не подходит для локализации фермионов,

поскольку кинк Φ_1 оказывается четной функцией. Таким образом, нам придется рассмотреть модель с $N = 4$.

$$\Phi_1 = \frac{M}{2} \tanh \beta y \left(-3 + 5 \tanh^2 \beta y \right), \quad (2.41)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4} \sqrt{6M^2 - 6\beta^2} \frac{(4 \cosh^2 \beta y - 5)}{\cosh^3 \beta y}, \quad \Delta_2 = M^2 - \frac{1}{2}\beta^2, \quad (2.42)$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} \sqrt{15M^2 - 60\beta^2} \frac{\tanh \beta y}{\cosh^2 \beta y}, \quad \Delta_3 = M^2 - 2\beta^2, \quad (2.43)$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{4} \sqrt{10M^2 - 90\beta^2} \frac{1}{\cosh^3 \beta y}, \quad \Delta_4 = M^2 - \frac{9}{2}\beta^2. \quad (2.44)$$

Мы опять получаем ограничение $0 < \beta \leq \frac{1}{3}M$, причем при $3\beta = M$ решение для Φ_4 оказывается тривиальным и оно может быть применено к модели с тремя полями. Однако как будет показано в разделе 3.1.2 данная конфигурация оказывается к сожалению нестабильной.

2.3. Поправки к решениям в двухполевой модели

Для упрощения аналитических вычислений оказывается полезным ввести новую безразмерную координату для дополнительного измерения,

$$\tau = \beta y. \quad (2.45)$$

Мы заинтересованы в фазе с ненулевым $\langle H \rangle$, так как при этом появляется возможность наделить фермионы массой. Она может быть исследована при помощи теории возмущений по параметрам κ , определяющему силу гравитационного взаимодействия со скалярными полями, μ/M , параметризующему отклонение от критической точки, и λ_b/M , контролирующему натяжение тонкой браны[1, 19].

$$\Phi(\tau) = M \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \kappa^l \left(\frac{\lambda_b}{M}\right)^m \left(\frac{\mu}{M}\right)^{2n} \Phi_{l,m,n}(\tau), \quad (2.46)$$

$$H(\tau) = M \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \kappa^l \left(\frac{\lambda_b}{M}\right)^m \left(\frac{\mu}{M}\right)^{2n+1} H_{l,m,n}(\tau), \quad (2.47)$$

$$\rho(\tau) = \kappa \sum_{n,m=0}^{\infty} \kappa^n \left(\frac{\mu}{M}\right)^{2m} \rho_{n+1,m}(\tau), \quad (2.48)$$

$$\Delta_H = \Delta_{H,c}(\kappa) + \frac{1}{2}\mu^2, \quad (2.49)$$

$$\Delta_{H,c}(\kappa) = \frac{1}{2}M^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} \kappa^m \left(\frac{\lambda_b}{M}\right)^n \Delta_H^{m,n}, \quad (2.50)$$

$$\Phi_{n,0,0} \equiv \Phi_n, \quad H_{n,0,0} \equiv H_n, \quad \rho_{n,0} \equiv \rho_n, \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{M^2} \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \kappa^l \left(\frac{\lambda_b}{M}\right)^m \left(\frac{\mu}{M}\right)^{2n} \left(\frac{1}{\beta^2}\right)_{l,m,n}; \quad (2.52)$$

При этом следует также раскладывать пятимерную космологическую постоянную Λ_c . Однако все поправки можно найти независимо от нее, а затем получить ее значение через уравнение (2.19).

Фоновые решения в фазе с $\langle H \rangle = 0$ могут быть отождествлены с решениями для критической токи $\mu/M = 0$, за исключением иного значения $\Delta_H < \Delta_{H,c}$. Таким образом, на уровне классических решений мы можем не рассматривать эту фазу отдельно.

Уравнение для первого порядка разложения Φ по κ выглядит следующим образом,

$$(\partial_\tau^2 + 2 - 6\Phi_0^2)\Phi_{1,0,0} = 4\rho'_1\Phi'_0 - 2\kappa \left(\frac{1}{\beta^2}\right)_1 \Phi_0(1 - \Phi_0^2) \equiv \mathcal{G}_1(\tau), \quad (2.53)$$

Для дальнейших вычислений удобно заметить следующую факторизацию,

$$(\partial_\tau^2 + 2 - 6\Phi_0^2) = (\partial_\tau - 2 \tanh \tau)(\partial_\tau + 2 \tanh \tau) \quad (2.54)$$

что позволяет вычислить решение по следующей формуле,

$$\Phi_1 = \frac{1}{\cosh^2 \tau} \int_0^\tau d\tau' \cosh^4 \tau' \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau'' \frac{1}{\cosh^2 \tau''} \mathcal{G}_1(\tau). \quad (2.55)$$

Нормируемость решения фиксирует поправку к $1/\beta^2$. Результат в итоге записывается как,

$$\Phi_{1,0,0} = -\frac{2 \sinh \tau}{9 \cosh^3 \tau}, \quad \left(\frac{1}{\beta^2}\right)_{1,0,0} = \frac{4}{3}, \quad (2.56)$$

Найдем теперь поправку для второго поля,

$$\begin{aligned} (\partial_\tau^2 + 1 - 2\Phi_0^2)H_{1,0,0} &= -\kappa \left(\Delta_H^{1,0,0} + \left(\frac{1}{\beta^2}\right)_{1,0,0} \right) H_{0,0,0} + 4\rho'_1 H'_0 \\ &\quad + 2\kappa \left(\frac{1}{\beta^2}\right)_{1,0,0} H_0 \Phi_0^2 + 4H_0 \Phi_0 \Phi_{1,0,0} \equiv \mathcal{F}_1(\tau). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Снова мы можем заметить факторизуемость потенциала,

$$(\partial_\tau^2 + 1 - 2\Phi_0^2) = (\partial_\tau - \tanh \tau)(\partial_\tau + \tanh \tau) \quad (2.58)$$

Решение находится по следующей формуле,

$$H_{1,0} = \frac{1}{\cosh \tau} \left[C_{1,0}^H + \int_0^\tau d\tau' \cosh^2 \tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \frac{1}{\cosh \tau''} \mathcal{F}_1(\tau) \right]. \quad (2.59)$$

Нормируемость фиксирует сдвиг критической точки $\Delta_{H,c}$. Результат выглядит следующим образом,

$$\begin{aligned} H_{1,0,0} &= \frac{2}{27 \cosh \tau} \\ &\quad \cdot (C_{1,0,0}^H - 2 \log \cosh \tau + 3 \tanh^2 \tau), \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\Delta_H^{1,0} = -\frac{44}{27}, \quad (2.61)$$

В присутствии браны с ненулевым натяжением фоновые поля приобретают дополнительные поправки, которые вычисляются аналогичным образом,

$$\Phi_{0,1,0} = \epsilon(\tau) \tilde{\Phi}_{0,1,0}(|\tau|), \quad H_{0,1,0} = \tilde{H}_{0,1,0}(|\tau|) \quad (2.62)$$

$$\Delta_H^{0,1} = -\frac{4}{3}(1 + 2 \ln 2), \quad \left(\frac{1}{\beta^2}\right)_{0,1,0} = 2, \quad (2.63)$$

где $\epsilon(\tau)$ - знаковая функция,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{0,1,0} = & -\frac{1}{9} \frac{\tanh \tau}{\cosh^2 \tau} \left(9 \cosh^2 \tau + 6 \cosh^4 \tau \right. \\ & \left. - 6 \sinh \tau \cosh \tau^3 - 12 \cosh \tau \sinh \tau \right), \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{0,1,0} = & \frac{1}{3 \cosh \tau} \left[5(\cosh^2 \tau - \cosh \tau \sinh \tau) \right. \\ & + 4(\ln \cosh \tau - \tau) \cosh \tau \sinh \tau \\ & + 4(\cosh^2 \tau - \tau) \ln 2 + 4 \tanh \tau \\ & \left. + \tau + 2\text{Li}_2(-e^{-2\tau}) + C_{0,1,0}^H \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

а Li_2 - функция дилогарифма [99, с.1],

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-\zeta)}{\zeta} d\zeta. \quad (2.66)$$

Мы подчеркиваем, что с учетом этих поправок первые производные фоновых полей $\Phi'_{1,0}$ и $H'_{1,0}$ остаются непрерывными.

Смешанные порядки оказываются сильно подавленными для реалистичных значений параметров модели $\kappa \sim 10^{-15}$ и $\mu^2/M^2 \sim 10^{-3}$ (см. раздел 4.4). Соответственно, $\kappa\mu^2/M^2 \ll \kappa \ll \mu^2/M^2$. Таким образом, классических решений (2.29),(2.30) вместе с поправками (2.60),(2.61) достаточно для расчетов с хорошим приближением в тех случаях, когда пертурбативное разложение хорошо работает. Последнее выполняется безупречно для классических уравнений движения.

Единственная проблема состоит в том, что константы интегрирования $C_{1,0,0}^H$ и $C_{0,1,0}^H$ не фиксированны в первых порядках разложения по κ, μ . Чтобы найти их, необходимо все-таки рассмотреть поправки к фоновым решениям Φ и H смешанных порядков. Это оказывается возможным сделать аналитически в случае без тонкой браны. Уравнение на $\Phi_{1,0,1}$ принимает вид,

$$\begin{aligned}
(\partial_\tau^2 + 2 - 6\Phi_0^2)\Phi_{1,0,1} = & -2\Phi_{1,0,0} + 4\Phi_0 H_0 H_{1,0,0} + 6\Phi_0^2 \Phi_{1,0,0} + 2H_0^2 \Phi_{1,0,0} \\
& + \frac{8}{3}H_0^2 \Phi_0 + 4\rho'_{1,0,1} \Phi'_0 - 2\left(\frac{1}{\beta^2}\right)_{1,0,1} \Phi_0(1 - \Phi_0^2) \quad (2.67)
\end{aligned}$$

и имеет следующее решение,

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,0,1} = & \frac{1}{27} \frac{\text{Li}_2(-e^{-2\tau}) - \text{Li}_2(-e^{2\tau})}{\cosh^2 \tau} + \frac{2 \tanh \tau}{9 \cosh^2 \tau} \\
& - \frac{\tau}{\cosh^2 \tau} \left[\frac{26}{27} + \frac{2}{27} C_{1,0,0}^H + \frac{4}{27} \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta^2}\right)_{1,1} \right] \quad (2.68)
\end{aligned}$$

Уравнение на $H_{1,0,1}$ выглядит следующим образом,

$$\begin{aligned}
(\partial_\tau^2 + 1 - 2\Phi_0^2)H_{1,0,1} = & -2H_{1,0,0}(1 - \Phi_0^2) + \frac{8}{27}H_0 \\
& - \left(\frac{1}{\beta^2}\right)_{1,0,1} H_0(1 - 2\Phi_0^2) + 4H_0 \Phi_0 (\Phi_{1,0,1} + \Phi_{1,0,0}) \\
& + 6H_0^2 H_{1,0,0} + \frac{8}{3}H_0^3 + 4\rho'_{1,0,1} H'_0 \quad (2.69)
\end{aligned}$$

Считая H нормируемой функцией, умножив это уравнение на H_0 и проинтегрировав его по τ от $-\infty$ до $+\infty$ мы наконец получаем

$$C_{1,0,0}^H = -7 - 2 \ln 2. \quad (2.70)$$

Численное вычисление дает следующий результат,

$$C_{0,1,0}^H = +1.3081. \quad (2.71)$$

2.4. Выводы ко второй главе

Во второй главе нами была сформулирована модель «толстой браны» с двумя скалярными полями, которые минимально взаимодействуют с гравитацией и с дефектом, нарушающим трансляционную симметрию, который моделируется тонкой браной. В качестве примера была рассмотрена модель с мягко нарушенной $O(2)$ -симметрией, которая допускает две фазы с вакуумными

средними поляй непостоянными в дополнительном измерении и сохраняющими четырехмерную Лоренц-инвариантность. Соответствующие фоновые решения были получены в пределе нулевой гравитации и натяжения тонкой браны, а затем для них были получены поправки по теории возмущений.

Также нами было рассмотрено обобщение минимальной модели на случай нескольких полей. Был описан метод построения решений с помощью цепочки связанных суперсимметрией потенциалов, а также построены решения с тремя и четырьмя ненулевыми полями. На кинке в решении с тремя полями невозможна локализация фермионов, а решение с четырьмя полями, как мы увидим в следующей главе, оказывается нестабильным.

Глава 3

Скалярные флуктуации

3.1. Скалярные флуктуации в модели без гравитации

3.1.1. Модель с двумя полями

Для сравнения с дальнейшими результатами, рассмотрим в начале модель с двумя скалярными полями Φ и H аналогичную введенной в разделе 2.1, но без гравитации, как это было сделано в частности в работе [17]. Определим флуктуации полей около фоновых решений $\Phi(y)$ и $H(y)$ как,

$$\Phi(X) = \Phi(y) + \phi(X), \quad H(X) = H(y) + \chi(X) \quad (3.1)$$

и совершим их спектральное разложение,

$$\begin{pmatrix} \phi(X) \\ \chi(X) \end{pmatrix} = \sum_m \Psi_m \begin{pmatrix} \phi_m(x) \\ \chi_m(x) \end{pmatrix}, \quad \partial_\mu \partial^\mu \Psi_m = m^2 \Psi_m \quad (3.2)$$

В этом случае, рассмотрев вторую вариацию лагранжиана, легко вывести следующее уравнение на флуктуации,

$$\hat{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} = m^2 \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{M}} = -\partial_y^2 + \partial^2 V, \quad (3.3)$$

где $\partial^2 V$ - матрица вторых производных.

Минимальная модель с четверным потенциалом, рассмотренная в разделе 2.1.2 в случае отсутствия гравитации была подробно исследована в работе [17]. Было показано, что в этом случае,

$$[\hat{\mathcal{M}}]_{ij} = \left(-\partial_y^2 - 2\Delta_i + 2\Phi_i^2 \right) \delta_{ij} + 4\Phi_i \Phi_j, \quad (3.4)$$

где

$$\left(\Delta_i \right) = \left(M^2, \Delta_H \right), \quad \left(\Phi_i \right) = \left(\Phi(y), H(y) \right). \quad (3.5)$$

В фазе с ненарушенной τ -симметрией $\langle H \rangle = 0$ каналы ϕ и χ становятся невзаимодействующими и могут быть рассмотрены по отдельности.

$$\left(-\partial_y + 2M \tanh My\right) \left(\partial_y + 2M \tanh My\right) \phi^{(m)} = m^2 \phi^{(m)}, \quad (3.6)$$

$$M^2 - 2\Delta_H + \left(-\partial_y + M \tanh My\right) \left(-\partial_y + M \tanh My\right) \chi^{(m)} = m^2 \chi^{(m)} \quad (3.7)$$

Оба потенциала являются точно решаемыми. В ϕ -канале существует два локализованных состояния: безмассовая мода Гольдстоуна, ассоциированная со спонтанным нарушением симметрии $\phi_0 = \frac{1}{\cosh My}$ и тяжелое локализованное состояние с массой $\sqrt{3}M$.

Единственное локализованное состояние в χ канале записывается как $\chi_0 = 1/\cosh(My)$ и имеет массу $m_0^2 = M^2 - 2\Delta_H$. Таким образом, в фазе с ненарушенной τ -симметрией, когда $M^2 > 2\Delta_H$ легчайшая скалярная флуктуация в χ канале обладает положительной массой и система стабильна. В критической точке $M^2 = 2\Delta_H$ легчайшая флуктуация безмассова, а для $M^2 < 2\Delta_H \leq 2M^2$ локализованное состояние χ_0 представляет собой тахион и сигнализирует о неустойчивости фазы с нулевым вакуумным средним второго поля $\langle H \rangle = 0$. Вместо этого минимум обеспечивается фазой с нарушенной τ -симметрией.

Фаза с нарушенной τ -симметрией исследуется с помощью теории возмущений по параметру $\frac{\mu}{M}$. В частности в [17] по теории возмущений нуль-моды в χ было получено, что она приобретает массу $m^2 \simeq 2\mu^2$.

Теперь мы повторим этот результат [17] в теории возмущений аналогичной той, которую мы будем использовать для модели с гравитацией в разделе 3.4.2. Поскольку уравнения (2.17)-(2.20) обладают гладким пределом нулевой гравитации и нулевого натяжения браны, мы можем использовать разложения (2.46)-(2.46) положив в них $\kappa = 0, \lambda_b = 0$. Разложим флуктуации следующим образом,

$$\begin{aligned}\chi^{(m)} &= \sum_k^\infty \left(\frac{\mu}{M}\right)^k \chi_k, & \phi^{(m)} &= \sum_k^\infty \left(\frac{\mu}{M}\right)^{k+1} \phi_k, \\ m^2 &= M^2 \sum_k^\infty \left(\frac{\mu}{M}\right)^k (m^2)_k^{NG},\end{aligned}\tag{3.8}$$

Тогда итерированная форма уравнений (3.3) записывается как,

$$\left(-\partial_\tau + 2 \tanh \tau\right) \left(\partial_\tau + 2 \tanh \tau\right) \phi_k + (m^2)_k^{NG} \phi_0 = \mathcal{F}_k^{NG},\tag{3.9}$$

$$\left(-\partial_\tau + \tanh \tau\right) \left(\partial_\tau + \tanh \tau\right) \chi_k + (m^2)_k^{NG} \chi_0 = \mathcal{H}_k^{NG},\tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k^{NG} &= \sum_{l=0}^k 4\Phi_0 H_0 \chi_l + \sum_{l=0}^{k-1} \left[-2 + 6\Phi_0^2 + 2H_0^2 \right] \phi_{0,l} \\ &\quad - \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{k-l} (m^2)_{0,l} \phi_{0,r},\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{k+1}^{NG} &= \sum_{l=0}^k 4\Phi_0 H_0 \phi_l + \sum_{l=0}^k \left[-2 + 2\Phi_0^2 + 6H_0^2 \right] \chi_{0,l} \\ &\quad - \sum_{l=1}^k \sum_{r=0}^{k-l+1} (m^2)_{0,l} \phi_{0,r}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Интегрируя эти уравнения, мы получаем

$$\begin{aligned}\phi_k(\tau) &= \frac{1}{\cosh^2 \tau} \int_0^\tau d\tau' \cosh^4 \tau' \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau'' \\ &\quad \frac{1}{\cosh^2 \tau''} \left(\mathcal{F}_k^{NG}(\tau'') - (m^2)_k^{NG} \phi_0(\tau'') \right),\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\chi_k &= \frac{1}{\cosh \tau} \int_0^\tau d\tau' \cosh^2 \tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \\ &\quad \frac{1}{\cosh \tau''} \left(\mathcal{H}_k^{NG}(\tau'') - (m^2)_k^{NG} \chi_0(\tau'') \right),\end{aligned}\tag{3.14}$$

Масса может быть получена интегрированием уравнения на χ_k , умноженного на χ_0 , с предположением, что все порядки ϕ_k и χ_k являются нормируемыми

ми, убывающими на бесконечности функциями,

$$(m^2)_k^{NG} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_0 \mathcal{H}_k d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_0^2 d\tau}. \quad (3.15)$$

Вычисление дает следующий результат для следующего за главным порядком разложения массы,

$$(m^2)_2^{NG} = -\frac{130442}{121275} \approx -1.0756. \quad (3.16)$$

3.1.2. Модель с несколькими полями

Обобщение минимальной модели, упомянутое в разделе 2.1.2, представляет определенный интерес для моделей локализации фермионов с нарушением сохранения CP четности (см. раздел 4.3). Однако как мы покажем в этом разделе решения, полученные в 2.2.2 к сожалению оказываются нестабильными.

Для нестабильности полевой конфигурации достаточно, чтобы для какой-либо пробной функции $\Phi^{(test)}(y) = \left(\Phi_k^{(test)}(y) \right)$ выполнялось,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Phi^{(test)}(y) \right)^T \hat{\mathcal{M}} \Phi^{(test)}(y) dy < 0, \quad (3.17)$$

где $\hat{\mathcal{M}} = -\partial_y^2 + \partial^2 V \Big|_{\Phi_k = \Phi_k(y)}$. Выполнение этого неравенства означает, что массовый оператор флуктуаций не является положительно определенным. Для нашей модели с четверным потенциалом и мягким нарушением $O(N)$ -симметрии легко обобщается полученная в [17] формула (3.4).

Для решений, найденных в разделе 2.2.2, такая пробная функция находится легко,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \Phi_3(y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \hat{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} \Phi_3(y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy = -\frac{4}{77}(4\beta^2 - 1)(-24 + 55\beta^2), \quad (3.18)$$

причем этот результат оказывается меньше нуля для любых $0 < \beta \leq \frac{1}{3}$. Как будет показано ниже в разделе 3.2 эта конфигурация остается нестабильной даже с учетом нетривиальных вкладов.

3.2. Калибровочно-инвариантные скалярные флуктуации

Рассмотрим теперь флуктуации в модели минимально взаимодействующей с гравитацией. Флуктуации метрики $h_{AB}(X)$ и скалярных полей $\phi(X)$ и $\chi(X)$ относительно фоновых решений определяются следующим образом.

$$g_{AB}(X) dx^A dx^B = e^{-2\rho(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2 + e^{-2\rho(y)} h_{AB}(X) dx^A dx^B; \quad (3.19)$$

$$\Phi(X) = \Phi(y) + \phi(X); \quad H(X) = H(y) + \chi(X). \quad (3.20)$$

Поскольку четырехмерная симметрия относительно преобразований Пуанкаре не нарушена, мы выделяем соответствующую четырехмерную часть метрики $h_{\mu\nu}$ и вводим следующие обозначения для гравивекторов $h_{5\mu} \equiv v_\mu$ и гравискаляров $e^{-2\rho} h_{55} \equiv S$.

Используя формулы, приведенные в [23, 47] мы получаем лагранжиан, квадратичный по флуктуациям следующего вида,

$$\mathcal{L}_{(2)} = \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_{\phi,\chi} + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_V, \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|} \mathcal{L}_h \equiv & -\frac{1}{2} M_*^3 e^{-2\rho} \left\{ -\frac{1}{4} h_{\alpha\beta,\nu} h^{\alpha\beta,\nu} - \frac{1}{2} h_{,\beta}^{\alpha\beta} h_{,\alpha} + \frac{1}{2} h_{,\alpha}^{\alpha\nu} h_{\nu,\beta}^{\beta} + \frac{1}{4} h_{,\alpha} h^{,\alpha} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} e^{-2\rho} (h'_{\mu\nu} h'^{\mu\nu} - h'^2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|}\mathcal{L}_{\phi,\chi} &\equiv \frac{Z}{2}e^{-2\rho} \left[\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} + \chi_{,\mu}\chi^{,\mu} - e^{-2\rho} \left(\phi'^2 + (\chi')^2 + \begin{pmatrix} \check{\phi} \\ \check{\chi} \end{pmatrix}^T \partial^2 V \begin{pmatrix} \check{\phi} \\ \check{\chi} \end{pmatrix} \right) \right] \\ &+ \frac{Z}{2}e^{-4\rho}h'(\Phi'\phi + H'\chi), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|}\mathcal{L}_S &\equiv \frac{1}{4} \left(-Ze^{-4\rho}VS^2 + S \left(M_*^3 e^{-2\rho} (h_{,\mu\nu}^{\mu\nu} - h_{,\mu}^{,\mu}) + M_*^3 e^{-\rho} (e-3\rho)' h' \right. \right. \\ &\left. \left. + 2Z(e^{-4\rho}(\Phi'\phi + H'\chi))' - 4Ze^{-4\rho}(\Phi'\phi' + H'\chi') \right) \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|}\mathcal{L}_V &\equiv -\frac{1}{8}M_*^3 e^{-4\rho}v_{\mu\nu}v^{\mu\nu} + \frac{1}{2}v^\mu \left[-M_*^3 e^{-4\rho} (h_{\mu\nu}^{,\nu} - h_{,\mu}^{,\mu})' \right. \\ &\left. + 2Ze^{-4\rho}(\Phi'\phi_{,\mu} + H'\chi_{,\mu}) + M_*^3 e^{-\rho} (e^{-3\rho})' S_{,\mu} \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $v_{\mu\nu} = v_{\mu,\nu} - v_{\nu,\mu}$, $h = h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$.

Значительного упрощения можно достичь, если выделить продольные и поперечные компоненты полей $h_{\mu\nu}$ и v_μ , которые с точки зрения четырехмерной теории ведут себя как компоненты с различными спинами [35, 75],

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= b_{\mu\nu} + F_{\mu,\nu} + F_{\nu,\mu} + E_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\psi, \\ v_\mu &= v_\mu^\perp + \partial_\mu\eta, \end{aligned} \quad (3.26)$$

причем $b_{\mu\nu}$ и F_μ подчиняются следующему условию,

$$b_{\mu\nu}^{,\mu} = b = 0 = F_{\mu}^{,\mu} = v_\mu^{\perp,\mu}. \quad (3.27)$$

После выделения продольных и поперечных компонент степени свободы с различными четырехмерными спинами отщепляются друг от друга,

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{(2)} = & \frac{1}{8}M_*^3 e^{-2\rho} \left\{ b_{\mu\nu,\sigma} b^{\mu\nu,\sigma} - e^{-2\rho} \left((b')_{\mu\nu} (b')^{\mu\nu} + f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \right) \right\} \\
& + \frac{3}{4}M_*^3 e^{-2\rho} \left\{ -\psi_{,\mu} \psi^{,\mu} + \psi_{,\mu} S^{,\mu} + 2e^{-2\rho} (\psi')^2 - 4e^{-2\rho} \rho' \psi' S \right\} \\
& + \frac{Z}{2} e^{-2\rho} \left\{ \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + \chi_{,\mu} \chi^{,\mu} - e^{-2\rho} \left[(\phi')^2 + (\chi')^2 + \begin{pmatrix} \check{\phi} \\ \check{\chi} \end{pmatrix}^T \partial^2 V \begin{pmatrix} \check{\phi} \\ \check{\chi} \end{pmatrix} \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} V(\Phi, H) S^2 - 4\psi' (\Phi' \phi + H' \chi) \\
& \left. \left. - S \left(-\Phi' \phi' - H' \chi' + \frac{\partial V}{\partial \Phi} \phi + \frac{\partial V}{\partial H} \chi \right) \right\} \\
& + \frac{3}{4}M_*^3 e^{-4\rho} \square(E' - 2\eta) \left(-\rho' S + \psi' + \frac{2Z}{3M_*^3} (\Phi' \phi + H' \chi) \right), \quad (3.28)
\end{aligned}$$

где $f_\mu \equiv F'_\mu - v_\mu^\perp$, $f_{\mu\nu} \equiv f_{\mu,\nu} - f_{\nu,\mu}$.

Тем не менее, остаются избыточные степени свободы, поскольку действие (2.3) инвариантно относительно диффеоморфизмов. Инфинитезимальные диффеоморфизмы соответствуют производной Ли вдоль произвольного векторного поля $\tilde{\zeta}^A(X)$, определяющего координатные преобразования $X \rightarrow X = X + \tilde{\zeta}(X)$.

Если дефект в виде тонкой браны включен в нашей модели, мы рассматриваем его как частично нарушающий калибровочную симметрию относительно инфинитезимальных диффеоморфизмов. В частности для сохранения положения браны в $y = 0$ следует ограничить допустимые диффеоморфизмы $\tilde{\zeta}_5|_{y=0} = 0$.

Переопределим векторную $\tilde{\zeta}_\mu = e^{-2\rho} \zeta_\mu$ и скалярную части инфинитезимальных преобразований $\tilde{\zeta}_5 = \zeta_5$, а также выделим продольную и поперечную компоненты в первой,

$$\zeta_\mu = \zeta_\mu^\perp + \partial_\mu C, \quad \partial^\mu \zeta_\mu^\perp = 0. \quad (3.29)$$

Тогда диффеоморфизмы соответствуют следующим инфинитезимальным ка-

либровочным преобразованиям действия квадратичного по флуктуациям,

$$\begin{aligned}
\eta &\rightarrow \eta - e^{2\rho}\zeta_5 - C', & E &\rightarrow E - 2C, \\
\psi &\rightarrow \psi + 2\rho'\zeta_5, & S &\rightarrow S - 2\zeta_5', \\
\phi &\rightarrow \phi + \Phi'\zeta_5, & \chi &\rightarrow \chi + H'\zeta_5.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Дальнейший анализ спектра скалярных флуктуаций удобно проводить в следующих калибровочно-инвариантных переменных:

$$\begin{aligned}
\check{\eta} &= E' - 2\eta + \frac{e^{2\rho}}{\rho'}\psi; & \check{\phi} &= \phi + \frac{\Phi'}{2\rho'}\psi; \\
\check{\chi} &= \chi + \frac{H'}{2\rho'}\psi; & \check{S} &= S - \frac{1}{\rho'}\psi' + \frac{\rho''}{(\rho')^2}\psi.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Важно заметить, что эти переменные могут претерпевать скачки, в противоположность исходным неинвариантным переменным. Однако поскольку они происходят из ненулевых значений поля ψ и ψ' допустимые скачки в различных переменных оказываются зависимыми друг от друга и, таким образом, могут быть ограничены.

С одной стороны, если дефект отсутствует $\lambda_b = 0$ обращение в ноль производной метрического фактора ρ' означает, что возможны сингулярности в $\check{\eta}, \check{\phi}, \check{\chi} \sim \frac{1}{y}$ и $\check{S} \sim \frac{1}{y^2}$. Однако такие сингулярности оказываются запрещены требованием интегрируемости действия.

С другой стороны, в случае ненулевого натяжения тонкой браны λ_b возможные скачки в других степенях свободы приводят к δ -образной сингулярности в \check{S} , что снова приводит к неинтегрируемости действия. Таким образом, допустимыми являются только скачки в \check{S} .

Скалярная часть лагранжиана квадратичного по флуктуациям принимает в калибровочно-инвариантных переменных следующий вид:

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{(2),scal} = & \frac{1}{2}Ze^{-2\rho} \left\{ \check{\phi}_{,\mu}\check{\phi}^{\prime\mu} + \check{\chi}_{,\mu}\check{\chi}^{\prime\mu} - \right. \\
& -e^{-2\rho} \left[(\check{\phi}')^2 + (\check{\chi}')^2 + \begin{pmatrix} \check{\phi} \\ \check{\chi} \end{pmatrix}^T \partial^2 V \begin{pmatrix} \check{\phi} \\ \check{\chi} \end{pmatrix} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2}V(\Phi, H)\check{S}^2 + \check{S} \left(\Phi'\check{\phi}' + H'\check{\chi}' - \frac{\partial V}{\partial \Phi}\check{\phi} - \frac{\partial V}{\partial H}\check{\chi} \right) \right] \right\} \\
& + \frac{3}{4}M_*^3 e^{-4\rho} \square \check{\eta} \left(-\rho'\check{S} + \frac{2Z}{3M_*^3}(\Phi'\check{\phi} + H'\check{\chi}) \right), \tag{3.32}
\end{aligned}$$

где $\partial^2 V$ - матрица вторых производных потенциала по фоновым решениям.

Из последней строчки следует, что поле $\check{\eta}$ служит калибровочно-инвариантным множителем Лагранжа и, таким образом, оказывается верной следующая калибровочно-инвариантная связь,

$$\rho'\check{S} = \frac{2Z}{3M_*^3}(\Phi'\check{\phi} + H'\check{\chi}). \tag{3.33}$$

Таким образом, после разрешения этой связи остается только два независимых скалярных поля. Для правильной нормировки кинетического члена следует переопределить поля $\check{\psi} = \Omega\hat{\psi}, \check{\chi} = \Omega\hat{\chi}$, где $\Omega = Z^{-1/2}e^\rho$. После этого квадратичный лагранжиан скалярных флуктуаций сводится к следующему виду,

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{(2),scal} = & \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi} + \partial_\mu \hat{\chi} \partial^\mu \hat{\chi} - \right. \\
& \left. -e^{-2\rho} \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix}^T \left(-\partial_y^2 + 2\rho'\partial_y + \hat{\mathcal{M}} \right) \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} \right), \tag{3.34}
\end{aligned}$$

где массовый оператор,

$$\hat{\mathcal{M}} = \partial^2 V + \hat{\mathcal{M}}_{NP} - \rho'' + 3(\rho')^2 \tag{3.35}$$

причем он содержит следующий член,

$$\hat{\mathcal{M}}_{NP} = \frac{2Z}{3M_*^3}(-\partial_y + 4\rho') \left[\frac{1}{\rho'} \begin{pmatrix} (\Phi')^2 & \Phi'H' \\ \Phi'H' & (H')^2 \end{pmatrix} \right], \tag{3.36}$$

который, как будет показано ниже, в общем случае может менять спектр скалярных флуктуаций непертурбативно по константе гравитационного взаимодействия.

Произведем разложение флуктуаций по спектру масс,

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}(X) \\ \hat{\chi}(X) \end{pmatrix} = e^\rho \sum_m \Psi^{(m)}(x) \begin{pmatrix} \phi^{(m)}(y) \\ \chi^{(m)}(y) \end{pmatrix}, \quad \partial_\mu \partial^\mu \Psi^{(m)} = -m^2 \Psi^{(m)}, \quad (3.37)$$

где фактор $\exp(\rho)$ введен, чтобы устранить члены с первыми производными в уравнениях. Таким образом, мы получаем следующие уравнения,

$$\left(-\partial_y^2 + \hat{\mathcal{M}} - \rho'' + (\rho')^2 \right) \begin{pmatrix} \phi^{(m)} \\ \chi^{(m)} \end{pmatrix} = e^{2\rho} m^2 \begin{pmatrix} \phi^{(m)} \\ \chi^{(m)} \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

Важное отличие этих уравнений от схожих уравнений в модели без гравитации (3.3) состоит в том, что спектральный параметр m^2 входит в них в сущности как коэффициент при члене, дающем вклад в потенциал. Задача сводится таким образом к поиску спектрального параметра для которого потенциал, включающий массовый член, обладает нуль-модой. Член с экспонентой отрицателен для $m^2 > 0$ и, поскольку метрический фактор ρ положителен и возрастает на бесконечности, что делает потенциал неограниченным снизу. Таким образом, для положительной массы возможно существование только квазилокализованных резонансных состояний с ограниченным временем жизни на бране. Это проблема была рассмотрена в [18], где была получена квазиклассическая оценка для вероятности квантового туннелирования для легких резонансов с массами $m \ll M$ порядка $\sim \exp\{-\frac{3}{\kappa} \ln \frac{2M}{m}\}$. Для феноменологически допустимых значений $\kappa \sim 10^{-15}$ и $M/m \gtrsim 30$ эти процессы оказываются чрезвычайно сильно подавлены. Более того, теории возмущения κ процессы распада резонансов не проявляются, поскольку точка поворота расположена в $y \sim 1/\kappa$. Таким образом, возможно изучать резонансы как локализованные состояния в рамках теории возмущений.

Для получения спектра мы также должны рассмотреть граничные члены,

принимая во внимание добавку Гиббонса-Хокинга [72, 137],

$$S_{(2),scal}^{(bound)} = -3M_*^3 \int_{bound} d^4x \sqrt{g^{(4)}} [\rho' \check{S}^2]_{\pm} \quad (3.39)$$

Комбинируя условия на скачок, возникающие при вариации этого члена, с граничными членами, возникающими при вариации членов, содержащих производные $\check{\phi}$, $\check{\chi}$, мы получаем следующие условия сшивания,

$$[\rho' \check{S}]_{\pm} = 0, \quad [2\partial_y \check{\phi} + \Phi' \check{S}]_{\pm} = 0, \quad [2\partial_y \check{\chi} + H' \check{S}]_{\pm} = 0. \quad (3.40)$$

Первое условие обеспечивает выполнение связи (3.33) по обе стороны браны без скачков в $\check{\phi}$ и $\check{\chi}$. После разрешения связи условия сшивания записываются для функций профиля скалярных флуктуаций следующим образом,

$$\begin{aligned} [\partial_y \phi^{(m)}]_{\pm} &= -\frac{2Z}{3M_*^3} \frac{\Phi'|_{y=0}}{\rho'|_{0+}} \left(\Phi' \phi^{(m)} + H' \chi^{(m)} \right) \Big|_{y=0} \\ &\quad - 4\rho'|_{0+} \phi^{(m)}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} [\partial_y \chi^{(m)}]_{\pm} &= -\frac{2Z}{3M_*^3} \frac{H'|_{y=0}}{\rho'|_{0+}} \left(\Phi' \phi^{(m)} + H' \chi^{(m)} \right) \Big|_{y=0} \\ &\quad - 4\rho'|_{0+} \chi^{(m)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Для определения предела выключенной гравитации удобно параметризовать взаимодействие с помощью некоторого безразмерного параметра κ таким же образом, как это было сделано для минимальной модели $Z = \frac{3\kappa M_*^3}{M^2}$, где M - характерный масштаб самодействия скалярных полей. Если в модели нет тонкой браны-дефекта, т.е. $\lambda_b = 0$, в пределе выключенной гравитации $\kappa \rightarrow 0$ спектральное уравнение (3.38) в сравнении с уравнениями модели без гравитации (3.3) приобретает нетривиальные поправки поскольку

$$\hat{\mathcal{M}}_{NP} \longrightarrow -\frac{2}{M^2} \partial_y \left[\frac{\kappa}{\rho'} \begin{pmatrix} (\Phi')^2 & \Phi' H' \\ \Phi' H' & (H')^2 \end{pmatrix} \right] \neq 0, \quad (3.43)$$

Аналогично, условия сшивания (3.41),(3.42) остаются нетривиальными из-за множителя κ/ρ' . Как мы увидим в следующем разделе, для новых уравнений существенным образом меняется спектр скалярных флуктуаций.

Однако, если ввести достаточно большое положительное натяжение браны $\lambda_b \gg \kappa M$, эти сингулярные эффекты в пределе слабой гравитации полностью уходят как из спектрального уравнения за пределами браны, так и в условиях сшивания. Таким образом, возможно организовать гладкий предел в модели без гравитации, удерживая натяжение браны большим в сравнении с κM . Интересно сравнить результаты для этого предела с результатами для предела слабой гравитации $\kappa \rightarrow 0$ также при малом натяжении браны $\lambda_b \simeq \kappa M$, когда рассмотренные вклады остаются нетривиальными.

Найденный результат можно обобщить на случай многих полей,

$$\left(-\partial_y^2 + \partial^2 V + \hat{\mathcal{M}}_{NP} - 2\rho'' + 4(\rho')^2 \right) \phi^{(m)} = e^{2\rho} m^2 \phi^{(m)}, \quad (3.44)$$

где $\phi^{(m)}$ - столбец из флуктуаций для разных полей, а

$$\left[\hat{\mathcal{M}}_{NP} \right]_{ij} = \frac{2Z}{3M_*^3} (-\partial_y + 4\rho') \left[\frac{1}{\rho'} \Phi'_i \Phi'_j \right] \quad (3.45)$$

Можно было бы задаться вопросом, влияют ли эти вклады на стабильность многополевой конфигурации найденной в разделе 2.2.2. При проверке с той же тестовой функцией, что и в разделе 3.1.2 по крайней мере для $\beta = \frac{1}{3}$ численный расчет дает отрицательное значение.

3.3. Спектр флуктуаций в канале ϕ в фазе с $\langle H \rangle = 0$

3.3.1. Уравнение и условие сшивания

Когда $\langle H \rangle = 0$ уравнения движения (2.12) требуют $\partial^2 V / \partial \Phi \partial H = 0$ и две скалярные моды расщепляются. В этом случае уравнение на $\phi^{(m)}$ (3.38) может быть записано с использованием уравнений (2.10)-(2.12) в следующей факторизованной форме,

$$(-\partial_y + \mathcal{P})(\partial_y + \mathcal{P}) \phi^{(m)} = e^{2\rho} m^2 \phi^{(m)}, \quad (3.46)$$

где $\mathcal{P} = \frac{\rho''}{\rho'} - \frac{\Phi''}{\Phi'} + 2\rho'$.

Это уравнение за пределами тонкой браны должно быть дополнено условиями сшивания,

$$\left[\partial_y \phi^{(m)} \right]_{\pm} = -\frac{2Z}{3M_*^3} \frac{(\Phi'|_{y=0})^2}{\rho'|_{0+}} \phi^{(m)}|_{y=0} - 4\rho'|_{0+} \phi^{(m)}. \quad (3.47)$$

Эти условия сшивания можно интерпретировать также как вклад в потенциал δ -функции

$$-\left(\frac{Z}{3M_*^3} \frac{(\Phi'|_{y=0})^2}{\rho'|_{0+}} + 2\rho'|_{0+} \right) \delta(y). \quad (3.48)$$

Рассмотрим теперь модель с четверным взаимодействием, описанную в разделе 2.1.2. Если считать $\lambda_b = \kappa Mb$ в пределе нулевой гравитации $\kappa \rightarrow 0$ решения в ϕ канале могут быть получены точно. Уравнение (3.46) в этом пределе принимает вид,

$$Q_b Q_b^\dagger \phi^{(m)} = \frac{m^2}{M^2} \phi^{(m)}, \quad (3.49)$$

$$Q_b = -\partial_\tau + \frac{\tilde{\rho}_1''}{\tilde{\rho}_1 + b} - \frac{\Phi''}{\Phi'}, \quad (3.50)$$

$$Q_b^\dagger = \partial_\tau + \frac{\tilde{\rho}_1''}{\tilde{\rho}_1 + b} - \frac{\Phi''}{\Phi'}, \quad (3.51)$$

где $\tau = M\beta y$ и $\rho = \kappa\tilde{\rho}_1 + \kappa b\tau + O(\kappa^2)$.

Вообще говоря, этот потенциал может иметь сингулярности в точках, в которых $\tilde{\rho}_1 + b$ обращается в ноль. Решения могут быть найдены в областях, где потенциал является регулярным и затем сшиты в сингулярных точках и на тонкой бране. Мы можем использовать факторизацию соответствующего оператора для построения потенциала-суперпартнера [20–22, 54, 98, 136], который оказывается не зависящим от b ,

$$Q_b^\dagger Q_b = -\partial_\tau^2 + 4 - \frac{2}{\cosh^2 \tau}. \quad (3.52)$$

Решения с ненулевыми массами $m^2 \neq 0$ могут быть построены из решений для потенциала-суперпартнера,

$$\phi^{(m)} = Q_b \check{\phi}^{(m)}, \quad Q_b^\dagger Q_b \check{\phi}^{(m)} = \frac{m^2}{M^2} \check{\phi}^{(m)} \quad (3.53)$$

Этот потенциал-суперпартнер является хорошо известным точно решаемым потенциалом и также допускает другую факторизацию, которая связывает его решения с решениями для постоянного потенциала,

$$\tilde{Q} = -\partial_\tau + \tanh \tau, \quad \tilde{Q} = \partial_\tau + \tanh \tau \quad (3.54)$$

$$Q_b^\dagger Q_b = \tilde{Q} \tilde{Q}^\dagger + 3, \quad \tilde{Q}^\dagger \tilde{Q} = 1 \quad (3.55)$$

Таким образом, мы можем построить решения из непрерывного спектра из решений для постоянного потенциала,

$$\begin{aligned} f_b^{(m)} &= Q_b \tilde{Q} \sin k\tau, & g_b^{(m)} &= Q_b \tilde{Q} \sin k\tau \cos k\tau, \\ m^2 &= M^2(4 + k^2) \end{aligned} \quad (3.56)$$

В дальнейшем удобно также использовать их линейную комбинацию, обращающуюся в ноль в $y = 0$,

$$\begin{aligned} f_b^{(m),0} &= b(1 + k^2)f^{(m)} - kg^{(m)}, \\ (f_b^{(m),0})'|_{y=0} &= -k(k^2 + 1)(k^2 + 4)b. \end{aligned} \quad (3.57)$$

При поиске локализованных состояний для полноты требуется рассмотреть все решения, не ограничиваясь требованием нормируемости, которое будет обеспечиваться адекватной сшивкой в сингулярных точках и на тонкой бране. В частности необходимо рассмотреть и найденные выше решения непрерывного спектра, имеющие мнимый параметр k , что соответствует массе меньшей, чем $2M$. Без сшивания возможно построить решение, убывающее на бесконечности с одной стороны от тонкой браны, которое, однако, экспоненциально растет с другой стороны. При соответствующем сшивании возможно построить нормируемые решения, но только при определенных значениях k .

Для потенциала-суперпартнера $Q_b^\dagger Q_b$ также существует два решения с $m^2 = 3M^2$, которые не могут быть получены из решений для постоянного по-

тенциала. Для потенциала в ϕ канале они дают следующие два решения,

$$\phi_b^{(\sqrt{3}M)} = Q_b \frac{1}{\cosh \tau}, \quad (3.58)$$

$$\tilde{\phi}_b^{(\sqrt{3}M)} = Q_b \left(\sinh \tau + \frac{x}{\cosh \tau} \right). \quad (3.59)$$

Первое убывает на бесконечности, в то время как второе на бесконечности экспоненциально возрастает.

Кроме решений, построенных из решений для потенциала-суперпартнера, также существуют решения с нулевой массой. Они могут быть записаны в следующем модельно-независимом виде,

$$\omega_b = \frac{\Phi'}{\rho'}, \quad \tilde{\omega}_b = \omega_b \int^\tau d\tau' \frac{1}{\omega_b^2(\tau')} \quad (3.60)$$

Заметим, что ω_b убывает на бесконечности, но может иметь сингулярности в точках, в которых ρ' обращается в ноль, в то время как $\tilde{\omega}_b$, наоборот, обращается в ноль одновременно с ρ' , но асимптотически экспоненциально возрастает. С соответствующими условиями сшивания оба решения могут дать вклад в спектр флуктуаций в ϕ канале.

3.3.2. Спектр в отсутствие дефекта

В случае отсутствия дефекта потенциал содержит сингулярный барьер $\sim \frac{2}{\tau^2}$, который не допускает появления локализованных состояний [23]. Заметим, что наличие этого сингулярного барьера может быть замечено уже в исходном уравнении (3.46) и не связано с рассматриваемым пределом $\kappa \rightarrow 0$. Потенциал в этом случае изображен на иллюстрации 3.1.

Существует два набора решений непрерывного спектра, которые соответствуют частицам, живущим по разные стороны браны.

$$\phi_{>}^{(m)} = \begin{cases} g_0^{(m)}, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}, \quad \phi_{<}^{(m)} = \begin{cases} 0, & \tau > 0 \\ g_0^{(m)}, & \tau < 0 \end{cases}, \quad (3.61)$$

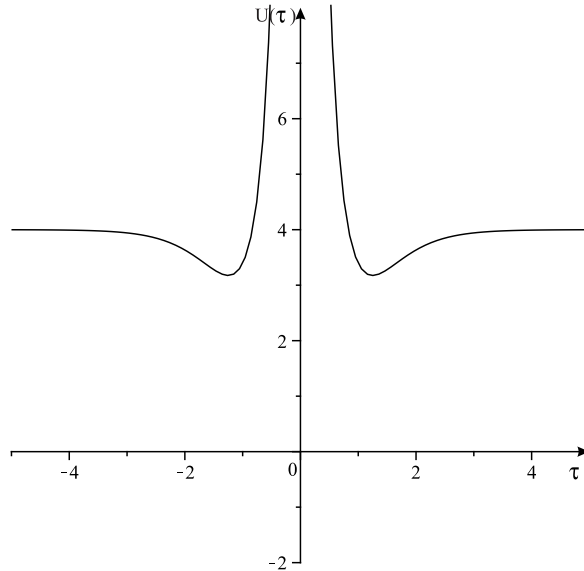


Рис. 3.1. Потенциал в ϕ канале в отсутствие дефекта

где,

$$g_0^{(m)} = \frac{3k^2 - (4 + k^2) \tanh^2 \tau}{3 - \tanh^2 \tau} \cos k\tau + \frac{3k(1 + \tanh^2 \tau)}{\tanh \tau (3 - \tanh^2 \tau)} \sin k\tau, \quad (3.62)$$

Масса этих состояний равна $m^2 = M^2(4 + k^2)$. И решение $g_0^{(m)}$ и его первая производная обращаются в ноль в $\tau = 0$. Таким образом, $\phi_{>}^{(m)}$ и $\phi_{<}^{(m)}$ не имеют проблем с интегрируемостью, связанных с сингулярным барьером.

Что касается локализованных состояний, как из ω_0 и $\tilde{\omega}_0$, так и из $\phi_0^{(\sqrt{3}M)}$ и $\tilde{\phi}_0^{(\sqrt{3}M)}$ оказывается невозможным построить решения, которые были бы нормируемы. Также не существует нормируемого состояния построенного из решений непрерывного спектра с мнимым k . Таким образом в отсутствие дефекта не существует каких-либо локализованных состояний, включая (нормируемую) нуль-моду Гольдстоуна, связанную со спонтанным нарушением трансляционной симметрии.

Причина состоит в том, что соответствующие флуктуации браны могут быть полностью компенсированы калибровочным преобразованием (3.30) и не дают вклад в инвариантную часть спектра. Можно сказать, что с учетом грави-

тации, индуцированной браной, последняя становится более жесткой, поскольку для нее допускаются только тяжелые флуктуации. Разумеется, сами калибровочные преобразования (3.30) оставляют инвариантной только квадратичное действие, поэтому следу Гольдстоуновской моды могут все равно влиять на вершины взаимодействия между гравитацией и скалярными полями высших порядков.

3.3.3. Спектр при положительном натяжении тонкой браны

В случае, если моделирующая дефект тонкая брана обладает положительным натяжением, как было указано в разделе 2.3, нули первой производной метрического фактора ρ' (а вместе с ней и сингулярные барьеры в потенциале (3.46)) смещаются в область, которая отрезается при сшивании. Таким образом за пределами тонкой браны потенциал оказывается регулярен. Условия сшивания (3.47) могут быть интерпретировано как δ -образная яма. Потенциал для положительного натяжения браны изображен на иллюстрации 3.2.

Для этого случае также существует два набора решений непрерывного спектра. Первый набор строится из решений $g_b^{(m)}$ с разными знаками b по разные стороны тонкой браны.

$$\begin{aligned} \phi^{(m)} &= \begin{cases} g_b^{(m),0}, & \tau > 0 \\ g_{-b}^{(m),0}, & \tau < 0 \end{cases}, \quad m^2 = M^2(4 + k^2), \\ \phi^{(m)}|_{y=0} &= -(k^2 + 1), \\ (\phi^{(m)})'|_{y=0+} &= (\phi^{(m)})'|_{y=0-} = \frac{k^2 + 1}{b}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

В результате получается решение четное относительно отражение по τ (по y).

Второй набор решений непрерывного спектра строится сшиванием решений, обращающихся в ноль (3.57) с разными знаками b по разные стороны тон-

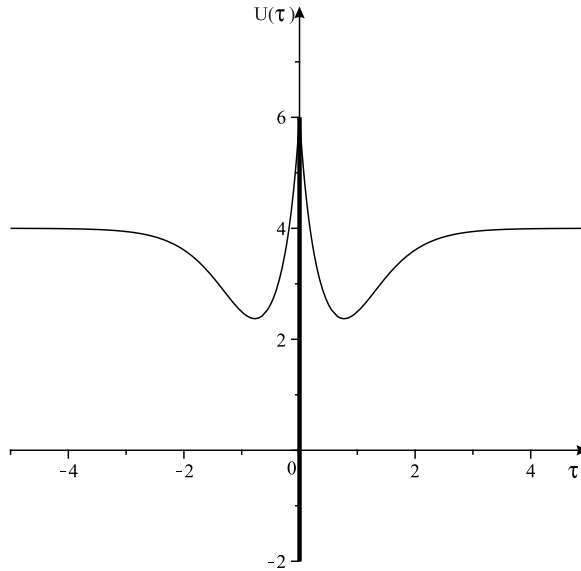


Рис. 3.2. Потенциал в ϕ канале при положительном натяжении браны $b = +\frac{1}{2}$. Жирная линия в $\tau = 0$ обозначает δ -образную яму

кой браны.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{(m)} &= \begin{cases} f_b^{(m),0}, & \tau > 0 \\ f_{-b}^{(m),0}, & \tau < 0 \end{cases}, \quad m^2 = M^2(4 + k^2), \\ \tilde{\phi}^{(m)}|_{y=0} &= 0, \\ (\tilde{\phi}^{(m)})'|_{y=0+} &= (\tilde{\phi}^{(m)})'|_{y=0-} \end{aligned} \quad (3.64)$$

В результате получается решение нечетное относительно отражение по τ (по y).

Нуль-мода может быть построена как симметричное решение с разными знаками b по разные стороны браны,

$$\begin{aligned} \phi^{(0)} &= \begin{cases} \omega_b, & \tau > 0 \\ -\omega_{-b}, & \tau < 0 \end{cases}, \\ \phi^{(0)}|_{y=0} &= \frac{\Phi'(0)}{b}, \\ (\phi^{(0)})'|_{y=0+} &= -(\phi^{(0)})'|_{y=0-} = -\frac{1}{3b^2}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

За счет симметризации оно удовлетворяет условиям сшивания (3.47). Заметим,

что оно существует даже в том случае, если регулярная часть потенциала больше нуля во всем пространстве. Происходит это за счет условия сшивания (3.47), которое, как уже было сказано, может быть интерпретировано как δ -образная яма, которая оказывается глубокой в точности настолько, насколько это нужно для существования нуль-моды.

Возможное тяжелое локализованное состояние $\phi_b^{(\sqrt{3}M)}$ как симметричное решение не удовлетворяет условиям сшивания (3.47), а как антисимметричное имеет разрыв $\left[\phi_b^{(\sqrt{3}M)}\right]_{\pm} = 2/b$. Хотя не существует локализованного состояния с массой $\sqrt{3}M$ возможно построить массивное локализованное состояние из решений непрерывного спектра с мнимым значением k . Такое симметричное состояние записывается в виде,

$$\phi^{(m_h)} = \begin{cases} f_b^{(m_h),0}, \\ -f_{-b}^{(m_h),0} \end{cases}, \quad k_h = i\tilde{k}_h = i\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2a},$$

$$m_h^2 = M^2 \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2} + 6a^2}{2a^2} \quad (3.66)$$

$$f_b^{(m_h),0} = \frac{e^{-\tilde{k}_h \tau}}{\cosh^2 \tau} \frac{1}{3 \tanh \tau - \tanh^3 \tau + 3b} \cdot \left[\tilde{k}_h^2 (1 + 2 \cosh^2 \tau) + \sinh^2 \tau + 3\tilde{k}_h \sinh \tau \cosh \tau \right] \quad (3.67)$$

В пределе $b \rightarrow 0$ нуль-мода становится сингулярной. При этом соответствующее действие неинтегрируемым, следовательно это состояние не дает вклад в интеграл по путям для рассматриваемой модели. Массивное локализованное состояние в этом пределе совпадает с граничным состояние непрерывного спектра $g^{(0)}$ с массой $m_h^2 \rightarrow 4M^2$. Таким образом, модель с дефектом в виде тонкой браны с положительным натяжением в пределе нулевого натяжения совпадает с моделью без дефекта.

С другой стороны, в пределе очень больших b потенциал (3.46) совпадает с потенциалом в модели без гравитации,

$$Q_b Q_b^\dagger \rightarrow -\partial_\tau^2 + 4 - \frac{6}{\cosh^2 \tau} \quad (3.68)$$

в то время как условия сшивания (3.47) становятся тривиальными. Нуль-мода и массивное локализованное состояние в этом пределе совпадают с соответствующими состояниями в модели без гравитации, рассмотренными в разделе 3.1.

$$b\phi^{(0)} \Rightarrow \frac{1}{\cosh^2 \tau} = \Phi', \quad b\phi^{(m_h)} \rightarrow \frac{\sinh \tau}{\cosh^2 \tau}, \quad m_h^2 \rightarrow 3M \quad (3.69)$$

Само собой предел больших b проблематичен, поскольку мы с самого начала считали малым $\lambda_b \sim \kappa M$. Рассмотрим теперь предел нулевой гравитации $\kappa \rightarrow 0$, при котором натяжение браны λ_b остается большим в сравнении с κM . Тогда уравнение (3.46) за пределами браны, совместно с условиями сшивания на бране (3.47) может быть записано как,

$$\left(-\partial_\tau^2 + \frac{1}{M^2\beta^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} + \frac{4\lambda_b^2}{M^2\beta^2} - \frac{4\lambda_b}{M\beta} \delta(\tau) \right) \phi^{(m)} = m^2 e^{2\lambda_b|\tau|/M\beta} \phi^{(m)} \quad (3.70)$$

И в пределе нулевого натяжения $\lambda_b \rightarrow 0$ оно совпадает как с соответствующим уравнением в модели без гравитации, так и с пределом больших b ,

$$\left(-\partial_\tau^2 + \frac{1}{M^2\beta^2} \partial^2 V \right) \phi^{(m)} = m^2 \phi^{(m)}, \quad (3.71)$$

причем условия сшивания становятся тривиальными (δ -функция уходит из потенциала).

3.3.4. Спектр при отрицательном натяжении тонкой браны

Можно также рассмотреть случай малого отрицательного натяжения тонкой браны, моделирующей дефект. Заметим, что при этом мы выбираем $b > -\frac{2}{3}$ для того, чтобы сохранить геометрию типа Анти-де Ситтера на больших τ . В этом случае мы получаем два сингулярных барьера в $\pm\tau_b$, где

$$\tanh^3 \tau_b - 3 \tanh \tau_b - 3b = 0 \quad (3.72)$$

, которые образуют в окрестности браны потенциальную яму с бесконечными стенками и делят объемлющее пространство-время на три независимые друг от друга области. Условие сшивания (3.47) в этом случае играет роль δ -образного

барьера. Потенциал изображен на иллюстрации 3.3. Спектр за пределами ямы, образованной барьерами, является непрерывным. Решения записываются как,

$$\phi_{>}^{(m)} = \begin{cases} A_a f_b^{(m)} + B_b g_b^{(m)}, & \tau > \tau_b \\ 0, & \tau < \tau_b \end{cases}, \quad (3.73)$$

$$\phi_{<}^{(m)} = \begin{cases} 0, & \tau > -\tau_b \\ A_{-b} f_{-b}^{(m)} + B_{-b} g_{-b}^{(m)}, & \tau < -\tau_b \end{cases}, \quad (3.74)$$

где коэффициенты равны,

$$A_b = \frac{k \sin k\tau_b \cosh \tau_b + \sinh \tau_b \cos k\tau_b}{\cosh^5 \tau_b}, \quad (3.75)$$

$$B_b = \frac{k \cos k\tau_b \cosh \tau_b - \sin k\tau_b \sinh \tau_b}{\cosh^5 \tau_b} \quad (3.76)$$

Внутри потенциальной ямы, образованной сингулярными барьерами, существует дискретный спектр состояний, которые обращаются в ноль в $\tau = \pm\tau_b$ и остаются равными нулю за пределами ямы. Есть два набора этих решений, которые строятся сшиванием решений непрерывного спектра $f_b^{(m)}$ и $g_b^{(m)}$. Первый (четный по τ) набор составлен из решений $g_b^{(m)}$ с разными знаками b по разные стороны браны,

$$\phi^{(m)} = \begin{cases} g_b^{(m),0}, & 0 < \tau < \tau_b \\ g_{-b}^{(m),0}, & -\tau_b < \tau < 0, \\ 0, & |\tau| > \tau_b \end{cases},$$

$$m^2 = M^2(4 + k^2),$$

$$\phi^{(m)}|_{y=0} = -(k^2 + 1),$$

$$(\phi^{(m)})'|_{y=0+} = -(\phi^{(m)})'|_{y=0-} = \frac{k^2 + 1}{b}, \quad (3.77)$$

Условие на k записывается как,

$$\tan k\tau_b = -\tanh \tau_b \quad (3.78)$$

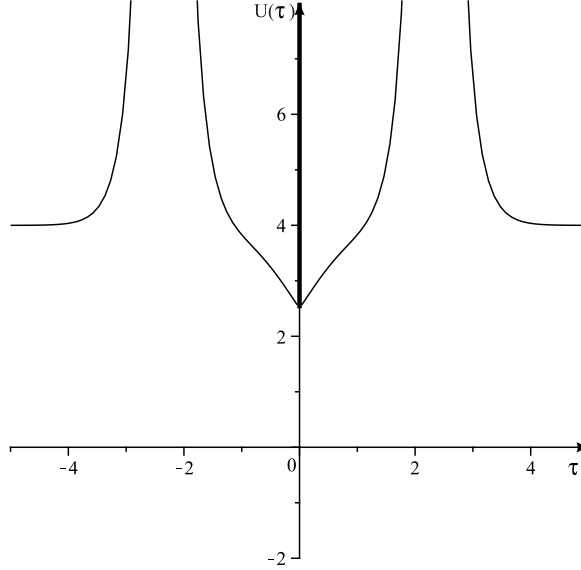


Рис. 3.3. Потенциал в ϕ канале при отрицательном натяжении браны $b = -\frac{1,999}{3}$. Жирная линия в $\tau = 0$ обозначает δ -образный барьер

и, следовательно, спектр масс записывается как,

$$\begin{aligned} k_n &= -\frac{\arctan(\tanh \tau_b)}{\tau_b} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ m_n^2 &= M^2(4 + k_n^2) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Второй (нечетный по τ) набор решений, составленных из непрерывного спектра, строится сшиванием решений (3.57), обращающихся в ноль в $\tau = 0$ и с разными знаками b по разные стороны от браны,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{(m)} &= \begin{cases} f_b^{(m),0}, & \tau > 0 \\ f_{-b}^{(m),0}, & \tau < 0 \end{cases}, \quad m^2 = M^2(4 + k^2), \\ \tilde{\phi}^{(m)}|_{y=0} &= 0, \\ (\tilde{\phi}^{(m)})'|_{y=0+} &= (\tilde{\phi}^{(m)})'|_{y=0-}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Условие на $k > 0$ записывается как,

$$\begin{aligned} \tan k\tau_b &= k \frac{(1 + k^2) \tanh^3 \tau_b - 3k^2 \tanh \tau_b}{-3k^2 - (1 + k^2)(3 \tanh^2 \tau_b - \tanh^4 \tau_b)} \\ &\simeq \frac{3 \tanh \tau_b - \tanh^2 \tau_b}{\tanh^4 \tau_b - 3 \tanh^2 \tau_b - 3} \frac{1}{\tau_b} \cdot (k\tau_b), \end{aligned} \quad (3.81)$$

Для очень малых τ_b оно может быть записано как $\tan \tau_b k = \tau_b k$. Как и следовало ожидать для $b \rightarrow 0$ эти состояния становятся очень тяжелыми и отцепляются. Это условие на k удовлетворяется также двумя решениями с мнимыми $k = i, 2i$, которые допустимы, поскольку решение имеет компактный носитель по построению. Однако они оказываются тривиальными $\phi = 0$.

Решения для нулевой массы ω_b не подходит, поскольку является сингулярным при $\tau = \pm \tau_b$. С другой стороны другое решение для нулевой массы $\tilde{\omega}_b$ и его первая производная $\tilde{\omega}'_b$ обращается там в ноль, и, таким образом, могло бы образовывать нормируемую нуль-моду внутри ямы. Это решение, однако, не удовлетворяет условиям сшивания (3.47).

3.4. Спектр флуктуций в канале χ и скалярное состояние типа Хиггса

3.4.1. χ канал в фазе с $\langle H \rangle = 0$

Рассмотрим теперь флуктуации в χ -канал в фазе с $\langle H \rangle = 0$,

$$\left(-\partial_y^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial H^2} + 4(\rho')^2 - 2\rho'' - 2\lambda_b \delta(y) \right) \chi_m = e^{2\rho} m^2 \chi^{(m)}, \quad (3.82)$$

В этой фазе как нетривиальная часть массового оператора (3.36) не дает вклад в потенциал χ канала, и он остается регулярным за пределами тонкой браны. Для минимальной модели с четверным взаимодействием, введенной в разделе 2.1.2, этот потенциал в пределе выключенной гравитации $\kappa \rightarrow 0$ и малого натяжения тонкой браны $\lambda_b = \kappa \beta M b$ записывается как,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(y) &= -2\Delta_H + 2\Phi_0^2 - 2\rho \\ &= (M^2 - 2\Delta_H) + M^2 \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 My} \right), \end{aligned} \quad (3.83)$$

причем δ -функция в этом пределе уходит из потенциала, поскольку условие сшивания (3.42) становится тривиальным. Таким образом, в этом пределе по-

тенциал в χ канале совпадает с соответствующим потенциалом в модели без гравитации, описанным в разделе 3.1.

Единственным локализованным состоянием является,

$$\hat{\chi} \rightarrow \chi_0 \simeq 1/\cosh(My), \quad m_0^2 = M^2 - 2\Delta_H + O\left(\kappa, \frac{\lambda_b}{M}\right). \quad (3.84)$$

Таким образом, в фазе с ненарушенной τ -симметрией при

$$2\Delta_H < M^2 + O\left(\kappa, \lambda_b/M\right), \quad (3.85)$$

легчайшая скалярная флуктуация в χ канале обладает положительной массой и система оказывается стабильной. В критической точке, $2\Delta_H = M^2 + O(\kappa)$, легчайшая скалярная флуктуация не обладает массой. Для $M^2 < 2\Delta_H \leq 2M^2$ локализованное состояние χ_0 , как и следовало ожидать, представляет собой тахион, таким образом, сигнализируя о нестабильности фазы с ненарушенной τ -симметрией. Взамен, истинному минимуму соответствует решение (2.29), нарушающее τ -симметрию [17].

Рассмотрим теперь поправку к массе этого состояния в критической точке с учетом результатов, полученных в разделе 2.3. Уравнения за пределами браны на поправки по κ и λ_b/M соответственно,

$$\begin{aligned} (\partial_\tau^2 + 1 - 2\Phi_0^2)\chi_{1,0,0} &= \left[\left(\frac{1}{\beta^2}\right)_{1,0,0} (-1 + 2\Phi_0^2) + (-\Delta_H^{1,0} + 2\Phi_{1,0,0}^2) - 2\rho_{1,0}'' \right] \chi_0 \\ &\quad - (m^2)_{1,0,0} \chi_0, \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} (\partial_\tau^2 + 1 - 2\Phi_0^2)\chi_{0,1,0} &= \left[\left(\frac{1}{\beta^2}\right)_{0,1,0} (-1 + 2\Phi_0^2) + (-\Delta_H^{0,1} + 2\Phi_{0,1,0}^2) \right] \chi_0 \\ &\quad - (m^2)_{0,1,0} \chi_0, \end{aligned} \quad (3.87)$$

причем,

$$[\partial_y \chi_{1,0,0}]_\pm = 0, \quad [\partial_y \chi_{0,1,0}]_\pm = -4 \quad (3.88)$$

Нормированные решения действительно соответствуют нулевым поправ-

кам к массе $(m^2)_{1,0,0} = (m^2)_{0,1,0} = 0$ и записываются как,

$$\chi_{1,0,0} = \frac{1}{9} \frac{1}{\cosh \tau} \left[\frac{1}{\cosh^2 \tau} - \frac{40}{3} \ln(2 \cosh \tau) + \frac{38}{3} + C_{1,0,0}^\chi \right], \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \chi_{0,1,0}|_{y>0} &= \frac{1}{3} \frac{1}{\cosh \tau} \left[-5\tau + 2 \ln 2 \cdot \ln(1 - \tanh \tau) - \ln^2(1 + \tanh \tau) \right. \\ &\quad \left. - 2\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}(1 - \tanh \tau)\right) + 4 \tanh \tau - 4 \right] + \frac{5}{3} \frac{1}{\cosh \tau + \sinh \tau} \\ &\quad + \frac{4}{3} \left(\ln 2 \cdot \cosh \tau - \ln(1 + \tanh \tau) \cdot \sinh \tau \right), \end{aligned} \quad (3.90)$$

причем $\chi_{0,1,0}(-y) = \chi_{0,1,0}(y)$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что полученные в разделе 2.3 поправки сохраняют картину критического перехода, рассмотренную в пределе нулевой гравитации в [17].

3.4.2. Флуктуации в фазе с $\langle H \rangle \neq 0$

В фазе с нарушенной τ -симметрией, когда $\langle H \rangle \neq 0$, смешивающие члены не обращаются в ноль и спектр скалярных состояний приходится изучать средствами теории возмущений вблизи от критической точки. Далее мы будем рассматривать только предел малых натяжений браны, считая $\lambda_b = \kappa M b$. Нульмода в χ канале в этой фазе приобретает массу и ненулевую компоненту ϕ . В связи с этим, будем использовать следующее разложение,

$$\begin{aligned} \chi^{(m)} &= \sum_{n,k} \kappa^n \left(\frac{\mu}{M} \right)^k \chi_{n,k}, \\ \phi^{(m)} &= \sum_{n,k} \kappa^n \left(\frac{\mu}{M} \right)^{k+1} \phi_{n,k}, \\ m^2 &= M^2 \sum_{n,k} \kappa^n \left(\frac{\mu}{M} \right)^k (m^2)_{n,k}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

Заметим, что выбор переменных (3.31) продиктован в том числе и желанием обеспечить хорошее разложение в теории возмущений. Для примера, использованные в [1] калибровочно-инвариантные переменные,

$$\phi \cos \theta + \chi \sin \theta, \quad \chi \cos \theta - \phi \sin \theta, \quad \theta = \arctan \frac{H'}{\Phi'} \quad (3.92)$$

в теории возмущений по отклонению от критической точки μ/M обладают плохой асимптотикой, поскольку

$$\sin \theta = \frac{H'}{\sqrt{(\Phi')^2 + (H')^2}} = \frac{H'}{\Phi'} + O\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right) \simeq e^\tau + O\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right) \quad (3.93)$$

Спектральные уравнения (3.38) в итерированной форме принимают следующий вид,

$$-Q_b Q_b^\dagger \phi_{0,k} + (m^2)_{0,k} \phi_{0,0} = \mathcal{F}_{0,k}, \quad (3.94)$$

$$-\tilde{Q} \tilde{Q}^\dagger \chi_{0,k+1} + (m^2)_{0,k+1} \chi_{0,0} = \mathcal{H}_{0,k} \quad (3.95)$$

где Q_b и \tilde{Q} определяются таким же образом как и в разделе 3.3, в то время как

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{0,k} = & \sum_{l=0}^k \left[4\Phi_0 H_0 - \left((-1)^{k-l} \frac{2(\rho'_{1,1})^{k-l}}{(\rho'_{1,0})^{k-l+1}} \Phi'_0 H'_0 \right)' \right] \chi_l \\ & + \sum_{l=0}^{k-1} \left[-2 + 6\Phi_0^2 + 2H_0^2 + \left((-1)^{k-l} \frac{2(\rho'_{1,1})^{k-l+1}}{(\rho'_{1,0})^{k-l+2}} \Phi_0^2 \right)' \right] \phi_{0,l} \\ & - \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{k-l} (m^2)_{0,l} \phi_{0,r}, \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{0,k+1} = & \sum_{l=0}^k \left[4\Phi_0 H_0 - \left((-1)^{k-l} \frac{2(\rho'_{1,1})^{k-l}}{(\rho'_{1,0})^{k-l+1}} \Phi'_0 H'_0 \right)' \right] \phi_l \\ & + \sum_{l=0}^k \left[-2 + 2\Phi_0^2 + 6H_0^2 - \left((-1)^{k-l} \frac{2(\rho'_{1,1})^{k-l+1}}{(\rho'_{1,0})^{k-l+2}} H_0^2 \right)' \right] \chi_{0,l} \\ & - \sum_{l=1}^k \sum_{r=0}^{k-l+1} (m^2)_{0,l} \phi_{0,r}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Решения получаются интегрированием этих уравнений,

$$\begin{aligned} \phi_{0,k}(\tau) = & \omega(\tau) \int_0^\tau d\tau' \frac{1}{\omega_b^2(\tau')} \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau'' \\ & \omega(\tau'') \left(\mathcal{F}_{0,k}(\tau'') - (m^2)_{0,k} \phi_{0,0}(\tau'') \right), \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \chi_{0,k} = & \frac{1}{\cosh \tau} \int_0^\tau d\tau' \cosh^2 \tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \\ & \frac{1}{\cosh \tau''} \left(\mathcal{H}_{0,k}(\tau'') - (m^2)_{0,k} \chi_{0,0}(\tau'') \right), \end{aligned} \quad (3.99)$$

где $\omega_b = \frac{\Phi'_0}{\rho'_{1,0}}$ убывающее на бесконечности решение для нулевой массы в ϕ канале. Масса получается интегрированием уравнения для соответствующего порядка поля χ , считая, что оно нормируемо,

$$(m^2)_{0,k} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{0,0} \mathcal{H}_{0,k} d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{0,0}^2 d\tau}. \quad (3.100)$$

Используя итерированные уравнения (3.94),(3.95) и условия сшивания (3.41),(3.42) мы получаем следующие поправки к профилям ϕ и χ ,

$$\phi_{0,0}(\tau) \Big|_{b \geq 0} = \epsilon(\tau) \tilde{\phi}_b(|\tau|), \quad \chi_{0,0} \Big|_{b \geq 0} = \tilde{h}(|\tau|), \quad (3.101)$$

$$\tilde{\phi}_b = \frac{\tanh^2 \tau - 2 \ln \cosh \tau - 3b\tau}{\cosh^2 \tau \cdot (3b + 3 \tanh^2 \tau - \tanh^3 \tau)}, \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_b = & \frac{C_{0,1}^\chi}{\cosh \tau} + \frac{\tanh \tau}{2 \cosh \tau (2 \cosh^2 \tau + 1) + 6b \cosh^2 \tau} \\ & \cdot \left[\left(4 \cosh^2 \tau \ln(2 \cosh \tau) + 2 \ln 2 + 3 \right) + \right. \\ & \left. + b \cosh^2 \tau \cdot \left(6\tau + (3 + 6 \ln 2) \coth \tau \right) \right] \end{aligned} \quad (3.103)$$

где $C_{0,1}^\chi$ зависит от нормировки $\chi^{(m)}$. Для того, чтобы удерживать нормировку постоянной, следующий порядок разложения $\chi_{0,1}$ должен быть ортогонален главному $\chi_{0,0}$. В случае без тонкой браны - дефекта $b = 0$ эта константа может быть найдена аналитически,

$$\begin{aligned} C_{0,1}^\chi \Big|_{b=0} = & \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\text{Li}_2\left(\frac{2}{1-\sqrt{3}}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right) \right) \\ & - \left(\frac{3}{2} + \ln 2 \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{(3)-1}}{\sqrt{(3)+1}} \right) \\ \approx & -1.322 \end{aligned} \quad (3.104)$$

В ведущем порядке разложения масса легкого скалярного состояния не зависит от неотрицательного натяжения тонкой браны-дефекта $b \geq 0$ и оказывается такой же, как и в модели [17] без гравитации,

$$(m^2)_{0,1} \Big|_{b \geq 0} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{0,0} \mathcal{H}_{0,1} d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{0,0}^2 d\tau} = 2, \quad (3.105)$$

В случае же отрицательного натяжения тонкой браны-дефекта $b < 0$ в потенциале ϕ канала и смешивающих членах содержатся сингулярности в точках $\tau = \pm\tau_b$. Главный порядок ϕ тогда сшивается из решений за пределами потенциальной ямы, образованной сингулярными барьерами, и внутри нее

$$\begin{aligned} \phi_{0,0}\Big|_{b<0} &= \epsilon(\tau) \left(\tilde{\phi}_b(|\tau|) + C_{0,0}^{(\phi)} \omega_b(|\tau|) \right) \\ &+ \begin{cases} \tilde{C}_{0,0}^{(\phi)} \epsilon(\tau) \tilde{\omega}_b(|\tau|), & |\tau| < \tau_b \\ 0, & |\tau| > \tau_b \end{cases} \end{aligned} \quad (3.106)$$

где

$$\tilde{\omega}_b = \omega_b \int_{\tau}^{\tau'} \frac{1}{\omega_b^2(\tau')} d\tau' \quad (3.107)$$

а константы выбраны таким образом, чтобы вычесть сингулярности в $\tau = \pm\tau_b$ и чтобы решение $\phi_{0,0}\Big|_{\tau=0} = 0$ удовлетворяло условиям сшивания на бране,

$$C_{0,0}^{(\phi)} = 3b\tau_b + 2 \ln \cosh \tau_b - \tanh^2 \tau_b, \quad \tilde{C}_{0,0}^{(\phi)} = -C_{0,0}^{(\phi)} \frac{\omega_b(0)}{\tilde{\omega}_b(0)}. \quad (3.108)$$

Заметим, что в то время как возможно выбрать константы интегрирования таким образом, чтобы в точках $\pm\tau_b$ не было сингулярностей, невозможно при этом обратить в ноль решение в этих точках $\phi_{0,0}\Big|_{\pm\tau_b} = 0$. На первый взгляд может показаться, что такое решение не удовлетворяет условию интегрируемости действия (3.34), но поскольку это решение спектрального уравнения, сингулярности в потенциале и членах смешивания компенсируют друг друга и соответствующее действие оказывается интегрируемым.

Главный порядок массы при отрицательном натяжении браны оказывается зависящим от b довольно нетривиальным способом,

$$(m^2)_{0,1} \Big|_{b<0} = \frac{p(\tau_b)}{q(\tau_b)} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} p(\tau) = & 8 \ln c(\tau) \cdot s(2\tau)c^2(\tau) \cdot (s(2\tau) + 2\tau(c(2\tau) + 2)) \\ & - \frac{1}{2}s(2\tau) \cdot (2c(\tau) - s(\tau)) \cdot \left(-3s(\tau) + 3s(3\tau) \right. \\ & \left. + 8c(\tau) + 4c(3\tau) \right) + \tau \left(7s(2\tau) - 2s(4\tau) \right. \\ & \left. - s(6\tau) + 9c(2\tau) + 15 \right) + 4\tau^2(3c(2\tau) + 5) - \\ & - 32 \left((\ln c(\tau))^2 + \tau^2 \right) \cdot c^6(\tau) \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} q(\tau) = & -s(\tau)c(\tau)(5c^2(\tau) \cdot (c(2\tau) + 2) - 3) \\ & + 3\tau(3c^2(\tau) + 1) \end{aligned} \quad (3.111)$$

где $s(\tau) = \sinh \tau, c(\tau) = \cosh \tau$. Для $b \rightarrow 0$ есть гладкий предел к массе в случае без дефекта $(m^2)_{0,1} \rightarrow 2$. В пределе дефекта, полностью компенсирующего геометрию Анти-де-Ситтера на бесконечности $b \rightarrow -\frac{2}{3}$,

$$(m^2)_{0,1} \rightarrow \frac{14}{5} + \frac{16}{5}(\ln 2)^2 + \frac{16}{5} \ln 2 \approx 6.5555 \quad (3.112)$$

Высшие порядки разложений могут быть сосчитаны аналитически в случае $b = 0$. Следующий за главным порядок разложения ϕ выглядит как,

$$\begin{aligned} \phi_{0,1} \Big|_{b=0} = & -(2 \ln 2 + 1)\epsilon(\tau)\tilde{\omega}_0 - \frac{1}{3s(2\tau)(1 + 2c^2(\tau))^2} \\ & \cdot \left[9 - 8c^6(\tau) + 7c^4(\tau) - 4c^2(\tau) - 4c^8(\tau) + 6(c^2(\tau) - 2c^4(\tau) + 1) \ln 2 \right. \\ & + 2 \ln c(\tau) \cdot (6c^2(\tau) \cdot (1 + 2c^2(\tau)) \ln 2 + 14c^4(\tau) + 4c^8(\tau) + 6c^6(\tau) + 15c^2(\tau)) \\ & + \tau s(2\tau)(-8c^4(\tau) - 4c^6(\tau) + 2 + c^2(\tau)) + 3c^2(\tau) \cdot (1 + 2c^2(\tau))\tau^2 \\ & \left. + 6C_{0,1}^X \left(c^2(\tau) - 2c^4(\tau) + 1 + 2c^2(\tau) \cdot (1 + 2c^2(\tau)) \ln c(\tau) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.113)$$

где $\epsilon(\tau)$ знаковая функция и

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 \int_0^\tau d\tau' \frac{1}{\omega_0^2(\tau')} = \frac{1}{6 \sinh \tau (2 \cosh^2 \tau + 1)} \cdot \left(2 \sinh \tau \cosh^4 \tau + 3 \sinh \tau \cosh^2 \tau - 3\tau \cosh \tau - 2 \sinh \tau \right) \quad (3.114)$$

Хотя решение $\phi_{0,1}$ является непрерывно дифференцируемым, его вторая производная претерпевает скачок в $\tau = 0$ и ведет себя вблизи этой точки как $\sim \pm (\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}) \tau^2$. Этот скачок компенсирован в уравнении членами, в которых это решение $\phi_{0,1}$ умножается на расходящуюся в потенциале $\sim \text{const}/\tau^2$.

Следующий за главным порядок разложения массы оказывается равным

$$(m^2)_{0,2} \Big|_{b=0} = -128\sqrt{3} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{3}}{3} + 146 + \frac{4}{3} \ln 2 \cdot (1 + \ln 2) - \frac{\pi^2}{9} \approx +0.4817, \quad (3.115)$$

в то время как аналогичный результат (3.16) для модели без гравитации в разделе 3.1.1 был равен

$$(m^2)_{0,2}^{NG} = -\frac{130442}{121275} \approx -1.0756. \quad (3.116)$$

Таким образом, мы еще раз обнаруживаем нетривиальное различие в спектре масс скалярных флуктуаций в модели без гравитации и модели с гравитацией в пределе нулевой константы гравитационного взаимодействия.

3.5. Выводы к третьей главе

Во третьей главе был всесторонне изучен вопрос о спектре скалярных флуктуаций в модели с двумя скалярными полями, взаимодействующими с гравитацией. Для этого были введены калибровочно инвариантные переменные, из которых остаются только две независимые ϕ и χ . В массовом операторе для этих флуктуаций обнаружены сингулярные вклады, которые остаются нетривиальными в пределе нулевой гравитации и нулевого натяжения тонкой браны. При

нулевом вакуумном среднем второго поля H два канала отщепляются друг от друга и спектр может быть исследован отдельно.

Спектр скалярных флуктуаций подробно исследован для минимальной модели. В фазе с ненарушенной τ -симметрией сингулярная добавка дает вклад только в массовый оператор для ϕ -канала. Потенциал с учетом этой поправки оказывается точно решаемым. Без дефекта он оказывается сингулярным и допускает только нелокализованные решения непрерывного спектра по обе стороны от браны. Если включен дефект с малым положительным натяжением, в спектре присутствуют как нуль-мода, так и тяжелое локализованное состояние.

Особенно интересен случай тонкой браны-дефекта с малым отрицательным натяжением. При этом сингулярные барьеры делят пространство на три области, не взаимодействующие друг с другом в рассмотренном приближении. В центральной области обнаруживается дискретный спектр идеально локализованных состояний. Этот новый механизм локализации определенно заслуживает более глубокого рассмотрения в будущем с возможным применением к локализации других полей.

В массовый оператор χ -канала в этой фазе не появляются никаких сингулярных добавок и он сводится в пределе нулевой гравитации и натяжения тонкой браны к массовому оператору модели без гравитации. В этом канале в критической точке существует нуль-мода, которая остается таковой с учетом поправок по гравитации и натяжению браны. Показано, что выше критической точки фаза с нулевым вакуумным средним H оказывается нестабильна и система переходит в фазу с нарушенной τ -симметрией. Нуль-мода приобретает массу, которая посчитана для различных значений натяжения тонкой браны по теории возмущений. Любопытно, что в случае без дефекта и положительного натяжения тонкой браны-дефекта в главном порядке она оказывается такой же как в теории без гравитации.

Глава 4

Фермионный сектор

4.1. Локализация массивных фермионов на доменной стенке

В предыдущих главах мы рассмотрели формирование браны как доменной стенки, порожденной минимально взаимодействующими с гравитацией скалярными полями с самодействием. Пользуясь полученными результатами, мы можем поставить вопрос о том, как реализовать реалистичную с точки зрения феноменологии локализованной на ней модель материи.

Основными компонентами Стандартной Модели элементарных частиц являются фермионные поля лептонов и кварков и взаимодействующие с ними калибровочные поля. На низких энергиях интересующая нас часть фермионного сектора может быть записана в виде, [114]

$$\mathcal{L}_{SM} \supset -\frac{g}{\sqrt{2}}\psi_R^\dagger\sigma^\mu W_\mu^+\hat{V}\psi_L + \psi_R^\dagger\hat{M}\psi_L + \psi_R^\dagger\hat{g}h\psi + h.c. \quad (4.1)$$

Где \hat{V} - матрица смешивания – Кабиббо-Кобаяши-Маскавы (СКМ) для кварков или аналогичная матрица Понтекорво-Маки-Накагавы-Сакаты (PMNS) для лептонов, \hat{M} - массовая матрица, а \hat{g} - матрица констант Юкавы взаимодействия фермионов с бозоном Хиггса h . Известный факт, обеспечивающий единственный источник CP -нарушения в Стандартной Модели, состоит в том, что массовая матрица \hat{M} и матрица смешивания \hat{V} не диагонализуются одновременно. С другой стороны стандартный механизм Хиггса обеспечивает одновременную диагонализацию \hat{M} и \hat{g} . Существуют расширения, допускающие CP -нарушение в секторе Хиггса. [9]

С точки зрения механизма локализации может потребоваться рассмотреть по отдельности происхождение необязательно диагональной массовой матрицы

\hat{M} и матрицы смешивания \hat{V} . Последняя требует изучения механизма локализации калибровочных полей. Мы не будем рассматривать в данной работе эту проблему, отсылая читателя к литературе, приведенной в разделе 1.5. Вместо этого будут представлены механизмы локализации фермионов с определенной комплекснозначной массовой матрицей. Ранее эта проблема рассматривалась в работах [43, 51, 111] и в качестве решения предлагалось локализовывать разные киральные компоненты в разных точках объемлющего пространства. Однако для одного дополнительного измерения получается нереалистичная массовая матрица и приходится использовать два дополнительных измерения. В нашей работе мы рассматриваем CP -нарушающую модификацию взаимодействия массообразующего поля. Как будет показано ниже, это вводит дополнительные источники нарушения сохранения CP четности в низкоэнергетической эффективной теории. В данной главе мы большей частью пренебрегаем гравитацией и предполагаем, что объемлющее пространство-время плоское.

Начнем с разъяснения, как захватить фермионную материю на доменной стенке – «толстой бране» с помощью механизма разработанного в [120]. Волновая функция фермиона в этом случае подчиняется уравнению Дирака,

$$[i\gamma_\alpha \partial^\alpha - \Phi(X)]\psi(X) = 0, \quad \gamma_\alpha = (\gamma_\mu, -i\gamma_5), \quad \{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} = 2\eta_{\alpha\beta}, \quad (4.2)$$

где γ_α являются 4-мерными матрицами Дирака в киральном представлении. Захват легких фермионных состояний на 4-мерной гиперповерхности – доменной стенке – «толстой бране» обеспечивается топологически нетривиальной конфигурацией скалярного поля, $\langle \Phi(X) \rangle_0 = \varphi(y)$, которая приводит к появлению нуль-мод в спектре 4-мерных фермионов. Для 4-мерной интерпретации уравнение (4.2) может быть разложено в бесконечный набор фермионов с различными массами,

$$\begin{aligned} [i\gamma_\alpha \partial^\alpha + \varphi(y)][i\gamma_\alpha \partial^\alpha - \varphi(y)]\psi(X) &\equiv (-\partial_\mu \partial^\mu - \hat{m}_y^2)\psi(X); \\ \hat{m}_y^2 &= -\partial_y^2 + \varphi^2(y) - \gamma_5 \varphi'(y) = \hat{m}_+^2 P_L + \hat{m}_-^2 P_R, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ - проекторы на левые и правые состояния. Таким образом, оператор квадрата массы \hat{m}_y^2 состоит из двух киральных партнеров

$$\hat{m}_\pm^2 = -\partial_y^2 + \varphi^2(y) \mp \varphi'(y) = [-\partial_y \pm \varphi(y)][\partial_y \pm \varphi(y)] ; \quad (4.4)$$

$$\hat{m}_+^2 q^+ = q^+ \hat{m}_-^2, \quad \hat{m}_-^2 q^- = q^- \hat{m}_+^2, \quad q^\pm \equiv \mp \partial_y + \varphi(y). \quad (4.5)$$

За счет такой суперсимметрии [20–22, 54, 98, 136] при ненулевых массах левые и правые спиноры в (4.5) образуют биспинор, описывающий 4-мерную массивную Дираковскую частицу, которая, вообще говоря, не является локализованной вблизи какой-либо гиперповерхности в дополнительном измерении для асимптотически постоянных полевых конфигураций $\varphi(y)$. Спектральная эквивалентность может быть нарушена нормируемой нуль-модой одного из операторов массы \hat{m}_\pm^2 . Эта мода выводится из уравнений (4.4) и (4.5)

$$q^- \psi_0^+(x, y) = 0, \quad \psi_0^+(x, y) = \psi_L(x) \exp \left\{ - \int_{y_0}^y dw \varphi(w) \right\}, \quad (4.6)$$

где $\psi_L(x) = P_L \psi(x)$ спинор Вейля свободной частицы в 4-мерном пространстве Минковского. Очевидно, если конфигурация скалярного поля имеет подходящее асимптотическое поведение,

$$\varphi(y) \stackrel{y \rightarrow \pm\infty}{\sim} \pm C_\pm |y|^{\nu_\pm}, \quad \text{Re} \nu_\pm > -1, \quad C_\pm > 0,$$

то волновая функция $\psi_0^+(x, y)$ нормализуема по оси y и описывает бесмассовый левый фермион, локализованный в окрестности доменной стенки. Если $\varphi(y)$ асимптотически постоянна спектр масс Дираковских состояний имеет щель. Примером нечетной топологической конфигурации является фоновое скалярное поле в виде кинка,

$$\varphi^+ = M \tanh(My). \quad (4.7)$$

Два массовых оператора имеют следующие потенциалы,

$$\hat{m}_+^2 = -\partial_y^2 + M^2 [1 - 2\text{sech}^2(My)]; \quad \hat{m}_-^2 = -\partial_y^2 + M^2, \quad (4.8)$$

и левая нормализованная нуль-мода локализована вблизи $y = 0$,

$$\psi_0^+(x, y) = \psi_L(x) \psi_0(y), \quad \psi_0(y) \equiv \sqrt{M/2} \operatorname{sech}(My). \quad (4.9)$$

Очевидно начиная с $m > M$ спектр масс тяжелых Дираковских частиц является непрерывным. Соответствующие волновые функции распространяются в пятое измерение. Чтобы получить легкие фермионы на бране, требуются по крайней мере два пятимерных фермиона $\psi_1(X), \psi_2(X)$, которые обеспечивают левую и правую компоненты четырехмерного Дираковского биспинора как нуль-моды. Нулевые моды с различной киральностью возникают для $\langle \Phi(X) \rangle_0 = \varphi^+(y)$, если эти два фермиона спарены со скалярным полем $\Phi(X)$ с противоположными зарядами,

$$[i \not{\partial} - \tau_3 \Phi(X)] \Psi(X) = 0, \quad \not{\partial} \equiv \hat{\gamma}_\alpha \partial^\alpha, \quad \Psi(X) = \begin{pmatrix} \psi_1(X) \\ \psi_2(X) \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

где $\hat{\gamma}_\alpha \equiv \gamma_\alpha \otimes \mathbf{1}_2$ - матрицы Дирака, а $\tau_a \equiv \mathbf{1}_4 \otimes \sigma_a$, $a = 1, 2, 3$ - матрицы Паули, действующие на компоненты биспинора $\psi_i(X)$. Следующая проблема – наделить полученную безмассовую частицу Дирака небольшой массой. Так как оператор массы смешивает левые и правые компоненты четырехмерного фермиона, он входит в оператор (4.10) как матрица $\tau_1 m_f$. При реализации механизма порождения масс Стандартной Модели при помощи скалярных полей, требуется ввести второе скалярное поле $H_1(X)$, которое заменяет голую массу $\tau_1 m_f \longrightarrow \tau_1 H_1(X)$ в Лагранжевой плотности [17]. Мы обобщаем этот механизм, чтобы наделить фермионы аксиальной массой, за счет ввода еще одного члена $\tau_2 H_2(X)$, [2]

$$\mathcal{L}^{(5)}(\bar{\Psi}, \Psi, \Phi, H) = \bar{\Psi} (i \not{\partial} - \tau_3 \Phi - \tau_1 H_1 - \tau_2 H_2) \Psi. \quad (4.11)$$

Заметим, что произвольный поворот, порождаемый матрицей τ_3 ,

$$\Psi \longrightarrow \exp\left\{i \frac{\alpha}{2} \tau_3\right\} \Psi \quad (4.12)$$

соответствует киральному преобразованию четырехмерных фермионов,

$$\psi \longrightarrow \exp\left\{i\frac{\alpha}{2}\gamma_5\right\}\psi. \quad (4.13)$$

Это преобразование эквивалентно повороту,

$$H_1 \longrightarrow H_1 \cos \alpha + H_2 \sin \alpha, \quad H_2 \longrightarrow H_2 \cos \alpha - H_1 \sin \alpha \quad (4.14)$$

Фаза α соответствует произвольной общей фазе, которой можно наделить массы фермионов и Юкавские константы.

4.2. Нарушение сохранения CP четности в модели с одним скалярным дублетом

Рассмотрим теперь двухполеую модель с минимальным потенциалом, введеную в разделе 2.1.2, считая что поля образуют фоновую конфигурацию с нарушенной τ -симметрией. Рассмотрим следующее взаимодействие двух пятимерных фермионов со скалярным дублетом, [2]

$$\mathcal{L}_f = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 \left(i\gamma_\alpha \partial^\alpha - g_A \Phi \tau_3 - g_1 H \tau_1 - g_2 H \tau_2 \right) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Для изучения 4-мерной физики мы раскладываем поля в бесконечный набор фермионов с определенной 4-мерной массой,

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \sum_m \begin{pmatrix} F_{1L}^{(m)}(y) \\ F_{2L}^{(m)}(y) \end{pmatrix} \psi_L^{(m)}(x) + \begin{pmatrix} F_{1R}^{(m)}(y) \\ F_{2R}^{(m)}(y) \end{pmatrix} \psi_R^{(m)}(x) \quad (4.16)$$

Функции-профили могут быть представлены в виде суперпозиции следующих решений,

$$F_{1L} \equiv F_L, \quad F_{1R} \equiv F_R, \quad F_{2L} = \mp F_R^*, \quad F_{2R} = \pm F_L^* \quad (4.17)$$

Эти две серии решений могут быть связаны друг с другом через киральное преобразование $\psi \rightarrow \gamma^5 \psi$. В действительности сдвиг фазы профилей эквивалентен киральному повороту фермионов.

Уравнения на профили для этих решений принимают вид,

$$(\partial_y + g_A \Phi) F_L - (g_1 - ig_2) H F_R^* = m_f F_R \quad (4.18)$$

$$(-\partial_y + g_A \Phi) F_R + (g_1 - ig_2) H F_L^* = m_f^* F_L \quad (4.19)$$

Предполагая, что $\mu/M \equiv \epsilon \ll 1$, мы считаем член с H малым возмущением.

$$(\partial_y + g_A \Phi) F_L^{(0)} = (m_f^{(0)})^* F_R^{(0)}, \quad (-\partial_y + g_A \Phi) F_R^{(0)} = m_f^{(0)} F_L^{(0)}, \quad (4.20)$$

Тогда в нулевом порядке нет локализованных решений с ненулевым F_R ,

$$F_L^{(0)} = N \operatorname{sech}^{\frac{g_A M}{\beta}}(\beta y), \quad F_R^{(0)} = 0, \quad m_f^{(0)} = 0 \quad (4.21)$$

$$N = \sqrt{\frac{\beta \Gamma(p + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(p)}}, \quad p \equiv \frac{g_A M}{\beta} \quad (4.22)$$

Легко видеть, что F_L четная функция, в то время как F_R нечетная. Домножая (4.19) на $(F_L^{(0)})^*$ и интегрируя от $-\infty$ до $+\infty$, считая F_L и F_R нормируемыми функциями, мы получаем главный порядок фермионной массы,

$$\begin{aligned} m_f^{(1)} &= (g_1 + ig_2) \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dy (F_L^{(0)})^2 H}{\int_{-\infty}^{+\infty} dy |F_L^{(0)}|^2} = (g_1 + ig_2) \mu \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dy \operatorname{sech}^{2p+1}(\beta y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dy \operatorname{sech}^{2p}(\beta y)} = \\ &= (g_1 + ig_2) \mu \frac{(\Gamma(p + \frac{1}{2}))^2}{\Gamma(p) \Gamma(p + 1)}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

Интегрированием (4.19), мы получаем следующий старший порядок для профиля правой киральной компоненты,

$$\begin{aligned} F_R^{(1)} &= N(g_1 + ig_2) \mu \tanh \tau \cosh^p \tau \left[{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - p; \frac{3}{2}, \tanh^2 \tau\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p \Gamma^2(p)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 - p; \frac{3}{2}, \tanh^2 \tau\right) \right], \end{aligned} \quad (4.24)$$

где ${}_2F_1$ - гипергеометрическая функция [7, с.370],

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}, \quad (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (4.25)$$

Для физики на бране при энергиях много меньше M важны только легкие локализованные состояния. Эффективный лагранжиан в квадратичном приближении по скалярным флуктуациям принимает вид,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{low} = & \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - \frac{m_h^2}{2}h^2 + \\ & + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \left[\psi_R^\dagger(m_f + g_\phi\phi + g_h h)\psi_L + h.c. \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Где g_ϕ - константа Юкавы для возможного Гольдстоуновского бозона ϕ . В модели с гравитацией, как было показано в третьей главе, Гольдстоуновская мода может отсутствовать. Иначе соответствующая константа оказывается равной нулю из соображений симметрии,

$$\begin{aligned} g_\phi &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dy (2g_a F_R^* F_L \Omega_{\phi,\Phi} + ((g_1 + ig_2)(F_L)^2 + (g_1 - ig_2)(F_R^*)^2)\Omega_{\phi,H})}{\int_{-\infty}^{+\infty} dy (|F_L|^2 + |F_R|^2)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Легкая скалярная частица играет роль Хиггс-подобного бозона с Юкавской константой,

$$\begin{aligned} g_h &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dy (2g_A F_R^* F_L \Omega_{h,\Phi} + ((g_1 + ig_2)(F_L)^2 - (g_1 - ig_2)(F_R^*)^2)\Omega_{h,H})}{\int_{-\infty}^{+\infty} dy (|F_L|^2 + |F_R|^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{M}{2Z}}(g_1 + ig_2)\frac{(\Gamma(p + \frac{1}{2}))^2}{\Gamma(p)\Gamma(p + 1)} + O(\epsilon^2) = \sqrt{\frac{M}{Z}}\frac{m_f}{m_h}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

Также как для бозона Хиггса Стандартной Модели в случае одного аромата фаза массы и Юкавской константы в главном порядке является общей и может быть всегда устранена киральным преобразованием $\psi \rightarrow e^{i\theta\gamma_5}\psi$.

Однако в следующем порядке фазы массы и константы Юкавы вообще говоря не совпадают. Происходит это из-за того, что флуктуация Хиггс-подобного бозона действует и в канале поля Φ через взаимодействие с матрицей τ_3 , вклад которого обладает определенной выделенной фазой. После диагонализации массовой матрицы, с точки зрения наблюдений эта ортогональная компонента будет играть роль CP -нарушающей компоненты константы Юкавы

бозона Хиггса. Ее главный порядок представляется в виде,

$$g_h^\perp = g_A \sin \theta \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dy 2F_R^* F_L \Omega_{h,\Phi}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dy |F_L|^2} + O\left(\frac{\mu^3}{M^3}\right), \quad \theta = \arctan \frac{g_2}{g_1}. \quad (4.29)$$

Тогда отношение CP -нарушающей компоненты к CP -сохраняющей в главном порядке можно посчитать по следующей формуле

$$\frac{g_h^\perp}{g_h} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m_h^3}{M^2 m_f} g_A \sin \theta \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy 2F_R^{(0)*} F_L^{(0)} \Omega_{h,\Phi}^{(0)}. \quad (4.30)$$

Эта модель может легко быть обобщена, чтобы включать несколько ароматов,

$$\mathcal{L}_f = \begin{pmatrix} \Psi_{m,1} \\ \Psi_{m,2} \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 \left(i\gamma_\alpha \partial^\alpha - g_{mn,A} \Phi \tau_3 - g_{mn,1} H \tau_1 - g_{mn,2} H \tau_2 \right) \begin{pmatrix} \Psi_{n,1} \\ \Psi_{n,2} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Поскольку константы связи допускают смешивание разных ароматов мы должны ввести массовую матрицу M_{mn} , которая может быть связана с матрицей СКМ Стандартной Модели. Уравнения на профили принимают вид,

$$(\partial_y + g_{mn,A} \Phi) F_{n,L} - (g_{mn,1} - i g_{mn,2}) H F_{n,R}^* = M_{mn} F_{n,R} \quad (4.32)$$

$$(-\partial_y + g_{mn,A} \Phi) F_{n,R} + (g_{mn,1} - i g_{mn,2}) H F_{n,L}^* = (M^\dagger)_{mn} F_{n,L} \quad (4.33)$$

в то время как низкоэнергетический лагранжиан записывается в виде,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{low} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{m_h^2}{2} h^2 + \\ & + i \bar{\psi}_m \gamma^\mu \partial_\mu \psi_m - \left[\psi_{mR}^\dagger (M_{mn} + g_{mn,\phi} \phi + g_{mn,h} h) \psi_{nL} + h.c. \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Если Юкавская константа для кинка Φ универсальна $g_{mn,A} = g_A$, то профили $F_{n,L}^{(0)}$ одинаковы для всех ароматов, и существует простое взаимоотношение между главными порядками массовой матрицы и Юкавских констант,

$$M_{mn} \simeq (g_{mn,1} + i g_{mn,2}) \mu \frac{(\Gamma(p + \frac{1}{2}))^2}{\Gamma(p)\Gamma(p+1)}, \quad g_{mn,h} \simeq \sqrt{\frac{M}{Z}} \frac{M_{mn}}{m_h}, \quad (4.35)$$

4.3. CP-несохранение в модели с несколькими полями

Наличие нескольких вершин взаимодействия с фермионами побуждает рассмотреть модели, в которых за них могут отвечать разные поля. С одной стороны, это позволяет значительно расширить возможные новые эффекты в низкоэнергетической теории, но модель при этом становится менее «элегантной», получая большое число свободных параметров.

Полученные в разделе 2.2.2 фоновые решения для модели с четырьмя полями оказались нестабильными как в модели без гравитации (см. раздел 3.1.2) так и с учетом нетривиальных вкладов (см. раздел 3.2). В связи с этим мы рассмотрим теперь модель с двумя независимыми скалярными дублетами с минимальным потенциалом, введенным в разделе 2.1.2, оба из которых находятся в фазе с нарушенной τ -симметрией. В данной работе мы ограничимся следующей «игрушечной» моделью с конкретным выбором взаимодействия с фермионами,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 \left(i\gamma_\alpha \partial^\alpha - (g_{1A}\Phi_1 + g_{2A}\Phi_2)\tau_3 - g_1 H_1 \tau_1 - g_2 H_2 \tau_2 \right) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} + \\ & + Z_1 \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \Phi_1 \partial^\alpha \Phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\alpha H_1 \partial^\alpha H_1 + M_1^2 \Phi_1^2 + \Delta_1 H_1^2 - \frac{1}{2} (\Phi_1^2 + H_1^2)^2 \right) + \\ & + Z_2 \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \Phi_2 \partial^\alpha \Phi_2 + \frac{1}{2} \partial_\alpha H_2 \partial^\alpha H_2 + M_2^2 \Phi_2^2 + \Delta_2 H_2^2 - \frac{1}{2} (\Phi_2^2 + H_2^2)^2 \right) \quad (4.36) \end{aligned}$$

Поскольку скалярные дублеты независимы, они могут образовывать кинки, обращающиеся в ноль в разных точках,

$$\Phi_1 = M_1 \tanh \beta_1(y - a), \quad H_1 = \mu_1 \operatorname{sech} \beta_1(y - a), \quad (4.37)$$

$$\Phi_2 = M_2 \tanh \beta_2(y + a), \quad H_2 = \mu_2 \operatorname{sech} \beta_2(y + a) \quad (4.38)$$

Заметим, что разные значения констант связи (включая Юкавские константы) ведут к асимметрии профилей фермионов и, таким образом, существенной их локализации в разных точках дополнительного измерения. Для упрощения вычислений мы считаем $\beta_1 = \beta_2 \equiv \beta$ и $\mu_1/M_1, \mu_2/M_2, \beta a \sim \epsilon \ll 1$.

Уравнения на профили фермионов принимают вид,

$$(\partial_y + g_{1A}\Phi_1 + g_{2A}\Phi_2)F_L - (g_1H_1 - ig_2H_2)F_R^* = m_f F_R \quad (4.39)$$

$$(-\partial_y + g_{1A}\Phi_1 + g_{2A}\Phi_2)F_R + (g_1H_1 - ig_2H_2)F_L^* = m_f^* F_L \quad (4.40)$$

Вычисление, аналогичное представленному в предыдущем разделе, приводит к следующему результату

$$F_L = \sqrt{\frac{\beta\Gamma(\tilde{p} + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\tilde{p})}} \operatorname{sech}^{\tilde{p}}(\beta y) + O(\epsilon), \quad F_R^{(0)} = O(\epsilon), \quad (4.41)$$

$$m_f = (g_1\mu_1 + ig_2\mu_2) \frac{(\Gamma(\tilde{p} + \frac{1}{2}))^2}{\Gamma(\tilde{p})\Gamma(\tilde{p} + 1)} \cdot (1 + O(\epsilon)) = |m_f|e^{i\theta}, \quad (4.42)$$

$$\tilde{p} \equiv \frac{g_{1A}M_1 + g_{2A}M_2}{\beta}, \quad \tan \theta = \frac{g_2m_{h2}}{g_1m_{h1}}. \quad (4.43)$$

Скалярный сектор при низких энергиях включает в себя два безмассовых Гольдстоуновских бозона и два легких скаляра,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{low} = & \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu h_1\partial^\mu h_1 - \frac{m_{h1}^2}{2}h_1^2 + \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \frac{1}{2}\partial_\mu h_2\partial^\mu h_2 - \frac{m_{h2}^2}{2}h_2^2 + \\ & + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \left[\psi_R^\dagger(m_f + g_{\phi 1}\phi_1 + g_{\phi 2}\phi_2 + g_{h1}h_1 + g_{h2}h_2)\psi_L + h.c. \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

Гольдстоуновские бозоны отщепляются от фермионов по крайней мере вплоть до $O(\epsilon^3)$. Главный порядок Юкавских констант для легких скаляров принимает следующие значения,

$$g_{h1} \simeq \cos \theta \sqrt{\frac{M_1}{Z_1} \frac{|m_f|}{m_{h1}}}, \quad g_{h2} \simeq i \sin \theta \sqrt{\frac{M_2}{Z_2} \frac{|m_f|}{m_{h2}}}, \quad (4.45)$$

Когда фаза массы фермиона устраняется киральным преобразованием $\psi \rightarrow \exp\left(-i\gamma_5 \frac{\theta}{2}\right)\psi$ Юкавские константы остаются комплексными с ортогональными фазами и обеспечивают потенциальный новый источник CP нарушения в дополнении к фазе СКМ матрицы,

$$\tilde{g}_{h1} \simeq (\cos^2 \theta - i\gamma_5 \sin \theta \cos \theta) \sqrt{\frac{M_1}{Z_1} \frac{|m_f|}{m_{h1}}}, \quad (4.46)$$

$$\tilde{g}_{h2} \simeq (\sin^2 \theta + i\gamma_5 \sin \theta \cos \theta) \sqrt{\frac{M_2}{Z_2} \frac{|m_f|}{m_{h2}}}. \quad (4.47)$$

4.4. Ограничения на параметры модели с одним дублетом

Рассмотрим теперь оценочные ограничения на параметры однодублетной модели исходя из ее феноменологических следствий. Мы не будем рассматривать феноменологические следствия модели с двумя дублетами по причинам, которые будут указаны в конце этой главы.

По очевидным причинам (отсутствие калибровочных бозонов и какого-либо намека на электрослабую симметрию) рассматриваемая модель может считаться не более, чем «игрушечной». Тем не менее, возможно сделать некоторые оценки, если отождествить легкое скалярное состояние с наблюдаемым бозоном Хиггса. Далее мы используем следующую нормализацию констант связи потенциала Хиггса Стандартной Модели [114],

$$V_{SM}(h(x)) \equiv -m^2 h^2 + \lambda h^4, \quad \langle h \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{m}{\sqrt{2\lambda}}. \quad (4.48)$$

Масштаб $v \simeq 246 \text{ GeV}$ соответствует вакуумному среднему поля Хиггса h Стандартной Модели [114]. Для t -кварка, процесс с рождением петли которого доминирует в распаде Хиггса, мы получаем,

$$m_h = \sqrt{2\lambda}v, \quad m_t = \frac{1}{\sqrt{2}}g_{t,SM} \cdot v \Rightarrow g_{t,SM} = 2\sqrt{\lambda}\frac{m_t}{m_h}. \quad (4.49)$$

Соответственно соотношение между константами Юкавы в рассматриваемых моделях

$$\lambda \frac{g_t^2}{g_{t,SM}^2} = \frac{1}{6\kappa} \left(\frac{M}{M_*} \right)^3. \quad (4.50)$$

Теперь используем соотношение масштабов Планка, получающееся из редукции пятимерного действия Эйнштейна-Гильберта к четырехмерному [18],

$$M_*^3 = kM_P^2, \quad (4.51)$$

которое может быть получено из кинетического действия для гравитона (3.28), если рассмотреть волновую функцию $b'_{\mu\nu} = 0$ для массивного гравитона. Из него мы связываем параметры модели с четырехмерным гравитационным масштабом, массой Планка, $M_P \simeq 2.5 \cdot 10^{18} \text{ GeV}$ [114].

Из экспериментальных ограничений на кривизну Анти-де Ситтера дополнительного измерения [12] можно оценить минимальные значения для масштабов M_* , M , а также для параметра κ . Действительно, объединив (4.51), (2.31) и (4.50), мы получаем

$$M = \sqrt{3\sqrt{\lambda} k M_P \frac{g_t}{g_{t,SM}}}; \quad \kappa = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \frac{M}{M_P} \frac{g_{t,SM}}{g_t}. \quad (4.52)$$

Современное ограничение на кривизну Анти-де Ситтера, $k > 0.004 eV$. Экспериментальные значения для константы Юкавы t -кварка хорошо согласуются со Стандартной Моделью, $\frac{g_t}{g_{t,SM}} \simeq 1$. [31, 53] Таким образом, мы получаем следующие ограничения на параметры модели [1],

$$M > 3.5 TeV; \quad M_* > 3 \cdot 10^8 GeV; \quad \kappa > 2 \cdot 10^{-15}. \quad (4.53)$$

В итоге мы приходим к выводу, что гравитационные поправки для механизма локализации оказываются действительно очень малыми (за исключением непертурбативных эффектов в спектре бранона). Тем не менее, толщина браны может влиять на высокоэнергетические процессы рассеяния в ЛНС в виде в частности событий с потерей энергии [62, 122].

Что касается CP -нарушающей компоненты констант Юкавы (4.30), мы можем дать некоторые оценки для случая, когда $\theta = \pi/2$ и, соответственно, эффект оказывается максимальным. Из-за обратной пропорциональности массе фермиона оказывается выгодней рассмотреть b -кварк. Результаты численного расчета для профиля (3.101) при $b = 0$ приведены на иллюстрации 4.1. Оценки укладываются в текущие ограничения, полученные из данных ЛНС и измерений ЭДМ, которые закрывают для констант Юкавы t и b -кварков CP -нарушающую компоненту порядка $O(0.01)$ [45].

В классическом приближении данный эффект можно было бы сильно подавить, выбрав при тех же взаимодействиях Юкавы иной потенциал взаимодействия Φ , образующего кинк, и H , играющего роль поля Хиггса. Проблема состоит в том, что в пятимерном пространстве взаимодействие Юкавы является

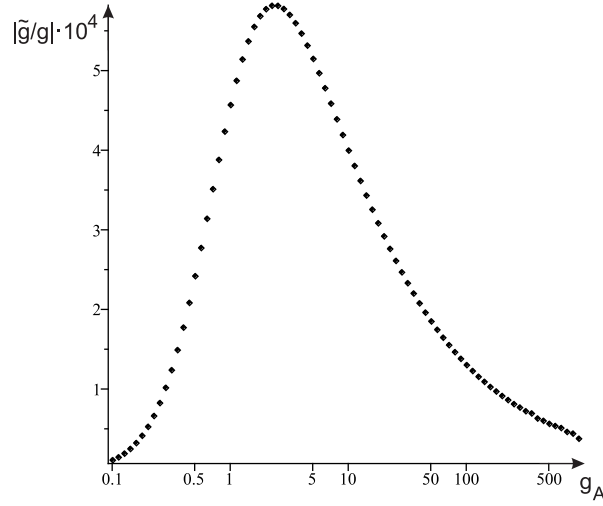


Рис. 4.1. Результат численных вычислений отношения CP -нарушающей компоненты константы связи Юкавы к CP -сохраняющей для b -кварка в модели с одним скалярным дублетом неперенормируемым. Таким образом, при учете квантовых эффектов, мы должны рассматривать все возможные взаимодействия, разрешенные симметриями. Для рассматриваемых процессов нас беспокоят следующие операторы,

$$\sqrt{\frac{Z}{M_*}} \bar{\Psi} \tau_3 H \Psi, \quad \sqrt{\frac{Z}{M_*}} \bar{\Psi} \tau_1 \Phi \Psi, \quad \sqrt{\frac{Z}{M_*}} \bar{\Psi} \tau_2 \Phi \Psi, \quad \sqrt{\frac{Z}{M_*}} \bar{\Psi} H \Psi, \quad (4.54)$$

где за масштаб обрезания взят пятимерный масштаб Планка M_* . Если взять $Z = \frac{3\kappa M_*^3}{M^2}$ и $\kappa \sim \frac{M^3}{M_*^3}$, мы получаем $\sqrt{\frac{Z}{M_*}} \sim \kappa^{1/6} \sim 10^{-2}$. Таким образом, только за счет соотношения масштабов эти операторы оказываются подавлены слабо – сравнимо с классическими поправками $\sim \frac{\mu^2}{M^2}$. В рассмотренной нами однополевой модели со слабо нарушенной τ -симметрией этой проблемы можно избежать за счет четности легких состояний. Есть еще один оператор этого порядка, который оказывается незапрещенным по четности,

$$g_I \sqrt{\frac{Z}{M_*}} \bar{\Psi} \Phi \Psi \quad (4.55)$$

В фазе с $\langle H \rangle = 0$ для киральной нуль-моды его роль сводится к перенормировке константы $g_A \rightarrow g_A + g_I$. С точки зрения уравнений (4.18), (4.19) он приведет к различным значениям константы связи с Φ для разных киральных компонент $g_{L,R} = g_A \pm g_I$. В младшем порядке по μ/M для массы (4.23) и константы

Юкавы (4.28) константа связи с правой компонентой g_R не играет роли, однако она будет влиять на CP нарушающую компоненту (4.30).

4.5. Выводы к четвертой главе

В четвертой главе было рассмотрено обобщение механизма локализации массивных фермионов, которое обеспечивает их комплексной массовой матрицей. Эта массовая матрица может служить одной из составляющих матриц смешиваний СКМ и PMNS Стандартной Модели. При этом оказывается, что матрицы Юкавы сохраняют некоторую CP -нарушающую фазу, которая может быть обнаружена в экспериментах на ускорителях и по измерению ЭДМ частиц. Этот эффект должен быть достаточно общим для моделей, реализующих рассмотренный механизм.

Для модели с одним скалярным дублетом, отождествив легкое скалярное состояние с наблюдаемым бозоном Хиггса, оказалось возможным получить оценки для основных параметров модели. Исходя из них, удалось дать оценку для нового эффекта CP -нарушения, которая не выходит за экспериментальные ограничения и дает надежду на обнаружение в ближайшие годы. Мы также привели аргументы, по которым τ -симметрия защищает низкоэнергетический сектор рассмотренной модели от квантовых поправок.

Что же касается модели с двумя дублетами, эффекты CP -нарушения проявляются уже в главном порядке. В текущем виде, для выбранных констант взаимодействия, модель очевидно дает недопустимо большую CP нарушающую фазу для постоянных Юкавы фермионов, если только константа взаимодействия с одним из полей не выбрана очень малой. Во-первых, можно считать, что оба поля обеспечивают некоторую комплексную фазу через механизм, описанный в предыдущем разделе, причем их фазы не ортогональны, как в изученном варианте, а очень близки. Однако, для того, чтобы объяснить ненаблюдаемость одного из бозонов следует так или иначе сильно подавить константу взаимодей-

ствия, потому что при увеличении его массы, пропорционально растет и вклад соответствующего массообразующего поля.

Это подавление легко организовать в нашей модели также как в [30], так как от соотношения $g_{1,A}$ и $g_{2,A}$ сильно зависит, где будет локализован фермион. При этом, однако, возрастает аналитическая сложность вычислений. Намного более важной проблемой является большая чувствительность модели к квантовым поправкам, поскольку теперь они не подавлены τ -симметрией. Наконец, намного острее, чем для варианта с одним дублетом, встает вопрос, каким образом эта модель соотносится с предполагаемым обобщением, включающим калибровочные взаимодействия. По этой причине, автор предлагает воспринимать представленную модель с двумя дублетами не как реалистичную феноменологическую модель, а только как демонстрацию механизма возникновения дополнительного CP нарушения в случае, если в генерации масс фермионов участвует несколько полей.

Заключение

В заключение обобщим результаты, полученные в данной работе.

1. Нами была сформулирована модель со скалярной материей минимально взаимодействующей с гравитацией в некомпактном пятимерном пространстве-времени, в которое для нарушения трансляционной симметрии внесен дефект, моделируемый тонкой браной. Данный дефект используется для оправдания рождения доменной стенки в конкретной точке объемлющего пространства-времени. В качестве примера для аналитических вычислений был выбран минимальный потенциал с мягко нарушенной $O(2)$ -симметрией. Непостоянные в дополнительном измерении и сохраняющие четырехмерную Лоренц-инвариантность классические решения для этого потенциала соответствуют двум фазам, связанным со спонтанным нарушением τ -симметрии формируемой определенными отражениями полей [17]. В первой из этих фаз одно из полей Φ образует кинк, в то время как второе H сохраняет тривиальное вакуумное среднее. Во второй фазе второе поле H также развивает вакуумное среднее, которое соответствует локализованной полевой конфигурации. Классические уравнения движения допускают гладкий предел по константе взаимодействия с гравитацией, натяжению тонкой браны-дефекта и отклонению от критической точки между фазами, оказалось возможным построить теорию возмущений по этим трем параметрам и аналитически найти младшие поправки к классическим решениям [1, 19].
2. Далее нами были исследованы скалярные флуктуации около полученных решений для данной модели в квадратичном приближении. Для этого были выбраны калибровочно-инвариантные переменные, имеющие хорошее разложение по теории возмущений. Массовый спектральный оператор приобретает в сравнении с моделью без гравитации нетривиальные

вклады, непертурбативные по константе гравитационного взаимодействия [1, 23, 90]. Автором было обнаружено, что на эти вклады, особенно на сингулярную их часть, оказывает существенное влияние включение в модель дефекта, нарушающего трансляционную симметрию.[19]

Для минимальной модели оказывается возможным подробно изучить инвариантный спектр скалярных состояний, не прибегая к численным расчетам. В фазе, в которой только поле Φ , образующее кинк, обладает вакуумным средним, два канала скалярных флуктуаций оказываются независимыми, потенциал только одного из которых, ϕ , получает нетривиальные вклады. Массовый оператор этого канала оказывается факторизуемым и спектр состояний может быть найден точно методами суперсимметричной квантовой механики.[19] В отсутствие дефекта в ϕ -канале нет локализованных состояний из-за сингулярного потенциала вблизи браны. Введение слабого дефекта в модель обеспечивает появление локализованных состояний, включая (псевдо)Гольдстоуновскую моду и тяжелое локализованное состояние.

Другой канал χ обладает локализованной нуль-модой, которая в фазе с ненулевым вакуумным средним второго поля H приобретает массу и играет роль бозона Хиггса в механизме локализации фермионов. Данная масса была посчитана по теории возмущений для разных значений натяжения моделирующей дефект браны. Любопытно, что в случае без дефекта и положительного натяжения тонкой браны-дефекта в главном порядке она оказывается такой же как в теории без гравитации. В то же время для отрицательного натяжения браны, масса нетривиально от него зависит. [1, 19].

3. Особенно интересный результат получился при рассмотрении ϕ -канала в случае тонкой браны-дефекта с малым отрицательным натяжением. При этом сингулярные барьеры делят пространство на три области, не взаимо-

действующие друг с другом в рассмотренном приближении. В центральной области обнаруживается дискретный спектр идеально локализованных состояний. Таким образом, был найден новый механизм локализации скалярных состояний, заслуживающий более глубокого изучения в будущем. [19]

4. Было предложено обобщение механизма локализации фермионов, обеспечивающее их массовой матрицей с CP -нарушающими фазами. [2] В низкоэнергетической теории эта матрица вместе с матрицей смешивания калибровочных бозонов образует матрицу Кабиббо-Кобаяши-Маскавы для кварков и аналогичную матрицу Понтекорво-Маки-Накагавы-Сакаты для лептонов. При этом было обнаружено, что константы Юкавы должны сохранять CP -нарушающую фазу. Наличие этого отклонения слабо зависит от рассмотренных моделей скалярного сектора, и поэтому естественно ожидать, что оно будет присуще любой реалистичной реализации предложенного механизма.

Этот механизм локализации был рассмотрен в двух вариантах. В первом скалярная материя состоит из одного дублета, аналогичного упомянутому в предыдущих пунктах. Поскольку в данной работе локализация калибровочных бозонов не рассматривалась, окончательно соотнести эту модель с наблюдаемыми данными на данном уровне нельзя. Тем не менее, предполагается, что в ее рамках можно получить приемлемые оценки для параметров более реалистичного сценария. С их помощью получено, что вышеупомянутый новый источник CP -нарушения укладывается в текущие экспериментальные ограничения и может проявить себя уже в ближайшие годы в ускорительных экспериментах и экспериментах по измерению электрического дипольного момента элементарных частиц.

Во втором варианте скалярный сектор считался состоящим из двух дублетов. На данном уровне неясно насколько второй вариант может быть

реализован в реалистичных моделях, тем не менее он демонстрирует дополнительный механизм CP -нарушения, который необходимо учитывать при построении моделей локализации фермионов на «толстой бране» с использованием нескольких полей.

Литература

1. Андрианов А. А., Андрианов В. А., Новиков О. Локализация скалярных полей на толстых бранах с гравитационным самодействием // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2013. Т. 44. С. 190–203.
2. Андрианов А. А., Андрианов В. А., Новиков О. О. CP-нарушение в моделях локализации фермионов на доменной стенке (бране) // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 175. С. 347–356.
3. Барвинский А. О. Космологические браны и макроскопические дополнительные измерения // Успехи физических наук. 2005. Т. 175. С. 569–601.
4. Вайнберг С. Квантовая теория поля. Т.2 Современные приложения / Пер. с англ.; Под ред. В.Ч. Жуковского. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
5. Рубаков В. А. Большие и бесконечные дополнительные измерения // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. С. 913–938.
6. Рубаков В. А. Многомерные модели физики частиц // Успехи физических наук. 2003. Т. 173. С. 219.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/ под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, пер. с англ. под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Карамзиной. Москва: Наука, 1979.
8. Abdyrakhmanov S. T., Bronnikov K. A., Meierovich B. E. Uniqueness of RS2 type thick branes supported by a scalar field // Grav.Cosmol. 2005. Vol. 11. P. 82–86.
9. Accomando E., Akeroyd A. G., Akhmetzyanova E. et al. Workshop on CP Studies and Non-Standard Higgs Physics // [Электрон. Ресурс] Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0608079>.

10. Adam C., Grandi N., Klimas P. et al. Compact self-gravitating solutions of quartic (K) fields in brane cosmology // J.Phys.A. 2008. Vol. 41. P. 375401.
11. Adam C., Grandi N., Sanchez-Guillen J., Wereszczynski A. K fields, compactons, and thick branes // J.Phys.A. 2008. Vol. 41. P. 212004.
12. Adelberger E. G., Gundlach J. H., Heckel B. R. et al. Torsion balance experiments: A low-energy frontier of particle physics // Prog.Part.Nucl.Phys. 2009. Vol. 62. P. 102–134.
13. Aharony O., Gubser S. S., Maldacena J. M. et al. Large N field theories, string theory and gravity // Phys.Rept. 2000. Vol. 323. P. 183–386.
14. Ahmed A., Grzadkowski B. Brane modelling in warped extra-dimension // JHEP. 2013. Vol. 1301. P. 177.
15. Akama K. Pregeometry // Lect.Notes Phys. 1982. Vol. 176. P. 267–271.
16. Almeida C. A. S., M. M. Ferreira J., Gomes A. R., Casana R. Fermion localization and resonances on two-field thick branes // Phys.Rev.D. 2009. Vol. 79. P. 125022.
17. Andrianov A. A., Andrianov V. A., Giacconi P., Soldati R. Domain wall generation by fermion selfinteraction and light particles // JHEP. 2003. Vol. 0307. P. 063.
18. Andrianov A. A., Andrianov V. A., Giacconi P., Soldati R. Brane world generation by matter and gravity // JHEP. 2005. Vol. 0507. P. 003.
19. Andrianov A. A., Andrianov V. A., Novikov O. O. Gravity effects on thick brane formation from scalar field dynamics // European Physical Journal C. 2013. Vol. 73. P. 2675.

20. Andrianov A. A., Borisov N. V., Ioffe M. V. Factorization method and Darboux transformation for multidimensional Hamiltonians // *Theor.Math.Phys.* 1984. Vol. 61. P. 1078–1089.
21. Andrianov A. A., Borisov N. V., Ioffe M. V. The Factorization method and quantum systems with equivalent energy spectra // *Phys.Lett.A.* 1984. Vol. 105. P. 19–22.
22. Andrianov A. A., Borisov N. V., Ioffe M. V. Quantum systems with identical energy spectra // *JETP Lett.* 1984. Vol. 39. P. 93–97.
23. Andrianov A. A., Vecchi L. On the stability of thick brane worlds non-minimally coupled to gravity // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 77. P. 044035.
24. Aref'eva I. Y. Catalysis of Black Holes/Wormholes Formation in High Energy Collisions // *Theor.Math.Phys.* 2009. Vol. 161. P. 1647–1662.
25. Aref'eva I. Y., Ivanov M. G., Mueck W. et al. Consistent linearized gravity in brane backgrounds // *Nucl.Phys.B.* 2000. Vol. 590. P. 273–286.
26. Arias O., Cardenas R., Quiros I. Thick brane worlds arising from pure geometry // *Nucl.Phys.B.* 2002. Vol. 643. P. 187–200.
27. Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. R. The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter // *Phys.Lett.B.* 1998. Vol. 429. P. 263–272.
28. Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. R. The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter // *Phys.Lett.B.* 1998. Vol. 429. P. 263–272.
29. Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. R. Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity // *Phys.Rev.D.* 1999. Vol. 59. P. 086004.
30. Arkani-Hamed N., Schmaltz M. Hierarchies without symmetries from extra dimensions // *Phys.Rev.D.* 2000. Vol. 61. P. 033005.

31. ATLAS Collaboration (Aad G. et al), Measurements of Higgs boson production and couplings in diboson final states with the ATLAS detector at the LHC // *Phys.Lett.B.* 2013. Vol. 726. P. 88–119.
32. Auzzi R., Bolognesi S., Shifman M., Yung A. Confinement and Localization on Domain Walls // *Phys.Rev.D.* 2009. Vol. 79. P. 045016.
33. Barbosa-Cendejas N., Herrera-Aguilar A. 4d gravity localized in non $Z(2)$ symmetric thick branes // *JHEP.* 2005. Vol. 0510. P. 101.
34. Barbosa-Cendejas N., Herrera-Aguilar A. Localization of 4-D gravity on pure geometrical thick branes // *Phys.Rev.D.* 2006. Vol. 73. P. 084022.
35. Bardeen J. M. Gauge Invariant Cosmological Perturbations // *Phys.Rev.D.* 1980. Vol. 22. P. 1882–1905.
36. Bazeia D., Brito F. A., Fonseca R. C. Fermion states on domain wall junctions and the flavor number // *Eur.Phys.J.C.* 2009. Vol. 63. P. 163–170.
37. Bazeia D., Furtado C., Gomes A. R. Brane structure from scalar field in warped space-time // *JCAP.* 2004. Vol. 0402. P. 002.
38. Bazeia D., Gomes A. R. Bloch brane // *JHEP.* 2004. Vol. 0405. P. 012.
39. Bazeia D., Gomes A. R., Losano L., Menezes R. Braneworld Models of Scalar Fields with Generalized Dynamics // *Phys.Lett.B.* 2009. Vol. 671. P. 402–410.
40. Bazeia D., Lobao A. S., Losano L., Menezes R. First-order formalism for flat branes in generalized N-field models // *Phys.Rev.D.* 2013. Vol. 88. P. 045001.
41. Bogdanos C., Dimitriadis A., Tamvakis K. Brane models with a Ricci-coupled scalar field // *Phys.Rev.D.* 2006. Vol. 74. P. 045003.

42. Boos E. E., Mikhailov Y. S., Smolyakov M. N., Volobuev I. P. Physical degrees of freedom in stabilized brane world models // *Mod.Phys.Lett.A.* 2006. Vol. 21. P. 1431–1449.
43. Branco G. C., de Gouvea A., Rebelo M. N. Split fermions in extra dimensions and CP violation // *Phys.Lett.B.* 2001. Vol. 506. P. 115–122.
44. Brax P., van de Bruck C., Davis A.-C. Brane world cosmology // *Rept.Prog.Phys.* 2004. Vol. 67. P. 2183–2232.
45. Brod J., Haisch U., Zupan J. Constraints on CP-violating Higgs couplings to the third generation // *JHEP.* 2013. Vol. 1311. P. 180.
46. Bronnikov K. A., Meierovich B. E. A General thick brane supported by a scalar field // *Grav.Cosmol.* 2003. Vol. 9. P. 313–318.
47. Callin P., Ravndal F. Lagrangian formalism of gravity in the Randall-Sundrum model // *Phys.Rev.D.* 2005. Vol. 72. P. 064026.
48. Castillo-Felisola O., Schmidt I. On the localization of fermions on thick D-branes // *Phys.Rev.D.* 2010. Vol. 82. P. 124062.
49. Castro L. B. Fermion localization on two-field thick branes // *Phys.Rev.D.* 2011. Vol. 83. P. 045002.
50. Cembranos J. A. R., Dobado A., Maroto A. L. Branon search in hadronic colliders // *Phys.Rev.D.* 2004. Vol. 70. P. 096001.
51. Chang W.-F., Ng J. N. CP violation in 5-D split fermions scenario // *JHEP.* 2002. Vol. 0212. P. 077.
52. Cheung K. Collider phenomenology for a few models of extra dimensions // *Supersymmetry and unification of fundamental interactions. Proceedings, 12th International Conference, SUSY 2004, Tsukuba, Japan, June 17-23, 2004* / Ed. by K. Hagiwara, J. Kanzaki, N. Okada. 2004. P. 247–266.

53. CMS collaboration (Chatrchyan S. et al), Observation of a new boson with mass near 125 GeV in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV // JHEP. 2013. Vol. 1306. P. 081.
54. Cooper F., Khare A., Sukhatme U. Supersymmetry and quantum mechanics // Phys.Rept. 1995. Vol. 251. P. 267–385.
55. Csaki C. TASI lectures on extra dimensions and branes // From fields to strings, Ed. by M. Shifman, A. Vainshtein, J. Wheeler. World Scientific, 2005. Vol. 2. P. 967 – 1060.
56. Csaki C., Erlich J., Hollowood T. J., Shirman Y. Universal aspects of gravity localized on thick branes // Nucl.Phys.B. 2000. Vol. 581. P. 309–338.
57. de Souza Dutra A., de Faria Jr. A. C. A. Expanding the class of general exact solutions for interacting two field kinks // Phys.Lett.B. 2006. Vol. 642. P. 274–278.
58. DeWolfe O., Freedman D. Z., Gubser S. S., Karch A. Modeling the fifth-dimension with scalars and gravity // Phys.Rev.D. 2000. Vol. 62. P. 046008.
59. Dick R. Brane worlds // Class.Quant.Grav. 2001. Vol. 18. P. R1–R24.
60. Dubovsky S. L., Rubakov V. A. On electric charge nonconservation in brane world // [Электрон. Ресурс] Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0204205>.
61. Dubovsky S. L., Rubakov V. A. On models of gauge field localization on a brane // Int.J.Mod.Phys.A. 2001. Vol. 16. P. 4331–4350.
62. Dubovsky S. L., Rubakov V. A., Tinyakov P. G. Brane world: Disappearing massive matter // Phys.Rev.D. 2000. Vol. 62. P. 105011.
63. Dvali G., Vilenkin A. Solitonic D-branes and brane annihilation // Phys.Rev.D. 2003. Vol. 67. P. 046002.

64. Dvali G. R., Shifman M. A. Domain walls in strongly coupled theories // Phys.Lett.B. 1997. Vol. 396. P. 64–69.
65. Dzhunushaliev V., Folomeev V., Minamitsuji M. Thick brane solutions // Rept.Prog.Phys. 2010. Vol. 73. P. 066901.
66. Eto M., Nitta M., Sakai N. Effective theory on non-Abelian vortices in six dimensions // Nucl.Phys.B. 2004. Vol. 701. P. 247–272.
67. Fairbairn M. Cosmological constraints on large extra dimensions // Phys.Lett.B. 2001. Vol. 508. P. 335–339.
68. Feruglio F. Extra dimensions in particle physics // Eur.Phys.J. C. 2004. Vol. 33. P. S114–S128.
69. Franceschini R., Giardino P. P., Giudice G. F. et al. LHC bounds on large extra dimensions // JHEP. 2011. Vol. 1105. P. 092.
70. Fu C.-E., Liu Y.-X., Guo H. Bulk matter fields on two-field thick branes // Phys.Rev.D. 2011. Vol. 84. P. 044036.
71. German G., Herrera-Aguilar A., Malagon-Morejon D. et al. A de Sitter tachyon thick braneworld and gravity localization // JCAP. 2013. Vol. 1302. P. 035.
72. Gibbons G. W., Hawking S. W. Action integrals and partition functions in quantum gravity // Phys. Rev. D. 1977. Vol. 15. P. 2752–2756.
73. Gibbons G. W., Wiltshire D. L. Space-Time as a Membrane in Higher Dimensions // Nucl.Phys.B. 1987. Vol. 287. P. 717.
74. Gingrich D. M. Black hole cross-section at the large hadron collider // Int.J.Mod.Phys.A. 2006. Vol. 21. P. 6653–6676.
75. Giovannini M. Gauge invariant fluctuations of scalar branes // Phys.Rev.D. 2001. Vol. 64. P. 064023.

76. Giovannini M., Meyer H., Shaposhnikov M. E. Warped compactification on Abelian vortex in six-dimensions // Nucl.Phys.B. 2001. Vol. 619. P. 615–645.
77. Giudice G. F., Rattazzi R., Wells J. D. Transplanckian collisions at the LHC and beyond // Nucl.Phys.B. 2002. Vol. 630. P. 293–325.
78. Gogberashvili M. Localization of Matter Fields in the 5D Standing Wave Braneworld // JHEP. 2012. Vol. 1209. P. 056.
79. Gogberashvili M., Singleton D. Anti-de-Sitter Island-Universes from 5D Standing Waves // Mod.Phys.Lett.A. 2010. Vol. 25. P. 2131–2143.
80. Goldberger W. D., Wise M. B. Modulus stabilization with bulk fields // Phys.Rev.Lett. 1999. Vol. 83. P. 4922–4925.
81. Gremm M. Four-dimensional gravity on a thick domain wall // Phys.Lett.B. 2000. Vol. 478. P. 434–438.
82. Grzadkowski B., Gunion J. F. Bulk scalar stabilization of the radion without metric back reaction in the Randall-Sundrum model // Phys.Rev.D. 2003. Vol. 68. P. 055002.
83. Hewett J. L., Spiropulu M. Particle physics probes of extra space-time dimensions // Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 2002. Vol. 52. P. 397–424.
84. Horowitz G. T., Polchinski J. Gauge/gravity duality // Approaches to quantum gravity: Toward a New Understanding of Space, Time and Matter, Ed. by D. Oriti. Cambridge University Press, 2009. P. 169 – 186.
85. Israel W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity // Il Nuovo Cimento B. 1967. Vol. 44. P. 463.
86. Kallosh R., Linde A. D., Linde D. A., Susskind L. Gravity and global symmetries // Phys.Rev.D. 1995. Vol. 52. P. 912–935.

87. Kaluza T. Zum Unitätsproblem in der Physik // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.). 1921. P. 966–972.
88. Kawai H., Kuroki T. Strings as flux tube and deconfinement on branes in gauge theories // Phys.Lett.B. 2001. Vol. 518. P. 294–300.
89. Kazanas D., Nicolaidis A. Cosmic rays and large extra dimensions // Gen.Rel.Grav. 2003. Vol. 35. P. 1117–1123.
90. Kehagias A., Tamvakis K. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce // Phys.Lett.B. 2001. Vol. 504. P. 38–46.
91. Kehagias A., Tamvakis K. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce // Phys.Lett.B. 2001. Vol. 504. P. 38–46.
92. Kim V. T., Oreshkin V. A. Forward dijets and search for new physics at the LHC // Nucl.Phys.Proc.Suppl. 2011. Vol. 219-220. P. 235–238.
93. Kirpichnikov D. V. IR properties of one loop corrections to brane-to-brane propagators in models with localized vector bosons // Phys.Rev.D. 2013. Vol. 88. P. 125018.
94. Klein O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie // Zeitschrift für Physik A. 1926. Vol. 37. P. 895–906.
95. Kobayashi S., Koyama K., Soda J. Thick brane worlds and their stability // Phys.Rev.D. 2002. Vol. 65. P. 064014.
96. Koley R., Kar S. Bulk phantom fields, increasing warp factors and fermion localisation // Mod.Phys.Lett.A. 2005. Vol. 20. P. 363–372.
97. Koley R., Kar S. Scalar kinks and fermion localisation in warped spacetimes // Class.Quant.Grav. 2005. Vol. 22. P. 753–768.

98. Lahiri A., Roy P. K., Bagchi B. Supersymmetry in Quantum Mechanics // Int.J.Mod.Phys.A. 1990. Vol. 5. P. 1383–1456.
99. Lewin L. Polylogarithms and Associated Functions. New York: North-Holland, 1981.
100. Li H.-T., Liu Y.-X., Zhao Z.-H., Guo H. Fermion Resonances on a Thick Brane with a Piecewise Warp Factor // Phys.Rev.D. 2011. Vol. 83. P. 045006.
101. Libanov M., Nemkov N., Nugaev E., Timiryasov I. Heavy-meson physics and flavour violation with a single generation // JHEP. 2012. Vol. 1208. P. 136.
102. Liu Y.-X., Chen F.-W., Heng-Guo, Zhou X.-N. Non-minimal Coupling Branes // JHEP. 2012. Vol. 1205. P. 108.
103. Liu Y.-X., Guo H., Fu C.-E., Ren J.-R. Localization of Matters on Anti-de Sitter Thick Branes // JHEP. 2010. Vol. 1002. P. 080.
104. Liu Y.-X., Li H.-T., Zhao Z.-H. et al. Fermion Resonances on Multi-field Thick Branes // JHEP. 2009. Vol. 0910. P. 091.
105. Lonnblad L., Sjodahl M. Classical and non-classical ADD-phenomenology with high-E (perpendicular) jet observables at collider experiments // JHEP. 2006. Vol. 0610. P. 088.
106. Maartens R., Koyama K. Brane-World Gravity // Living Rev.Rel. 2010. Vol. 13. P. 5.
107. Maldacena J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity // Adv.Theor.Math.Phys. 1998. Vol. 2. P. 231–252.
108. Melfo A., Pantoja N., Tempo J. D. Fermion localization on thick branes // Phys.Rev.D. 2006. Vol. 73. P. 044033.

109. Mikhailov A. S., Mikhailov Y. S., Smolyakov M. N., Volobuev I. P. Constructing stabilized brane world models in five-dimensional Brans-Dicke theory // *Class.Quant.Grav.* 2007. Vol. 24. P. 231–242.
110. Mikhailov A. S., Mikhailov Y. S., Smolyakov M. N., Volobuev I. P. Gravity in a stabilized brane world model in five-dimensional Brans-Dicke theory // *Theor.Math.Phys.* 2009. Vol. 161. P. 1424–1437.
111. Mirabelli E. A., Schmaltz M. Yukawa hierarchies from split fermions in extra dimensions // *Phys.Rev.D.* 2000. Vol. 61. P. 113011.
112. Nordstöm G. Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen // *Physikalische Zeitschrift.* 1914. Vol. 15. P. 504–506.
113. Park S. C. Black holes and the LHC: A Review // *Prog.Part.Nucl.Phys.* 2012. Vol. 67. P. 617–650.
114. Particle Data Group (Beringer J. et al), Review of Particle Physics (RPP) // *Phys.Rev.D.* 2012. Vol. 86. P. 010001.
115. Pavsic M. Einstein's Gravity From a First Order Lagrangian in an Embedding Space // *Phys.Lett.A.* 1986. Vol. 116. P. 1–5.
116. Polchinski J. *Superstring theory, Vol.1.* Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
117. Randall L., Sundrum R. An Alternative to compactification // *Phys.Rev.Lett.* 1999. Vol. 83. P. 4690–4693.
118. Randall L., Sundrum R. A Large mass hierarchy from a small extra dimension // *Phys.Rev.Lett.* 1999. Vol. 83. P. 3370–3373.
119. Randjbar-Daemi S., Shaposhnikov M. QED from six-dimensional vortex and gauge anomalies // *JHEP.* 2003. Vol. 0304. P. 016.

120. Rubakov V. A., Shaposhnikov M. E. Do We Live Inside a Domain Wall? // Phys.Lett.B. 1983. Vol. 125. P. 136–138.
121. Rubakov V. A., Shaposhnikov M. E. Extra Space-Time Dimensions: Towards a Solution to the Cosmological Constant Problem // Phys.Lett.B. 1983. Vol. 125. P. 139.
122. Sarrazin M., Pignol G., Petit F., Nesvizhevsky V. V. Experimental limits on neutron disappearance into another braneworld // Phys.Lett.B. 2012. Vol. 712. P. 213–218.
123. Sasakura N. Analytic continuations of de Sitter thick domain wall solutions // Phys.Rev.D. 2002. Vol. 66. P. 065006.
124. Sasakura N. A de Sitter thick domain wall solution by elliptic functions // JHEP. 2002. Vol. 0202. P. 026.
125. Shaposhnikov M., Tinyakov P., Zuleta K. Quasilocalized gravity without asymptotic flatness // Phys.Rev.D. 2004. Vol. 70. P. 104019.
126. Shaposhnikov M. E., Tinyakov P. Extra dimensions as an alternative to Higgs mechanism? // Phys.Lett.B. 2001. Vol. 515. P. 442–446.
127. Shifman M., Yung A. Domain walls and flux tubes in N=2 SQCD: D-brane prototypes // Phys.Rev.D. 2003. Vol. 67. P. 125007.
128. Shifman M., Yung A. Localization of nonAbelian gauge fields on domain walls at weak coupling (D-brane prototypes II) // Phys.Rev.D. 2004. Vol. 70. P. 025013.
129. Shifman M., Yung A. Supersymmetric Solitons and How They Help Us Understand Non-Abelian Gauge Theories // Rev.Mod.Phys. 2007. Vol. 79. P. 1139.
130. Sjordahl M., Gustafson G. Gravitational Scattering in the ADD-model at High and Low Energies // Eur.Phys.J.C. 2008. Vol. 53. P. 109–119.

131. Slatyer T. R., Volkas R. R. Cosmology and fermion confinement in a scalar-field-generated domain wall brane in five dimensions // JHEP. 2007. Vol. 0704. P. 062.
132. Smolyakov M. N. On unremovable divergencies in four-dimensional electrodynamics localized on a domain wall // Phys.Rev.D. 2012. Vol. 85. P. 045036.
133. Smolyakov M. N. More on divergences in brane world models // Phys.Rev.D. 2013. Vol. 87. P. 104035.
134. Tong D. D-branes in field theory // JHEP. 2006. Vol. 0602. P. 030.
135. Visser M. An Exotic Class of Kaluza-Klein Models // Phys.Lett.B. 1985. Vol. 159. P. 22.
136. Witten E. Dynamical Breaking of Supersymmetry // Nucl.Phys.B. 1981. Vol. 188. P. 513.
137. York J. W. Role of Conformal Three-Geometry in the Dynamics of Gravitation // Phys. Rev. Lett. 1972. Vol. 28. P. 1082–1085.
138. Zhang X.-H., Liu Y.-X., Duan Y.-S. Localization of fermionic fields on braneworlds with bulk tachyon matter // Mod.Phys.Lett.A. 2008. Vol. 23. P. 2093–2101.
139. Zhao Z.-H., Liu Y.-X., Li H.-T., Wang Y.-Q. Effects of the variation of mass on fermion localization and resonances on thick branes // Phys.Rev.D. 2010. Vol. 82. P. 084030.
140. Zhong Y., Liu Y.-X. The linearization of thick K-branes // Phys.Rev.D. 2013. Vol. 88. P. 024017.

Список иллюстраций

1.1	Простейший кинк и локализованная около него полевая конфигурация	18
3.1	Потенциал в ϕ канале в отсутствие дефекта	55
3.2	Потенциал в ϕ канале при положительном натяжении браны $b = +\frac{1}{2}$. Жирная линия в $\tau = 0$ обозначает δ -образную яму	57
3.3	Потенциал в ϕ канале при отрицательном натяжении браны $b = -\frac{1,999}{3}$. Жирная линия в $\tau = 0$ обозначает δ -образный барьер	61
4.1	Результат численных вычислений отношения CP -нарушающей компоненты константы связи Юкавы к CP -сохраняющей для b -кварка в модели с одним скалярным дублетом	83