

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Романовский Леонид Михайлович

**Двумерные модели цифровых сигналов на базе
адаптивных сплайн-всплесков**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ
Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
профессор, д. ф.-м. н. Демьянович Юрий Казимирович

Санкт-Петербург — 2015

Оглавление

Введение	4
1 О сплайн-всплесковых разложениях	12
1.1 Предварительные определения	12
1.2 О непрерывности координатных функций	14
1.3 Нелинейные координатные функции	18
1.4 Условие полноты цепочки векторов	21
1.5 Укрупнение сетки и вложенность пространств	23
1.6 Калибровочные соотношения	24
1.7 Формулы реконструкции	27
1.8 Формулы декомпозиции	29
2 Математическое моделирование и двумерные всплесковые разложения	34
2.1 Первоначальные обозначения	34
2.2 Непрерывность функций курантова типа	42
2.3 Укрупнение триангуляции	43
2.4 Вложенность пространств и всплесковое разложение	46
2.5 Триангуляция, допускающая локальное укрупнение	49
2.6 Структура барицентрических звезд на исходной и укрупненной триан- гуляциях	53
2.7 Калибровочные соотношения	56
2.8 Биортогональная система и ее значения на базисных функциях объ- емлющего пространства	60
2.9 Общая структура всплескового разложения	61

2.10	Всплесковое разложение при локальном укрупнении триангуляции . . .	64
3	Реализация алгоритма укрупнения триангуляции	69
3.1	Обозначения	69
3.2	Изменение таблицы инциденций	71
3.3	Укрупнение триангуляции	72
3.4	Алгоритм укрупнения в данной области	73
3.5	Програмная реализация алгоритма	79
3.6	Структура алгоритма укрупнения триангуляции	80
3.7	Результаты работы программы на модельных примерах	88
	Литература	97
	Приложение	102
I	Таблицы	102
II	Результаты работы программы на модельных примерах	114
III	Исходные коды компьютерных программ	117

Введение

Актуальность работы

При решении практических задач компьютерного моделирования возникает потребность построения аппроксимации наборов данных значительного объема, характеризующихся функциями с нерегулярным поведением (например, неограниченным ростом функций или их производных). В частности, подобные задачи возникают в метеорологии, где требуется проводить детальный анализ погодных явлений, например, циклонов. Решение таких задач, как правило, требует существенных вычислительных ресурсов; при этом иногда применяются так называемые всплесковые¹ разложения. Сплайн-всплесковая аппроксимация набора данных представляет собой линейную комбинацию некоторых базисных функций, имеющих компактный носитель; соответствующие базисные функции строятся стандартным образом и определяются сеткой узлов, ассоциируемой с рассматриваемым набором данных. При этом исходный поток преобразуется в коэффициенты такого разложения и представляется в виде двух потоков: основного, позволяющего построить приближенную модель исходных данных, и уточняющего (всплескового). Классическая теория вэйвлетов использует преимущественно равномерные сетки узлов, которые позволяют применять мощный аппарат преобразования Фурье. Для построения аппроксимаций функций с особенностями предложен другой подход, в основе которого лежат аппроксимационные соотношения. В этом случае оказалось возможным использование неравномерных сеток узлов, что позволяет в некоторых случаях добиться сокращения объема ресурсов, необходимых для построения и численного анализа математической модели.

Трудности возникают в при решении практических задач, связанных с много-

¹В русскоязычной литературе термин “всплеск” применяется вместо слова “вэйвлет”.

мерными наборами данных; в частности, в двумерном случае используемые сетки являются множеством вершин некоторой триангуляции. Однако, не всякая триангуляция может быть локально укрупнена с сохранением правильности: например, стандартная триангуляция, часто используемая в методе конечных элементов², не допускает локального укрупнения. Таким образом, представляет интерес разработка симплициальных разбиений двумерной плоскости, допускающих локальные укрупнения с сохранением топологической правильности, а также построение соответствующих пространств сплайн-всплесковых разложений.

Цель диссертационной работы

Основной целью данной диссертационной работы является построение адаптивных методов числовой обработки и математического моделирования потоков данных, естественным образом ассоциируемых с двумерными объектами.

²Ю.К. Демьянович, А.В. Зимин “Аппроксимации курантова типа и их взвешенные разложения” – Проблемы математического анализа, 2008, с. 3-22.

Задачи диссертационной работы

В рамках реализации цели диссертационной работы поставлены следующие задачи:

- построение триангуляций на плоскости, допускающих многократные локальные укрупнения;
- исследование пространств сплайн-всплесковых разложений, ассоциированных с рассматриваемыми сетками узлов;
- разработка адаптивных алгоритмов и численных методов всплесковой обработки двумерных моделей цифровых данных;
- реализация предложенных алгоритмов в виде комплекса компьютерных программ.

Положения, выносимые на защиту

1. Триангуляция, допускающая локальное укрупнение с сохранением топологии исходной триангуляции в области укрупнения.
2. Сплайн-всплесковые разложения вложенных пространств курантова типа, ассоциированные с предложенными триангуляциями.
3. Алгоритмы декомпозиции и реконструкции, а также выведены соответствующие калибровочные соотношения.
4. Комплекс компьютерных программ, реализующий предложенный алгоритм.

Научная новизна

Все результаты, представленные в работе, являются новыми.

Личный вклад автора

Личный вклад автора состоит в выполнении исследований, изложенных в диссертационной работе, реализации предложенных алгоритмов, в анализе и оформлении результатов в виде научных докладов.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит, в основном, теоретический характер, однако полученные результаты представляют также и практический интерес. Вопросы построения адаптивных сеток узлов в многомерном случае исследованы недостаточно полно; необходимость использования таких сеток возникает, в частности, в численных методах, использующих всплесковые разложения. Предложенные алгоритмы позволяют проводить адаптивное укрупнение триангуляции, а также выполнять построение соответствующих сплайн-всплесковых разложений исходного потока. Результаты диссертационной работы могут быть использованы при решении прикладных задач, связанных с моделированием и анализом цифровых потоков данных, а также при сжатии и последующем восстановлении с заданной точностью больших объемов информации с резко меняющимися характеристиками. Кроме того, важной характеристикой метода всплесков, исследуемого в данной работе, является его параллелизуемость.

Публикации по теме диссертационной работы

Список публикаций в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Демьянович Ю. К., Романовский Л. М. *Сплайн-всплесковое укрупнение аппроксимаций курантова типа*. Численные методы и вопросы организации вычислений. XXVI, Зап. научн. сем. ПОМИ, 419, ПОМИ, СПб., 2013, с. 77–110.
2. Романовский Л. М. *Реализация алгоритма локального укрупнения триангуляции*. Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 2014:3, с. 111-117.
3. Романовский Л. М. *Об алгоритме локального укрупнения триангуляции*. Компьютерные инструменты в образовании, ГНИИ ИТТ 'Информатика', СПб., 2014:2, с. 29-34.

Список публикаций в сборниках трудов научных конференций

1. Демьянович Ю. К., Романовский Л. М. *Локальное укрупнение триангуляции и двумерные сплайн-всплески*. СПИСОК-2012: Материалы всероссийской научной конференции по проблемам информатики, Санкт-Петербург, ВВМ, 2012, с. 117-182.
2. Романовский Л. М. *О локальном укрупнении триангуляции*. СПИСОК-2013: Материалы всероссийской научной конференции по проблемам информатики, Санкт-Петербург, ВВМ, 2013, с. 207-210.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, библиографии и приложения. Общий объем диссертации составляет 119 страниц. В тексте работы содержится 7 таблиц и 25 рисунков; в приложении содержится 9 таблиц и 3 листинга исходных кодов компьютерных программ. В библиографии работы содержится 53 наименования.

Описание глав

В **первой главе** рассмотрены вопросы общие построения сплайн-всплесковых разложений. Даются основные определения и термины, используемые в работе. Рассмотрены вопросы непрерывности и гладкости сплайн-всплесковых функций. Выполнено построение пространства сплайнов $\mathbb{S}_1^*(X, \varphi)$, ассоциированного с сеткой узлов X и с генерирующей функцией φ . Далее доказана вложенность пространства сплайнов на укрупненной сетке узлов \tilde{X} в пространство сплайнов, ассоциированное с исходной сеткой:

$$\mathbb{S}_1^*(\tilde{X}, \varphi) \subset \mathbb{S}_1^*(X, \varphi).$$

На примере функций первого порядка выполнено построение калибровочных соотношений, а также алгоритмов реконструкции и декомпозиции.

Вторая глава посвящена вопросам построения сплайн-всплесковых разложений с использованием функций Куранта. Выполнено построение триангуляции, допускающей сохранение правильности при проведении локального укрупнения, а также построены алгоритмы проведения таких укрупнений; при этом для задания триангуляции предлагается использовать таблицу инцидентий треугольничко-вершина. Описан общий вид топологии результирующей триангуляции на границе и в области укрупнения, рассмотрены виды барицентрических звезд, получающихся на границе и в области локального укрупнения. Как и для одномерного случая, доказана вложенность пространства сплайнов, ассоциированного с укрупненной триангуляцией, в исходное пространство, а также выполнено построение сплайн-всплесковых пространств. Приводится общий вид калибровочных соотно-

шений, а также формул декомпозиции и реконструкции, связанных с результирующей укрупненной триангуляцией. Для случая сплайн-всплескового разложения первого порядка выведены формулы декомпозиции и реконструкции. Далее даны калибровочные соотношения для рассматриваемых типов барицентрических звезд. Доказан изоморфизм топологий исходной и укрупненной триангуляций.

В **третьей главе** дано описание алгоритма локального укрупнения триангуляции, сохраняющего топологию исходной триангуляции в области укрупнения. Изоморфизм исходной и укрупненной топологий позволяет проводить многократные рекуррентные локальные укрупнения. Выведены преобразования, позволяющие проводить локальные укрупнения с сохранением топологии. После этого показан процесс изменения триангуляции и ее таблицы инциденций при проведении укрупнения. Далее дается описание программы, реализующей рассмотренный в предыдущих главах алгоритм. В качестве языка программирования была выбрана Java; выбор обусловлен возможностями распараллеливания и переносимостью на различные аппаратные платформы. В качестве входных данных необходимо передать таблицы инциденций обрабатываемой триангуляции. Для удобства тестирования рассматриваемого в работе метода была реализована возможность использовать в качестве входных данных программы графическое изображение в любом из распространенных форматов (bmp, png, jpeg и другие), для которого автоматически выполняется построение триангуляции с необходимой топологией. Для чтения данных используется класс `BufferedImage`, входящий в компилятор Java от компании Oracle. В качестве аппроксимируемых значений берутся уровни яркости компонент цвета соответствующего пикселя в представлении RGB³, при этом каждый из трех базовых цветов (красного, зеленого и синего) обрабатывается независимо на отдельной сетке. В дальнейшем выполняется адаптивное локальное укрупнение построенных триангуляций, а затем построение курантовских аппроксимаций исходных значений. В последних разделах главы демонстрируются результаты работы алгоритма на модельных примерах.

В **Заключении** сформулированы основные результаты работы.

³RGB — аббревиатура английских слов Red, Green, Blue — красный, зелёный, синий соответственно, аддитивная модель представления цвета.

В **Приложение** вынесены таблицы результатов численных экспериментов, наборы тестовых изображений и соответствующие им аппроксимации, а также исходные коды комплекса компьютерных программ, реализующего предложенные алгоритмы.

Глава 1

О сплайн-всплесковых разложениях

Обзор главы

В этой главе будут рассмотрены сплайн-всплесковые разложения первого порядка в соответствии с подходами, изложенным в [13], [19], [26], [8]. Даются основные определения и термины, используемые в дальнейшем, проводится обзор существующей теории сплайн-всплесковых разложений.

1.1. Предварительные определения

На интервале (α, β) вещественной оси \mathbb{R} рассмотрим сетку

$$X \quad : \quad \cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

Пусть

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} x_j = \alpha, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} x_j = \beta.$$

Определение: Множество двумерных векторов $A \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющее соотношению

$$\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}) \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (1.1)$$

будем называть полной цепочкой векторов.

Пусть $S_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_j, x_{j+1}) \cup (x_{j+1}, x_{j+2})$, $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t)^T$. Рассмотрим функции $\omega_j(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, $j \in \mathbb{Z}$, такие, что

$$\begin{aligned} \sum_{j' \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_{j'} \omega_{j'}(t) &= \varphi(t), \quad \forall t \in (\alpha, \beta) \setminus X, \\ \omega_j(t) &\equiv 0 \quad \forall t \notin \bar{S}_j, \quad \text{supp } \omega_j = \bar{S}_j. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Определение: Соотношения вида (1.2) будем называть аппроксимационными соотношениями.

При $t \in (x_k, x_{k+1})$

$$\mathbf{a}_{k-1} \omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k \omega_k(t) = \varphi(t), \quad (1.3)$$

с учетом (1.1) имеем

$$\omega_{k-1}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}, \quad \omega_k(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}.$$

Для фиксированного $j \in \mathbb{Z}$, $k = j$ и $k = j + 1$, получим:

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} & t \in (x_j, x_{j+1}) \\ \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} & t \in (x_{j+1}, x_{j+2}) \\ 0 & t \notin [x_j, x_{j+2}] \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\text{supp } \omega_j \subset [x_j, x_{j+2}].$$

Определение: Функции $\omega_j(t)$, полученные из аппроксимационных соотношений, называются координатными сплайнами.

Обозначим l -ю компоненту вектора \mathbf{a}_i через $[a_j]_l$, так что

$$\mathbf{a}_i \stackrel{\text{def}}{=} ([a_j]_0, [a_j]_1).$$

Тогда функцию $\omega_j(t)$ можно записать в следующем виде:

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \frac{t \cdot [a_{j-1}]_0 - [a_{j-1}]_1}{[a_{j-1}]_0 [a_j]_1 - [a_{j-1}]_1 [a_j]_0} & t \in (x_j, x_{j+1}) \\ \frac{[a_{j+1}]_1 - t \cdot [a_{j+1}]_0}{[a_j]_0 [a_{j+1}]_1 - [a_j]_1 [a_{j+1}]_0} & t \in (x_{j+1}, x_{j+2}) \\ 0 & t \notin [x_j, x_{j+2}] \end{cases}.$$

Можно заметить, что $\omega_j(t)$ – кусочно-линейная функция.

Рассмотрим

$$\tilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j c_j \omega_j(t), \quad t \in (\alpha, \beta) \setminus X$$

– линейную комбинацию функций ω_j при $j \in \mathbb{Z}$

По определению функции $\omega_j(t)$ для каждого $t \in (x_i, x_{i+1})$ функция $\tilde{u}(t)$ будет иметь вид:

$$\tilde{u}(t) = c_{i-1} \omega_{i-1}(t) + c_i \omega_i(t).$$

Определение: Замыкание $\mathbb{S}_1(X, \mathbf{A}, \varphi)$ линейной оболочки функций $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ в топологии поточечной сходимости называется пространством сплайнов первой степени:

$$\mathbb{S}_1(X, \mathbf{A}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \{u \mid u = \sum_j c_j \omega_j \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}. \quad (1.5)$$

Элементы этого пространства назовем сплайнами первой степени.

1.2. О непрерывности координатных функций

Определим $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^2$ через следующее тождество:

$$\mathbf{d}_i^T x \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{a}_{i-1}, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \forall i \in \mathbb{Z}; \quad (2.1)$$

тогда

$$\mathbf{d}_i^T = (-[a_{i-1}]_1, [a_{i-1}]_0). \quad (2.2)$$

Лемма 1: Если цепочка $\{\mathbf{a}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ полная, то справедливы соотношения:

$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{a}_i \neq 0, \quad \mathbf{d}_i^T \mathbf{a}_{i-1} = 0, \quad \mathbf{d}_i^T \mathbf{a}_{i-2} \neq 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Доказательство:

Первые 2 соотношения очевидны с учетом (2.1).

Для доказательства третьего тождества будем рассуждать от противного.

Пусть $\mathbf{d}_i^T \mathbf{a}_{i-2} = 0$. Составим систему уравнений относительно неизвестных $[d_i]_0, [d_i]_1$

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i^T \mathbf{a}_{i-2} = 0, \\ \mathbf{d}_i^T \mathbf{a}_{i-1} = 0. \end{cases}$$

Определитель системы $\det(\mathbf{a}_{i-2}, \mathbf{a}_{i-1})$ отличен от нуля по условию полноты цепочки \mathbf{a}_i , следовательно, $\mathbf{d}_i = \mathbf{0}$, что противоречит первому тождеству (2.3). Лемма доказана. ■

Обозначение: $\varphi_i \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_i)$.

Теорема 1: *Для непрерывности функции $\omega_j(x)$ на (α, β) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathbf{d}_i^T \varphi_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Доказательство:

Достаточность:

Докажем непрерывность ω_j в точках x_j, x_{j+1} и x_{j+2} .

В соответствии с (1.4) получаем:

$$\omega_j(x_j + 0) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi_j)}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)}, \quad \omega_j(x_{j+2} - 0) = -\frac{\det(\mathbf{a}_{j+1}, \varphi_{j+2})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})}. \quad (2.5)$$

По (2.1), (2.4) числитель первого равенства равен нулю при $i = j$. Числитель во втором равенстве равен $d_{j+2}^T \varphi_{j+2}$ и также равен нулю с учетом формулы (2.4) при $i = j + 2$.

Таким образом, функция ω_j непрерывна в точках x_j и x_{j+2} .

Покажем непрерывность ω_j в точке x_{j+1} . При $t \in (x_j, x_{j+1})$ из (1.2) находим

$$\mathbf{a}_{j-1} \omega_{j-1}(t) + \mathbf{a}_j \omega_j(t) = \varphi(t), \quad (2.6)$$

а при $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$ из (1.2) получаем

$$\mathbf{a}_j \omega_j(t) + \mathbf{a}_{j+1} \omega_{j+1}(t) = \varphi(t). \quad (2.7)$$

Перейдем к пределу в (2.6) и в (2.7) при $t \rightarrow x_{j+1} - 0$ и $t \rightarrow x_{j+1} + 0$ соответственно. Ввиду того, что $\omega_{j-1}(x_{j+1} - 0) = 0$ и $\omega_{j+1}(x_{j+1} + 0) = 0$, приходим к соотношениям

$$\mathbf{a}_j \omega_j(x_{j+1} - 0) = \varphi(x_{j+1}), \quad \mathbf{a}_j \omega_j(x_{j+1} + 0) = \varphi(x_{j+1}).$$

Отсюда $\omega_j(x_{j+1} - 0) = \omega_j(x_{j+1} + 0)$.

Достаточность доказана.

Необходимость: По непрерывности $\omega_j(t)$ имеем $\omega_j(x_j + 0) = 0$, с учетом формулы (2.6) получаем $\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi_j) = 0$; следовательно, по формуле 2.1, $d_j^T \varphi_j = 0$. Необходимость доказана. ■

Обозначение:

$$\mathbf{a}_j^{\star \text{ def}} \varphi_{j+1} = (1, x_{j+1})^T, \quad \mathbf{d}_i^{\star \text{ def}} = (-x_i, 1)^T \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}; \quad (2.8)$$

Очевидно, что $A^{\star \text{ def}} = \{\mathbf{a}_j^{\star}\}$ — полная цепочка векторов; решение соответствующей системы аппроксимационных соотношений обозначим $\omega_j^*(t)$.

По аналогии с пространством сплайнов $\mathbb{S}_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{S}_1(X, A)$ построим пространство сплайнов $\mathbb{S}_1^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{S}_1(X, A^{\star})$.

Следствие 1: Функция ω_j^* непрерывна на отрезке $(\alpha, \beta) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

Доказательство: В обозначениях (2.8) второе из соотношений в (2.3) принимает вид $(\mathbf{d}_i^{\star})^T \mathbf{a}_{i-1}^{\star} = (\mathbf{d}_i^{\star})^T \varphi_i = 0$, что совпадает с условием (2.4); теперь утверждение, сформулированное в следствии, вытекает из теоремы 1. ■

Теорема 2: Во множестве $\{\mathbb{S}_1(X, \mathbf{A}) \mid \mathbf{A} \in \mathcal{A}\}$ пространств (X, \mathbf{A}) -сплайнов 1-й степени существует и единственно пространство непрерывных сплайнов; оно определяется цепочкой \mathbf{A}^{\star} и совпадает с пространством $\mathbb{S}_1^*(X)$.

Доказательство: Существование пространства непрерывных (X, \mathbf{A}) -сплайнов следует из теоремы 3 (см. также следствие 1); таковым является пространство $\mathbb{S}_1^*(X)$.

Осталось установить, что во множестве всех пространств сплайнов первой степени на сетке X существует лишь одно пространство непрерывных сплайнов.

Пусть по некоторой полной цепочке векторов $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ построено пространство

$$\mathbb{S}_1(X, \mathbf{A}),$$

в котором координатные функции $\omega_j \forall j \in \mathbb{Z}$ лежат в пространстве $C(\alpha, \beta)$. Пусть по этой цепочке построена цепочка $\{\mathbf{d}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ согласно формулам (2.1).

В соответствии с теоремой 1 соотношения $\omega_j \in C(\alpha, \beta) \forall j \in \mathbb{Z}$ эквивалентны соотношениям $\mathbf{d}_i^T \varphi_i = 0 \forall i \in \mathbb{Z}$; значит, векторы \mathbf{d}_i и φ_i ортогональны. Вспоминая, что по построению вектора \mathbf{d}_i (см. (2.1)) он ортогонален также вектору \mathbf{a}_{i-1} , приходим к выводу о коллинеарности векторов \mathbf{a}_{i-1} и φ_i ; таким образом, существуют (благодаря полноте цепочек $\{\mathbf{a}_j\}$ и $\{\varphi_j\}$) отличные от нуля константы $c_i \in \mathbb{R}^1$ такие, что $\mathbf{a}_{i-1} = c_{i-1} \varphi_i$, или (что то же самое) $\mathbf{a}_i = c_i \mathbf{a}_i^*$. Получаемые в этом случае по формулам (1.4) функции обозначим ω_j . Очевидно, что они равны функциям ω_j с точностью до умножения на константу:

$$\omega_j = \frac{1}{c_j} \omega_j^*,$$

поэтому линейные оболочки множеств $\{\omega_j \mid \forall j \in \mathbb{Z}\}$ и $\{\omega_j^* \mid \forall j \in \mathbb{Z}\}$ совпадают.

Единственность пространства непрерывных (X, \mathbf{A}) -сплайнов доказана. ■

Определение: Пространство $\mathbb{S}_1^*(X)$ называется пространством непрерывных (X) -сплайнов первой степени, а сплайны этого пространства — непрерывными сплайнами первой степени на сетке X .

Замечание: Из формулы (1.4) получаем:

$$\omega_j^*(t) = \begin{cases} (t - x_j)/(x_{j+1} - x_j) & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ (x_{j+2} - t)/(x_{j+2} - x_{j+1}) & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0 & t \notin [x_j, x_{j+2}]. \end{cases} \quad (2.9)$$

Построенный таким образом сплайн $\omega_j^*(t)$ можно рассматривать как одномерную функцию Куранта.

1.3. Нелинейные координатные функции

Пусть φ — двухкомпонентная вектор-функция класса C^S на (α, β) . Построим функции $\varphi_j(t)$ по формулам (1.3)—(1.4) и введем обозначения

$$\varphi_k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_k), \quad \varphi_k^{(S)} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{(S)}(x_k).$$

Теорема 3 (О гладкости): Пусть

$$\begin{aligned} \varphi &\in C^S(\alpha, \beta), \\ \mathbf{d}_k^T \varphi_k^{(S)} &= 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Тогда $\omega_j^{(S)} \in C(\alpha, \beta)$.

Доказательство: Заметим прежде всего, что достаточно доказать непрерывность функции $\omega_j^{(S)}$ в точках x_j , x_{j+1} и x_{j+2} , так как непрерывность ее в остальных точках интервала (α, β) очевидна.

В соответствии с формулой (1.4) легко получить предельные значения функции $\omega_j^{(S)}$:

$$\omega_j^{(S)}(x_j + 0) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi_j^{(S)})}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)}, \quad \omega_j^{(S)}(x_{j+2} - 0) = -\frac{\det(\mathbf{a}_{j+1}, \varphi_{j+2}^{(S)})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})}.$$

Согласно формуле (2.1) числитель первого из этих равенств совпадает с $\mathbf{d}_j^T \varphi_j^{(S)}$, и потому равен нулю по условию (3.1) при $k = j$; числитель во втором равенстве совпадает с выражением $\mathbf{d}_{j+2}^T \varphi_{j+2}^{(S)}$ и также равен нулю по условию (3.1), если в этом условии положить $k = j + 2$. Непрерывность функций $\omega_j^{(S)}$ в точках x_j и x_{j+2} при $j \in \mathbb{Z}$ установлена (напомним, что $\text{supp } \omega_j^{(S)} \subset [x_j, x_{j+2}]$).

Осталось доказать непрерывность $\omega_j^{(S)}$ в точке x_{j+1} . При $t \in (x_j, x_{j+1})$ из (1.2) находим

$$\mathbf{a}_{j-1} \omega_{j-1}(t) + \mathbf{a}_j \omega_j(t) = \varphi(t), \tag{3.2}$$

а при $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$ из (1.2) получаем

$$\mathbf{a}_j \omega_j(t) + \mathbf{a}_{j+1} \omega_{j+1}(t) = \varphi(t). \tag{3.3}$$

Перейдем в (2.5) к пределу при $t \rightarrow x_{j+1} - 0$ и в (2.6) к пределу при $t \rightarrow x_{j+1} + 0$; учитывая, что согласно только что доказанному $\omega_{j-1}(x_{j+1} - 0) = 0$ и $\omega_{j+1}(x_{j+1} + 0) = 0$, приходим к соотношениям

$$\mathbf{a}_j \omega_j(x_{j+1} - 0) = \varphi(x_{j+1}), \quad \mathbf{a}_j \omega_j(x_{j+1} + 0) = \varphi(x_{j+1}).$$

Отсюда следует равенство $\omega_j(x_{j+1} - 0) = \omega_j(x_{j+1} + 0)$. Теорема доказана. ■

Следствие 1: Если $\{\varphi_j^{(S)}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ — полная цепочка, то при

$$\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{j+1}^{(S)} \tag{3.4}$$

верны соотношения $\omega_j^{(S)} \in C(\alpha, \beta)$.

Доказательство: При предположении (3.4) второе из соотношений в (2.3) принимает вид $\mathbf{d}_k^T \varphi_k^{(S)} = 0$, что совпадает с условием (2.4); теперь утверждение, сформулированное в следствии, вытекает из теоремы 1. ■

Предположим, что

(A₁) φ непрерывна на интервале (α, β) , а цепочка $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ — полная.

Цепочку векторов $\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{j+1}$ обозначим \mathbf{A}^* .

Теорема 4: Пусть выполнено предположение (A₁). Тогда в множестве

$$\{\mathbb{S}_1(X, \mathbf{A}, \varphi) \mid \mathbf{A} \in \mathcal{A}\}$$

пространств (X, \mathbf{A}, φ) -сплайнов первого порядка существует и единственно пространство непрерывных сплайнов.

Доказательство:

1. Для доказательства существования пространства непрерывных (X, \mathbf{A}, φ) -сплайнов положим $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^*$ в соотношениях (1.1). Ясно, что ввиду полноты цепочки $\{\mathbf{a}_j^*\}$ можно воспользоваться формулами (1.4); получаемые в этом случае образующие сплайны обозначим ω_j^* . Благодаря выполнению свойства (2.4) при $S = 0$ для указанного выбора векторов \mathbf{a}_j (см. (2.1)) в соответствии с теоремой 1 имеем $\omega_j^* \in C(\alpha, \beta) \forall j \in \mathbb{Z}$; в части существования теорема доказана.

2. Установим единственность пространства непрерывных (X, \mathbf{A}, φ) -сплайнов.

Пусть по полной цепочке векторов \mathbf{a}_k построено пространство $\mathbb{S}_1(X, \mathbf{A}, \varphi)$, в котором образующие функции $\omega_j \forall j \in \mathbb{Z}$ лежат в пространстве $C(\alpha, \beta)$.

В соответствии с теоремой 3 соотношения $\omega_j \in C(\alpha, \beta) \forall j \in \mathbb{Z}$ эквивалентны соотношениям $\mathbf{d}_k^T \varphi_k = 0 \forall k \in \mathbb{Z}$; последние означают ортогональность векторов \mathbf{d}_k и φ_k . Вспоминая, что по построению вектора \mathbf{d}_k (см. (2.1)) он также ортогонален вектору \mathbf{a}_{k-1} , приходим к выводу о коллинеарности векторов \mathbf{a}_{k-1} и φ_k ; таким образом, существуют (благодаря полноте цепочки $\{\mathbf{a}_j\}$ и условию (A_1)) отличные от нуля константы $c_k \in \mathbb{R}^1$ такие, что $\mathbf{a}_{k-1} = c_{k-1}\varphi_k$, или (что то же самое) $\mathbf{a}_k = c_k \mathbf{a}_k^*$. Получаемые в этом случае по формулам (1.4) функции обозначим ω_j . Очевидно, что они лишь постоянным множителем отличаются от полученных в первой части доказательства функций: $\omega_j = \frac{1}{c_j} \omega_j^*$; поэтому линейные оболочки множеств $\{\omega_j \mid \forall j \in \mathbb{Z}\}$ и $\{\omega_j^* \mid \forall j \in \mathbb{Z}\}$ совпадают. Единственность пространства непрерывных (X, \mathbf{A}, φ) -сплайнов доказана. ■

Определение: Пространство $\mathbb{S}_1(X, \mathbf{A}^*, \varphi)$ называется пространством (X, φ) -сплайнов и обозначается $\mathbb{S}_1^*(X, \varphi)$; сплайны этого пространства называем сплайнами максимальной гладкости на сетке X , порожденными генерирующей функцией $\varphi(t)$.

Замечание 1: Если $\varphi(t) = (1, t)^T$, то получается важный частный случай, которому посвящен §1, а именно: получается полиномиальный сплайн ω_j^* первой степени с носителем $\text{supp } \omega_j^* = [x_j, x_{j+2}]$; если к тому же $\mathbf{a}_j = \varphi(x_{j+1})$, то отыскиваемый сплайн непрерывен и представляет собой одномерную функцию Р.Куранта:

$$\omega_j^*(t) = (t - x_j)(x_{j+1} - x_j)^{-1} \quad \text{при } t \in [x_j, x_{j+1}), \quad (3.5)$$

$$\omega_j^*(t) = (x_{j+2} - t)(x_{j+2} - x_{j+1})^{-1} \quad \text{при } t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \quad (3.6)$$

$$\omega_j^*(t) = 0 \quad \text{при } t \notin [x_j, x_{j+2}]. \quad (3.7)$$

1.4. Условие полноты цепочки векторов

Здесь найдем достаточные условия полноты цепочки $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, т. е. достаточные условия того, что $\det(\varphi_j, \varphi_{j+1}) \neq 0 \forall j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$; тогда

$$\varphi_{j+1} = \varphi_j + \varphi'_j(x_{j+1} - x_j) + \mathbf{o}(x_{j+1} - x_j),$$

где $\mathbf{o}(\alpha)$ — двумерная вектор-функция вещественного переменного α , такая что

$$\frac{\mathbf{o}(\alpha)}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{0}.$$

Таким образом

$$\det(\varphi_j, \varphi_{j+1}) = \det(\varphi_j, \varphi'_j)(x_{j+1} - x_j) + o(x_{j+1} - x_j). \quad (4.1)$$

Положим $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j \in \mathbb{Z}} (x_{j+1} - x_j)$.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 5: Если $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$ и

$$|\det(\varphi, \varphi')(t)| \geq c > 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad (4.2)$$

то при достаточно малом h_X цепочка $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ является полной.

Доказательство: Очевидным образом следует из формулы (4.1) ввиду равномерной непрерывности компонент вектора $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. ■

Пусть $\varphi \in C^2[\alpha, \beta]$; тогда

$$\varphi_{j+1} = \varphi_j + \varphi'_j(x_{j+1} - x_j) + \varphi''_j(x_{j+1} - x_j)^2/2 + \mathbf{o}((x_{j+1} - x_j)^2);$$

отсюда

$$\begin{aligned}
& \det(\varphi_j, \varphi_{j+1}) = \\
& = \det \begin{pmatrix} [\varphi_j]_0 & [\varphi'_j]_0(x_{j+1} - x_j) + [\varphi''_j]_0(x_{j+1} - x_j)^2 \\ [\varphi_j]_1 & [\varphi'_j]_1(x_{j+1} - x_j) + [\varphi''_j]_1(x_{j+1} - x_j)^2 \end{pmatrix} = \\
& = (x_{j+1} - x_j) \det(\varphi_j, \varphi'_j) + (x_{j+1} - x_j)^2 \det \begin{pmatrix} [\varphi_j]_0 & [\varphi''_j]_0 \\ [\varphi_j]_1 & [\varphi''_j]_1 \end{pmatrix} = \\
& = (x_{j+1} - x_j) [\det(\varphi_j, \varphi'_j) + (x_{j+1} - x_j) \det(\varphi_j, \overline{\varphi''_j})]. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \max_{x_j \leq \xi, \eta \leq x_{j+1}} |\det(\varphi_j, \overline{\varphi''_j}(\xi, \eta))|. \tag{4.4}$$

При предположении $\varphi \in C^2[\alpha, \beta]$ число M конечно.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 6: Если $\varphi \in C^2[\alpha, \beta]$ и выполнено условие (4.2), то при

$$h_X < c/M \tag{4.5}$$

цепочка $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ является полной; здесь числа c и M определяются формулами (4.2), (4.4) соответственно.

Доказательство: Следует из соотношения (4.3) и формул (4.2), (4.4). ■

Замечание 2: Если $\varphi(t) = (1, t)^T$, то для цепочки φ_j свойство полноты очевидно для любой сетки X ; при этом $\det(\varphi, \varphi')(t) \equiv 1$, так что условие (4.2) выполнено с константой $c = 1$, а число M согласно формуле (4.4) равно нулю; таким образом h_X — произвольное положительное число.

1.5. Укрупнение сетки и вложенность пространств

Покажем вложенность пространства непрерывных сплайнов первого порядка на укрупненной сетке в аналогичное пространство сплайнов на исходной сетке (смотри [14], [17]).

Для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\tilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \text{ при } j \leq k, \text{ и } \tilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} \text{ при } j \geq k+1, \quad \xi \stackrel{\text{def}}{=} x_{k+1}, \quad (5.1)$$

и рассмотрим новую сетку $\tilde{X} : \dots < \tilde{x}_{-1} < \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \dots$

Пусть $\tilde{\varphi}_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\tilde{x}_j)$. Предположим, что $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ — полная цепочка векторов.

Положим $\tilde{\mathbf{a}}_j \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\varphi}_{j+1}$. Рассмотрим функции $\tilde{\omega}_j^*$, определяемые соотношениями

$$\sum_{j' \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathbf{a}}_{j'}^* \tilde{\omega}_{j'}^*(t) = \varphi(t), \quad \tilde{\omega}_j^*(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin \tilde{S}_j, \quad \tilde{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} [\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+2}], \quad (5.2)$$

следовательно, $\tilde{\omega}_j^*$ — сплайны первого порядка, описываемые уже знакомыми нам формулами:

$$\tilde{\omega}_j^*(t) = \begin{cases} \frac{\det(\tilde{\varphi}_j, \varphi(t))}{\det(\tilde{\varphi}_j, \tilde{\varphi}_{j+1})} & \text{при } t \in (\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}) \\ \frac{\det(\varphi(t), \tilde{\varphi}_{j+2})}{\det(\tilde{\varphi}_{j+1}, \tilde{\varphi}_{j+2})} & \text{при } t \in (\tilde{x}_{j+1}, \tilde{x}_{j+2}) \\ 0 & \text{при } t \notin (\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+2}) \end{cases} \quad (5.3)$$

Полагая $\tilde{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{\mathbf{a}}_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}}$, аналогично (1.5) построим пространство

$$\mathbb{S}_1^*(\tilde{X}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \{u \mid u = \sum_j c_j \tilde{\omega}_j^* \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

Очевидно, что при $j \notin \{k-1, k\}$ функции $\tilde{\omega}_j^*$ совпадают с ω_j^* :

$$\tilde{\omega}_j^*(t) \equiv \omega_j^*(t) \quad \forall j \leq k-2, \quad \tilde{\omega}_j^*(t) \equiv \omega_{j+1}^*(t) \quad \forall j \geq k+1 \quad (5.4)$$

и

$$\tilde{\mathbf{a}}_j^* = \mathbf{a}_j^* \quad \text{при } j \leq k-2, \quad \tilde{\mathbf{a}}_j^* = \mathbf{a}_{j+1}^* \quad \text{при } j \geq k+1. \quad (5.5)$$

Из (1.2) и (5.2) вытекает равенство

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathbf{a}}_j^* \tilde{\omega}_j^*(t) = \sum_{j' \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_{j'}^* \omega_{j'}^*(t). \quad (5.6)$$

Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}^* \tilde{\omega}_{k-1}^*(t) + \tilde{\mathbf{a}}_k^* \tilde{\omega}_k^*(t) = \mathbf{a}_{k-1}^* \omega_{k-1}^*(t) + \mathbf{a}_k^* \omega_k^*(t) + \mathbf{a}_{k+1}^* \omega_{k+1}^*(t). \quad (5.7)$$

Теорема 7: *Справедливо соотношение*

$$\mathbb{S}_1^*(\tilde{X}, \varphi) \subset \mathbb{S}_1^*(X, \varphi). \quad (5.8)$$

Доказательство: Система линейных уравнений (5.7) разрешима относительно $\tilde{\omega}_{k-1}$ и $\tilde{\omega}_k$ по условию полноты цепочки векторов $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Следовательно, функции $\tilde{\omega}_{k-1}$ и $\tilde{\omega}_k$ представимы в виде линейных комбинаций функций ω_{k-1} и ω_k . Теорема доказана. ■

1.6. Калибровочные соотношения

Ранее было установлено, что при $j \in \{k-1, k\}$ сплайны $\tilde{\omega}_j^*$ представляют собой линейную комбинацию сплайнов ω_{j-1}^* , ω_j^* и ω_{j+1}^* :

$$\tilde{\omega}_{k-1}^* = c_{-1} \omega_{k-1}^* + c_0 \omega_k^* + c_1 \omega_{k+1}^*, \quad \tilde{\omega}_k^* = c'_{-1} \omega_{k-1}^* + c'_0 \omega_k^* + c'_1 \omega_{k+1}^*. \quad (6.1)$$

Определение: *Соотношения вида (6.1) называются калибровочными соотношениями.*

Теорема 8 : *Пусть цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ полная, а компоненты вектор-функции $\varphi(t)$ представляют собой линейно независимую систему функций на любом интервале $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$.*

Тогда на любом интервале (a, b) , $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$ система функций

$$\{\omega_j \mid (a, b) \cap (x_j, x_{j+2}) \neq \emptyset \quad j \in \mathbb{Z}\}$$

линейно независима.

Для того, чтобы система функционалов

$$\{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \text{ supp } g_i \subset (x_i, x_{i+1}),$$

была биортогональна системе функций $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$,¹ необходимо и достаточно, чтобы $\langle g_i, \varphi \rangle = \mathbf{a}_i$.

Доказательство: Первая часть теоремы очевидна. Вторая часть следует из теоремы 1. ■

Пусть функционалы $g_j^* \in (C(\alpha, \beta))^*$ заданы формулой

$$\langle g_j^*, u \rangle = u(x_{j+1}) \quad \forall u \in C(\alpha, \beta) \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Теорема 9: Система функционалов $\{g_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}}$ биортогональна системе функций $\{\omega_i^*\}_{i \in \mathbb{Z}}$, так что $\langle g_j^*, \omega_i^* \rangle = \delta_{i,j}$.

Доказательство: Очевидно по (5.1) и теореме 1. ■

Теорема 10:

$$\tilde{\omega}_{k-1}^*(t) = \omega_{k-1}^*(t) + \frac{\det(\varphi_{k+1}, \tilde{\varphi}_{k+1})}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})} \cdot \omega_k^*(t), \quad (6.2)$$

$$\tilde{\omega}_k^*(t) = \frac{\det(\tilde{\varphi}_k, \varphi_{k+1})}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})} \cdot \omega_k^*(t) + \omega_{k+1}^*(t) \quad \forall t \in (\alpha, \beta). \quad (6.3)$$

Доказательство: Применяя к (6.1) функционалы g_{k-1}^* , g_k^* и g_{k+1}^* , получим:

$$c_{-1} = \langle g_{k-1}^*, \tilde{\omega}_{k-1}^* \rangle, \quad c_0 = \langle g_k^*, \tilde{\omega}_{k-1}^* \rangle, \quad c_1 = \langle g_{k+1}^*, \tilde{\omega}_{k-1}^* \rangle, \quad (6.4)$$

$$c'_{-1} = \langle g_{k-1}^*, \tilde{\omega}_k^* \rangle, \quad c'_0 = \langle g_k^*, \tilde{\omega}_k^* \rangle, \quad c'_1 = \langle g_{k+1}^*, \tilde{\omega}_k^* \rangle. \quad (6.5)$$

Вычислим выражения (6.4).

$$\tilde{\omega}_{k-1}^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\det(\tilde{\varphi}_{k-1}, \varphi(t))}{\det(\tilde{\varphi}_{k-1}, \tilde{\varphi}_k)} & \text{при } t \in (\tilde{x}_{k-1}, \tilde{x}_k), \\ \frac{\det(\varphi(t), \tilde{\varphi}_{k+1})}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})} & \text{при } t \in (\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}). \end{cases} \quad (6.6)$$

¹т.е. $\langle g_i, \omega_j \rangle = \delta_{i,j}$

Т.к. $x_k = \tilde{x}_k$ и $x_{k+2} = \tilde{x}_{k+1}$ получим:

$$c_{-1} = \langle g_{k-1}^*, \tilde{\omega}_{k-1}^* \rangle = \tilde{\omega}_{k-1}^*(x_k) = \tilde{\omega}_{k-1}^*(\tilde{x}_k) = 1,$$

$$c_0 = \langle g_k^*, \tilde{\omega}_{k-1}^* \rangle = \tilde{\omega}_{k-1}^*(x_{k+1}) = \frac{\det(\varphi_{k+1}, \tilde{\varphi}_{k+1})}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})},$$

$$c_1 = \langle g_{k+1}^*, \tilde{\omega}_{k-1}^* \rangle = \tilde{\omega}_{k-1}^*(x_{k+2}) = \tilde{\omega}_{k-1}^*(\tilde{x}_{k+1}) = 0.$$

Первая формула доказана. Аналогично

$$\tilde{\omega}_k^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\det(\tilde{\varphi}_k, \varphi(t))}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})} & \text{при } t \in (\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}), \\ \frac{\det(\varphi(t), \tilde{\varphi}_{k+2})}{\det(\tilde{\varphi}_{k+1}, \tilde{\varphi}_{k+2})} & \text{при } t \in (\tilde{x}_{k+1}, \tilde{x}_{k+2}), \end{cases}$$

откуда

$$c'_{-1} = \langle g_{k-1}^*, \tilde{\omega}_k^* \rangle = \tilde{\omega}_k^*(x_k) = \tilde{\omega}_k^*(\tilde{x}_k) = 0,$$

$$c'_0 = \langle g_k^*, \tilde{\omega}_k^* \rangle = \tilde{\omega}_k^*(x_{k+1}) = \frac{\det(\tilde{\varphi}_k, \varphi_{k+1})}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})},$$

$$c'_1 = \langle g_{k+1}^*, \tilde{\omega}_k^* \rangle = \tilde{\omega}_k^*(x_{k+2}) = \tilde{\omega}_k^*(\tilde{x}_{k+1}) = 1.$$

Теорема доказана. ■

Теорема 11: *Справедливы калибровочные соотношения*

$$\tilde{\omega}_i^* = \sum_j \mathbf{p}_{i,j} \omega_j^*, \quad (6.8)$$

где $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ $\mathbf{p}_{i,j}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathbf{p}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \text{при } i \leq k-2, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{p}_{k-1,k-1} = 1, \quad \mathbf{p}_{k-1,k} = \frac{\det(\varphi_{k+1}, \tilde{\varphi}_{k+1})}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})}, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{p}_{k-1,j} = 0 \text{ при } j \notin \{k-1, k\}, \quad \mathbf{p}_{k,j} = 0 \text{ при } j \notin \{k, k+1\}, \quad (6.11)$$

$$\mathfrak{p}_{k,k} = \frac{\det(\tilde{\varphi}_k, \varphi_{k+1})}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})}, \quad \mathfrak{p}_{k,k+1} = 1, \quad (6.12)$$

$$\mathfrak{p}_{i,j} = \delta_{i,j-1} \quad \text{при } i \geq k+1, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (6.13)$$

Доказательство: Очевидно по (4.1), (4.4), (6.1), (6.3). ■

1.7. Формулы реконструкции

Определение: *Пространство вида*

$$\mathbb{W}_1 = \mathbb{W}_1(X, \tilde{X}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Q \mathbb{S}_1^*(X, \varphi)$$

будем называть пространством всплесков.

Теперь можно записать прямое разложение

$$\mathbb{S}_1^*(X, \varphi) = \mathbb{S}_1^*(\tilde{X}, \varphi) \dot{+} \mathbb{W}_1(X, \tilde{X}, \varphi), \quad (7.3)$$

представляющее собой *сплайн-всплесковое разложение* пространства $\mathbb{S}_1^*(X, \varphi)$.

Разложим $u \in \mathbb{S}_1^*(X, \varphi)$ по базису $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$:

$$u = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i \omega_i, \quad c_i = \langle g_i^*, u \rangle \quad (7.4)$$

и его разложение по компонентам прямой суммы (7.3).

Пусть коэффициенты a_i и $b_{i'}$ проекций элемента u на пространства $\mathbb{S}_1^*(\tilde{X}, \varphi)$ и \mathbb{W}_1 известны, тогда Pu и Qu представимы в виде

$$Pu = \sum_i a_i \tilde{\omega}_i^*, \quad Qu = \sum_{i'} b_{i'} \omega_{i'}^*, \quad (7.5)$$

где $a_i = \langle \tilde{g}_i, u \rangle$, $b_{i'} = \langle g_{i'}, Qu \rangle$.

Выразив c_j через коэффициенты a_i и $b_{i'}$, получим:

$$c_j = \sum_i a_i \mathfrak{p}_{i,j} + b_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (7.6)$$

Определение: Формулы вида (7.6) будем называть формулами реконструкции.

Введем обозначения:

$$a \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots),$$

$$b \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots),$$

$$c \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots),$$

$$\mathfrak{P}^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{matrix} & \dots & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots \\ \dots & \left(\begin{array}{cccccccccc} \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k} & \mathfrak{p}_{k,k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right) & ; \end{matrix} \quad (7.7)$$

$\mathfrak{p}_{k-1,k}$ и $\mathfrak{p}_{k,k}$ при этом вычисляются по формулам (6.10) и (6.12).

В данных обозначениях формулы реконструкции имеют следующий вид:

$$c = \mathfrak{P}^T a + b. \quad (7.8)$$

Таким образом, исходный поток c представлен в виде суммы основного потока a , преобразованного матрицей \mathfrak{P}^T , и вэйвлетного потока b .

Теорема 12: Для сплайн-всплескового разложения (6.3) пространства $\mathbb{S}_1^*(X, \varphi)$ сплайнов первого порядка формулы реконструкции (7.6) имеют вид

$$c_j = a_j + b_j \quad \text{при } j \leq k - 1, \quad (7.9)$$

$$c_k = \frac{\det(\varphi_{k+1}, \tilde{\varphi}_{k+1})}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})} a_{k-1} + \frac{\det(\tilde{\varphi}_k, \varphi_{k+1})}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})} a_k + b_k, \quad (7.10)$$

$$c_j = a_{j-1} + b_j \quad \text{при } j \geq k + 1. \quad (7.11)$$

Доказательство: По формулам (5.13), (5.15), (6.7) и (6.9) приходим к (6.10) – (6.12). ■

1.8. Формулы декомпозиции

Пусть теперь известны коэффициенты c_k в разложении элемента $u \in \mathbb{S}_1^*(X)$ по базису ω_i^* : $u = \sum_i c_i \omega_i^*$.

С учетом того, что

$$a_i = \langle \tilde{g}_i, u \rangle,$$

$$u = \sum_s c_s \omega_s^*,$$

получим:

$$a_i = \sum_s c_s \langle \tilde{g}_i, \omega_s^* \rangle.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} b_j &= c_j - \sum_i \mathfrak{p}_{i,j} a_i = c_j - \sum_i \mathfrak{p}_{i,j} \langle \tilde{g}_i, \sum_s c_s \omega_s^* \rangle = \\ &= c_j - \sum_i \mathfrak{p}_{i,j} \sum_s c_s \langle \tilde{g}_i, \omega_s^* \rangle. \end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{q}_{i,s} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{g}_i, \omega_s^* \rangle$.

Определение: *Формулы вида*

$$a_i = \sum_s c_s \mathfrak{q}_{i,s}, \quad (8.1)$$

$$b_j = c_j - \sum_s c_s \sum_i \mathfrak{p}_{i,j} \mathfrak{q}_{i,s}. \quad (8.2)$$

называются *формулами декомпозиции*.

Вводя матрицу $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,s})$, перепишем формулы (8.1) — (8.2) в виде

$$\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c}. \quad (8.3)$$

Теорема 13: *Выражения $\mathfrak{q}_{i,s}$ отличны от нуля только в следующих случаях:*

$$\mathfrak{q}_{i,i} = 1 \quad \text{при } i \leq k-1, \quad (8.4)$$

$$\mathfrak{q}_{i,i+1} = 1 \quad \text{при } i \geq k; \quad (8.5)$$

в остальных случаях выражение $\mathfrak{q}_{i,s}$ равно нулю, т. е.

$$\mathfrak{q}_{i,s} = 0 \quad \text{при } (i,s) \notin \{(i,i) \mid i \leq k-1\} \cup \{(i,i+1) \mid i \geq k\}. \quad (8.6)$$

Доказательство: Используя определение функционалов g_i , имеем

$$\mathfrak{q}_{i,s} = \langle \tilde{g}_i, \omega_s \rangle = \omega_s(\tilde{x}_{i+1}) = \begin{cases} \omega_s(x_{i+1}) & \text{при } i \leq k-1 \\ \omega_s(x_{i+2}) & \text{при } i \geq k, \end{cases}$$

откуда

$$\mathfrak{q}_{i,s} = \begin{cases} \delta_{i,s} & \text{при } i \leq k-1 \\ \delta_{i+1,s} & \text{при } i \geq k. \end{cases}$$

Фактически получены формулы (8.4) — (8.6). Теорема доказана ■

В соответствии с теоремой 9 матрица Ω имеет вид

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Благодаря представлениям (7.7) и (8.7), получаем

$$\mathfrak{P}^T \Omega \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-1,k} & 0 & \mathfrak{p}_{k,k} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

откуда

$$I - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & -\mathfrak{p}_{k-1,k} & 1 & -\mathfrak{p}_{k,k} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

$$a_i = \sum_s c_s \mathfrak{q}_{i,s}, \quad (8.1)$$

$$b_j = c_j - \sum_s c_s \sum_i \mathfrak{p}_{i,j} \mathfrak{q}_{i,s}. \quad (8.2)$$

Теорема 14: *Формулы декомпозиции разложения (6.3) имеют вид*

$$a_i = c_i \quad \text{при } i \leq k-1, \quad a_i = c_{i+1} \quad \text{при } i \geq k, \quad (8.10)$$

$$b_j = 0 \quad \text{при } j \neq k, \quad (8.11)$$

$$b_k = -\frac{\det(\varphi_{k+1}, \tilde{\varphi}_{k+1})}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})} c_{k-1} + c_k - \frac{\det(\tilde{\varphi}_k, \varphi_{k+1})}{\det(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_{k+1})} c_{k+1}.$$

Доказательство: Соотношения (8.10) — (8.11) легко получаются из представлений (8.3), (8.7) и (8.9). ■

Воспользуемся введенными ранее обозначениями

$$\mathbb{Z}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \{i, i+1, \dots, j-1, j\}, \quad j-i \geq 2, \quad X_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \{x_s \mid s \in \mathbb{Z}_{ij}\}.$$

Поток $f \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \dots)$ называется *постоянным потоком на сеточном фрагменте* X_{ij} , $j - i \geq 2$, если его компоненты одинаковы: $f_s = C \quad \forall s \in \mathbb{Z}_{ij}$, где C — некоторая постоянная.

Поток $\mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} (\dots, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \dots)$ назовем *ψ -линейным потоком на сеточном фрагменте* X_{ij} , $j - i \geq 2$, если его компоненты f_s имеют вид

$$f_{s-1} = A\psi(x_s) + B, \quad \forall s \in \mathbb{Z}_{ij}, \quad (8.12)$$

где A и B — некоторые константы, а ψ — вещественная функция переменной t .

Теорема 15: *Если $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, \psi(t))^T$, а \mathbf{c} — ψ -линейный поток на сеточном фрагменте $X_{k,k+2}$, то взвешенный (всплесковый) поток \mathbf{b} в разложении (7.3) нулевой: $\mathbf{b} = \mathbf{0}$; при этом основной поток совпадает с исходным: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.*

Доказательство: Подставляя (8.12) в представление для b_k (см. (8.11)), принимая во внимание очевидные соотношения между определителями второго порядка и полагая $a = c_{k-1} = \psi(x_k)$, $b = c_k = \psi(x_{k+1})$, $c = c_{k+1} = \psi(x_{k+2})$, после несложных вычислений получим $b_k = 0$. ■

Заключение

В данной главе рассмотрены сплайн-всплесковые разложения первого порядка. Даны основные определения и термины, проведен обзор существующей теории сплайн-всплесковых разложений.

Глава 2

Математическое моделирование и двумерные всплесковые разложения

Обзор главы

В данной главе рассмотрен вопрос построения адаптивных локально укрупняемых сеток узлов, ассоциированных с двумерной триангулированной плоскостью, а также выполняется построение пространств сплайн-всплесковых разложений, ассоциированных с этими сетками. Выводятся формулы реконструкции и декомпозиции, а также калибровочные соотношения.

2.1. Первоначальные обозначения

Рассмотрим трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(\mathbf{t})$ класса $C^1(\Omega)$, где Ω — некоторая область на плоскости \mathbb{R}^2 .

Будем считать область Ω триангулированной; пусть \mathcal{T} — соответствующий комплекс (возможно, криволинейный) с конечным или счетным множеством (открытых) треугольников \mathbb{T} . Множество вершин (нульмерный остов комплекса) обозначим X , а сами вершины \mathbf{t}_j , $j \in J_0$, где J_0 — некоторое (не более, чем счетное) множество индексов; множество X назовем сеткой, а вершины \mathbf{t}_j — узлами этой сетки. Множество вершин треугольника \mathbb{T} обозначим через $X_{\mathbb{T}}$, а множество индексов этих вершин обозначим через $J_{\mathbb{T}}$; таким образом,

$$X_{\mathbb{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{t}_j \mid \mathbf{t}_j \in Cl(\mathbb{T}), j \in J_0\}, \quad J_{\mathbb{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid \mathbf{t}_j \in Cl(\mathbb{T}), j \in J_0\},$$

где символ Cl означает замыкание множества в топологии пространства \mathbb{R}^2 . Число

треугольников, инцидентных каждому узлу, предполагается конечным.

Объединение \mathfrak{S}_j замкнутых треугольников, инцидентных узлу \mathbf{t}_j , называется телом барицентрической звезды для вершины (узла) \mathbf{t}_j . Совокупность внутренних точек из \mathfrak{S}_j обозначается \mathfrak{S}'_j . Некоторые узлы \mathbf{t}_i могут оказаться на границе области Ω ; в этом случае \mathbf{t}_i лежит на границе своей барицентрической звезды.

Пусть J — множество индексов j , для которых $\mathbf{t}_j \in \mathfrak{S}'_j$ — внутренняя точка своей барицентрической звезды, $\mathbf{t}_j \in \mathfrak{S}'_j$; таким образом, $J \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid j \in J_0, \mathbf{t}_j \in \mathfrak{S}'_j\}$.

Матрицу с вектор-столбцами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ обозначим $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{f})$, а для квадратной матрицы $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ через $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ обозначим ее определитель; i -ю компоненту вектора будем обозначать квадратными скобками с нижним индексом i , где $i = 0, 1, 2$; например, $[\mathbf{a}]_i$ означает i -ю компоненту вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, следовательно, $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_2)^T$. Аналогичным образом, если B — матрица, то ее элементы будем иногда обозначать $[B]_{ij}$.

На каждом треугольнике \mathbb{T} введем локальную нумерацию, используя числа $0, 1, 2$; соответствующее взаимно-однозначное отображение (биекцию) обозначим $\chi_{\mathbb{T}}$,

$$\chi_{\mathbb{T}} : \{0, 1, 2\} \rightarrow J_{\mathbb{T}}.$$

Пусть

$$d_{\varphi, \mathbb{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(0)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(1)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(2)})),$$

$$d_{\varphi, \mathbb{T}, i}(\mathbf{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(0)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(1)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(2)}) \parallel {}^i \varphi(\mathbf{t})),$$

где символ $\parallel {}^i \varphi(\mathbf{t})$ означает замену i -го столбца $\varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(i)})$ в рассматриваемом определителе на столбец $\varphi(\mathbf{t})$, $i = 0, 1, 2$.

Предположим, что выполнено условие

(A): существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого треугольника $\mathbb{T} \in \mathcal{T}$ справедливо неравенство $|d_{\varphi, \mathbb{T}}| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим функции $\omega_j(\mathbf{t})$, определяемые из соотношений

$$\sum_j \varphi(\mathbf{t}_j) \omega_j(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}) \quad \text{при } \mathbf{t} \in \mathbb{T}, \mathbb{T} \subset \mathfrak{S}_j \quad (1.1)$$

$$\omega_j(\mathbf{t}) = 0 \quad \text{при } \mathbf{t} \notin \mathfrak{S}_j. \quad (1.2)$$

Благодаря соотношению (1.2) тождества (1.1) можно переписать в виде

$$\sum_{\mathbf{t}_j \in Cl(\mathbb{T})} \varphi(\mathbf{t}_j) \omega_j(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}) \quad \text{при } \mathbf{t} \in \mathbb{T}; \quad (1.3)$$

из предположения (A) следует, что функции $\omega_j(\mathbf{t})$ однозначно определены на всех треугольниках \mathbb{T} подразделения \mathcal{T} . Вектор-функция $\varphi(\mathbf{t})$ называется *генератором* (генерирующей функцией) семейства функций $\{\omega_j\}$.

Из (1.3) получаем

$$\omega_{\chi_{\mathbb{T}}(i)}(\mathbf{t}) = d_{\varphi, \mathbb{T}, i}(\mathbf{t}) / d_{\varphi, \mathbb{T}} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{T} \quad \forall i \in \{0, 1, 2\},$$

так что используя соотношение (1.2), выводим

$$\omega_j(\mathbf{t}) = \begin{cases} d_{\varphi, \mathbb{T}, \chi_{\mathbb{T}}^{-1}(j)}(\mathbf{t}) / d_{\varphi, \mathbb{T}} & \text{при } \mathbf{t} \in \mathbb{T} \subset \mathfrak{S}_j \\ 0 & \text{при } \mathbf{t} \in \mathbb{T} \text{ для } \mathbb{T} \cap \mathfrak{S}_j = \emptyset, \mathbb{T} \in \mathcal{T}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Предположим, что векторы $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ линейно независимые, $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \in \mathbb{R}^2$.

Обозначим через \mathcal{L} множество точек $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению

$$\det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) = 0. \quad (2.1)$$

Очевидно, что $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \in \mathcal{L}$.

Лемма 1: *Если точка $\bar{\mathbf{t}}_0$ принадлежит \mathcal{L} , а $\bar{\mathcal{L}}$ — множество точек, удовлетворяющих уравнению*

$$\det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\bar{\mathbf{t}}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) = 0, \quad (2.2)$$

то $\mathcal{L} \subset \bar{\mathcal{L}}$.

Доказательство: Ввиду линейной независимости векторов $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ и предположения $\bar{\mathbf{t}}_0 \in \mathcal{L}$ с некоторыми коэффициентами $\alpha_j \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$\varphi(\bar{\mathbf{t}}_0) = \alpha_0 \varphi(\mathbf{t}_0) + \alpha_1 \varphi(\mathbf{t}_1).$$

Пусть $\mathbf{t}_* \in \mathcal{L}$; тогда

$$\det(\varphi(\mathbf{t}_*), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) = 0. \quad (2.3)$$

Подставляя точку \mathbf{t}_* в левую часть уравнения (2.2), получаем

$$\begin{aligned} & \det(\varphi(\mathbf{t}_*), \varphi(\bar{\mathbf{t}}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)) = \\ & = \det(\varphi(\mathbf{t}_*), \alpha_0\varphi(\mathbf{t}_0) + \alpha_1\varphi(\mathbf{t}_1), \varphi(\mathbf{t}_1)). \end{aligned}$$

Последнее выражение ввиду свойств определителя и соотношения (2.3) равно нулю. Итак, $\mathbf{t}_* \in \bar{\mathcal{L}}$. ■

Следствие 1: Если точки $\bar{\mathbf{t}}_0, \bar{\mathbf{t}}_1$ принадлежат \mathcal{L} , а $\bar{\mathcal{L}}$ — множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$\det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\bar{\mathbf{t}}_0), \varphi(\bar{\mathbf{t}}_1)) = 0,$$

то $\mathcal{L} \subset \bar{\mathcal{L}}$; если $\varphi(\bar{\mathbf{t}}_0)$ и $\varphi(\bar{\mathbf{t}}_1)$ линейно независимы, то \mathcal{L} и $\bar{\mathcal{L}}$ совпадают.

Доказательство: Аналогично доказательству леммы 1. Пусть $\mathbf{t}_* \in \mathcal{L}$; заменим в определителе $\det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\bar{\mathbf{t}}_0), \varphi(\bar{\mathbf{t}}_1))$ вектор-столбцы $\varphi(\bar{\mathbf{t}}_s)$ суммами $\alpha_{0s}\varphi(\mathbf{t}_0) + \alpha_{1s}\varphi(\mathbf{t}_1)$, $s = 0, 1$, а затем отбросим слагаемые, в которых определители имеют одинаковые столбцы. В результате придем к сумме слагаемых, в каждом из которых (с точностью до порядка столбцов) присутствует равный нулю определитель $\det(\varphi(\mathbf{t}_*), \varphi(\mathbf{t}_j), \varphi(\mathbf{t}_1))$. Последнее утверждение леммы очевидно. ■

Введем обозначения

$$\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)), \quad (2.4)$$

$$B_\delta(\mathbf{t}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{t} \mid \|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0\|_{\mathbb{R}^2} < \delta\}; \quad (2.5)$$

в случае, когда положение центра круга значения не имеет, для него используется символ B_δ без указания его центра.

Пусть

$$\mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} ([\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2, -[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1)^T. \quad (2.6)$$

В дальнейшем символ D_i означает первую частную производную по i -й координате $[\mathbf{t}]_i$ переменной \mathbf{t} , а символ $\nabla_{\mathbf{t}}$ означает градиент, $\nabla_{\mathbf{t}} \stackrel{\text{def}}{=} (D_1, D_2)$.

Лемма 2: Если $\mathbf{t}, \mathbf{t}_1 \in B_\delta(\mathbf{t}_0) \subset \Omega$, то при $\delta \rightarrow 0$ справедлива формула

$$\nabla_{\mathbf{t}}\psi(\mathbf{t}_0) = -\mathbf{g} \cdot \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)) + \tilde{\mathbf{o}}(\delta), \quad (2.7)$$

где через $\tilde{\mathbf{o}}(\tau)$ обозначается двухкомпонентная вектор-функция со свойством

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|\tilde{\mathbf{o}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^2}/\tau = 0.$$

Доказательство: Дифференцированием функции $\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1)$ (см. (2.4)) по переменной $[\mathbf{t}]_1$ получаем

$$\begin{aligned} D_1\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) &= \det\left(D_1\varphi(\mathbf{t}), \varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1)\right) = \\ &= \det\left(D_1\varphi(\mathbf{t}_0) + \mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0), \right. \\ &\quad \left. \varphi(\mathbf{t}_0) + D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\mathbf{o}(1)$ и $\mathbf{o}(\delta)$ означают трехкомпонентные вектор-функции, для которых

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\mathbf{o}(1)\|_{\mathbb{R}^3} = 0$$

и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\mathbf{o}(\delta)\|_{\mathbb{R}^3}/\delta = 0.$$

Используя элементарные преобразования столбцов (не меняющие значение определителя), из (2.8) найдем

$$\begin{aligned} D_1\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) &= \det\left(D_1\varphi(\mathbf{t}_0) + \mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0), \right. \\ &\quad \left. D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\right) = \\ &= \det\left(D_1\varphi(\mathbf{t}_0) + \mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0), \right. \\ &\quad \left. -\mathbf{o}(1)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
D_1\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) &= \\
&= \det\left(D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2\right) + o(\delta) = \\
&= [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 \cdot \det\left(D_1\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)\right) + o(\delta),
\end{aligned}$$

так что

$$D_1\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) = -[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 \cdot \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)\right) + o(\delta). \quad (2.9)$$

Аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned}
D_2\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) &= \det\left(D_2\varphi(\mathbf{t}_0) + \mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0), \right. \\
&\left. \varphi(\mathbf{t}_0) + D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\right),
\end{aligned}$$

и дальше с помощью элементарных преобразований столбцов определителя, выводим

$$\begin{aligned}
D_2\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) &= \det\left(D_1\varphi(\mathbf{t}_0) + \mathbf{o}(1), \varphi(\mathbf{t}_0), \right. \\
&\left. D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 - \mathbf{o}(1)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\right).
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$D_2\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) = [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 \cdot \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)\right) + o(\delta). \quad (2.10)$$

Благодаря обозначению (2.6), формулы (2.9) и (2.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
D_1\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) &= [\mathbf{g}]_1 \cdot \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)\right) + o(\delta), \\
D_2\psi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1) &= [\mathbf{g}]_2 \cdot \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)\right) + o(\delta);
\end{aligned}$$

таким образом, формула (2.7) доказана. ■

Предположим, что выполнено условие (C_ε) : существует константа $\varepsilon > 0$, такая что

$$|\det(\varphi(\mathbf{t}), D_1\varphi(\mathbf{t}), D_2\varphi(\mathbf{t}))| \geq \varepsilon \quad \forall \mathbf{t} \in Cl(\Omega).$$

Лемма 3: Если $\varphi \in C^1(Cl(\Omega))$ и $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in B_\delta \cap \Omega$, то при $\delta \rightarrow 0$ справедлива формула

$$\begin{aligned} \det(\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1), \varphi(\mathbf{t}_2)) &= \det(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0) \times \\ &\times \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)) + o(\delta^2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где B_δ — любой шар радиуса $\delta > 0$, имеющий непустое пересечение с областью Ω .

Если $\varphi \in C^S(Cl(\Omega))$, $S > 1$, $Cl(\Omega)$ — компакт, и выполнено условие (C_ε) , то каково бы ни было число $c > 0$, существует $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ такое, что при любых векторах $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in B_\delta \cap \Omega$, удовлетворяющих неравенству

$$|\det(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0)| \geq c\delta^2, \quad (2.12)$$

верно соотношение

$$|\det(\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1), \varphi(\mathbf{t}_2))| \geq \varepsilon/2.$$

Доказательство: По формуле Тейлора имеем

$$\varphi(\mathbf{t}_i) = \varphi(\mathbf{t}_0) + \sum_{j=1}^2 D_j\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_0]_j + \mathbf{o}(\delta), \quad i = 1, 2,$$

так что находим

$$\begin{aligned} \det(\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_1), \varphi(\mathbf{t}_2)) &= \\ &= \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta), \\ &D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)) = \det(\varphi(\mathbf{t}_0), \\ &D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1, D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)) + \\ &+ \det(\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2, D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 + \\ &+ D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)) + o(\delta^2). \end{aligned}$$

Вынося множитель второго столбца за знак соответствующего определителя и проводя элементарные преобразования, последовательно выводим

$$\begin{aligned}
& \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), \varphi(\mathbf{t}_2), \varphi(\mathbf{t}_2)\right) = \\
& = [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\right) + \\
& \quad + [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 + \right. \\
& \quad \left. + D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 + \mathbf{o}(\delta)\right) + o(\delta^2) = \\
& = [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2\right) + \\
& + [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)[\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1\right) + o(\delta^2) = \\
& = [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_1 [\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_2 \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)\right) + \\
& + [\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0]_2 [\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0]_1 \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0)\right) + o(\delta^2) = \\
& = \det\left(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0\right) \det\left(\varphi(\mathbf{t}_0), D_1\varphi(\mathbf{t}_0), D_2\varphi(\mathbf{t}_0)\right) + o(\delta^2).
\end{aligned}$$

Формула (2.11) установлена. Второе утверждение получается, если учесть равномерную малость остатка в упомянутой формуле. Лемма доказана. ■

Следствие 2: Если выполнены условия леммы 3 и $\mathbf{t}', \mathbf{t}'' \in B_\delta \cap \Omega$, $\mathbf{t}' \neq \mathbf{t}''$, то $\varphi(\mathbf{t}')$ и $\varphi(\mathbf{t}'')$ — линейно независимые векторы.

Доказательство вытекает из (2.11). ■

Лемма 4: Если $\varphi \in C^S(Cl(\Omega))$, $S > 1$, $Cl(\Omega)$ — компакт, выполнено условие (C_ε) , а множество \mathcal{L} задается уравнением (2.1), то каково бы ни было число $c > 0$, существует $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ такое, что при любых векторах $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in B_\delta \cap \Omega$, удовлетворяющих неравенству

$$\|\mathbf{g}\| \geq c\delta, \quad (2.13)$$

множество $\mathcal{L} \cap B_\delta \cap \Omega$ представляет собой простую кривую класса C^S .

Доказательство сводится к применению леммы 2 и теоремы о неявно заданной функции. ■

Пусть T — прямолинейный треугольник с вершинами $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$. Радиусы вписанного и описанного кругов для треугольника T обозначим r_T и R_T соответственно.

Введем условие

(D_η) : существует константа $\eta > 0$, такая что

$$r_T/R_T \geq \eta.$$

Замечание 1: Две стороны треугольника T , инцидентные одной вершине, назовем *соседними*. Условие (D_η) эквивалентно условию: углы между соседними сторонами треугольника T лежат в интервале $(\epsilon_\eta, \pi - \epsilon_\eta)$, где $\epsilon_\eta \in (0, \pi/2)$.

Если выполнено условие (D_η) , то при некотором числе $c > 0$ справедливы неравенства (2.12) и (2.13).

2.2. Непрерывность функций курантова типа

Теорема 16: Если $\varphi \in C^S(Cl(\Omega))$, $S > 1$, $Cl(\Omega)$ — компакт, и выполнено условие (C_ϵ) , то каково бы ни было $\eta > 0$, найдется $\delta = \delta(\epsilon, \eta)$ такое, что для любой прямолинейной триангуляции \mathcal{T} , все треугольники T которой удовлетворяют условию (D_η) , существует криволинейная триангуляция \mathcal{T} с теми же вершинами, криволинейные треугольники \mathbb{T} которой определяются кривыми класса C^S , задаваемыми уравнениями вида (2.1).

Доказательство: Легко получается применением лемм 1 — 4. ■

Теорема 17: В условиях теоремы 16 выполнено условие (A) ; на криволинейной триангуляции \mathcal{T} функции ω_j определены и непрерывны в области $Cl(\Omega)$.

Доказательство: Для доказательства заметим, что согласно лемме 3 условие (A) выполнено, и потому функции ω_j определены однозначно. Используя формулы (1.4), видим, что функция ω_j обращается в нуль на границе своего носителя. Применяя аппроксимационные тождества (1.1), отсюда выводим непрерывность функций ω_j на сторонах треугольников. В остальных точках области Ω непрерывность вытекает из непрерывности вектор-функции $\varphi(\mathbf{t})$ и из формул (1.4). ■

2.3. Укрупнение триангуляции

Дальше будем считать, что выполнены предположения предыдущего пункта.

Из условия (C_ε) следует, что система функций $[\varphi]_0, [\varphi]_1, [\varphi]_2$ линейно независимая на любом треугольнике \mathbb{T} подразделения \mathcal{T} ; благодаря этому система функций $\{\omega_j\}_{j \in J}$ также является линейно независимой системой.

Рассмотрим систему функционалов $\{g_i\}_{i \in J}$, заданную на пространстве $C(\Omega)$ формулами

$$\langle g_i, u \rangle = u(\mathbf{t}_i), \quad \forall i \in J, \quad \forall u \in C(\Omega). \quad (4.1)$$

Поскольку носителем функции ω_j служит тело барицентрической звезды \mathfrak{S}_j , то ввиду непрерывности ω_j на области Ω ее значения на границе множества \mathfrak{S}_j равны нулю. Внутри этого множества лежит лишь узел \mathbf{t}_j ; остальные узлы сетки X лежат на границе или вне носителя функции ω_j . Ввиду этого

$$\langle g_i, \omega_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad \forall i, j \in J. \quad (4.2)$$

Используя свойство (4.2) в тождестве (1.3), записанном для $\mathbf{t} = \mathbf{t}_j$, имеем

$$\langle g_j, \omega_j \rangle = 1, \quad \forall j \in J. \quad (4.3)$$

Соотношения (4.2) – (4.3) показывают, что формулы (4.1) задают продолжение на $C(\Omega)$ системы функционалов, биортогональной системе функций $\{\omega_j\}_{j \in J}$.

Рассмотрим триангуляцию $\tilde{\mathcal{T}}$ области Ω , которая является укрупнением подразделения \mathcal{T} .¹

Будем считать, что здесь справедливы предположения предыдущего пункта для исходной триангуляции; учитывая теорему 1, а также используя лемму 1 и следствие из нее, построим триангуляцию $\tilde{\mathcal{T}}$ таким образом, чтобы стороны треугольников $\tilde{\mathcal{T}}$ определялись уравнениями вида (2.1).

Для подразделения $\tilde{\mathcal{T}}$ рассмотрим построения, аналогичные тем, которые были сделаны для подразделения \mathcal{T} ; для удобства читателя повторим эти построения.

¹Укрупнением $\tilde{\mathcal{T}}$ триангуляции \mathcal{T} называем такую триангуляцию, измельчением которой является \mathcal{T} (понятие измельчения триангуляции известно).

Нульмерный остов (множество вершин) триангуляции $\tilde{\mathcal{T}}$ обозначим \tilde{X} , а сами вершины — символами $\tilde{\mathbf{t}}_j$, $j \in \tilde{J}$, где \tilde{J} — некоторое множество индексов; множество \tilde{X} называется сеткой для нового подразделения $\tilde{\mathcal{T}}$, а вершины $\tilde{\mathbf{t}}_j$ — узлами этой сетки. Телом барицентрической звезды $\tilde{\mathfrak{S}}_j$ вершины (узла) $\tilde{\mathbf{t}}_j$ является объединение замыканий треугольников, инцидентных этому узлу,

$$\tilde{\mathfrak{S}}_j \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\tilde{\mathbf{t}}_j \in Cl(\tilde{\mathbb{T}})} Cl(\tilde{\mathbb{T}}).$$

Пусть множество индексов, соответствующих вершинам треугольника $\tilde{\mathbb{T}}$, обозначено $\tilde{J}_{\tilde{\mathbb{T}}}$,

$$\tilde{J}_{\tilde{\mathbb{T}}} \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid \tilde{\mathbf{t}}_j \in Cl(\tilde{\mathbb{T}}), j \in \tilde{J}\}.$$

На каждом треугольнике $\tilde{\mathbb{T}}$, как и прежде, вводится локальная нумерация числами 0, 1, 2; обозначим соответствующую биекцию $\tilde{\chi}_{\tilde{\mathbb{T}}}$,

$$\tilde{\chi}_{\tilde{\mathbb{T}}} : \{0, 1, 2\} \rightarrow \tilde{J}_{\tilde{\mathbb{T}}}.$$

Положим

$$d_{\varphi, \mathbb{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(0)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(1)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(2)})),$$

$$d_{\varphi, \mathbb{T}, i}(\mathbf{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(0)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(1)}), \varphi(\mathbf{t}_{\chi_{\mathbb{T}}(2)}) \parallel {}^{i} \varphi(\mathbf{t})),$$

где символ $\parallel {}^{i} \varphi(\mathbf{t})$, как и прежде, означает замену i -го столбца $\varphi(\tilde{\mathbf{t}}_{\tilde{\mathbb{T}}(i)})$ в последнем определителе на столбец $\varphi(\mathbf{t})$, $i = 0, 1, 2$.

Рассмотрим функции $\tilde{\omega}_j(\mathbf{t})$, определяемые из соотношений

$$\sum_{\tilde{\mathbf{t}}_j \in Cl(\tilde{\mathbb{T}})} \varphi(\tilde{\mathbf{t}}_j) \tilde{\omega}_j(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}) \quad \text{при } \mathbf{t} \in \tilde{\mathbb{T}}, \tilde{\mathbb{T}} \subset \tilde{\mathfrak{S}}_j,$$

$$\tilde{\omega}_j(\mathbf{t}) = 0 \quad \text{при } \mathbf{t} \notin \tilde{\mathfrak{S}}_j.$$

При сделанных предположениях из этих соотношений функции $\tilde{\omega}_j(\mathbf{t})$ определяются однозначно:

$$\tilde{\omega}_{\tilde{\chi}_{\tilde{\mathbb{T}}}(i)}(\mathbf{t}) = \tilde{d}_{\varphi, \tilde{\mathbb{T}}, i}(\mathbf{t}) / \tilde{d}_{\varphi, \tilde{\mathbb{T}}} \quad \mathbf{t} \in \tilde{\mathbb{T}} \quad \forall i \in \{0, 1, 2\};$$

отсюда легко выводим

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_j(\mathbf{t}) &= \tilde{d}_{\varphi, \tilde{\mathbb{T}}, \tilde{\chi}_{\tilde{\mathbb{T}}}^{-1}(j)}(\mathbf{t}) / \tilde{d}_{\varphi, \tilde{\mathbb{T}}} \quad \text{при } \mathbf{t} \in \tilde{\mathbb{T}} \subset \tilde{\mathfrak{S}}_j, \\ \tilde{\omega}_j(\mathbf{t}) &= 0 \quad \text{при } \mathbf{t} \in \tilde{\mathbb{T}} \quad \text{для } \mathbb{T} \cap \tilde{\mathfrak{S}}_j = \emptyset, \tilde{\mathbb{T}} \in \tilde{\mathcal{J}}.\end{aligned}$$

Ввиду упомянутых предположений функции $\tilde{\omega}_j(\mathbf{t})$ непрерывны в области Ω .

Рассмотрим систему функционалов $\{\tilde{g}_i\}_{i \in \tilde{\mathcal{J}}}$, заданную на пространстве $C(\Omega)$ формулами

$$\langle \tilde{g}_i, u \rangle = u(\tilde{\mathbf{t}}_i) \quad \forall i \in \tilde{\mathcal{J}} \quad \forall u \in C(\Omega). \quad (4.4)$$

Аналогично формулам (4.2) – (4.3) имеем соотношения биортогональности

$$\langle \tilde{g}_i, \tilde{\omega}_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \tilde{\mathcal{J}}.$$

Будем считать множества J и $\tilde{\mathcal{J}}$ упорядоченными; введем вектор-столбцы

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_j)_{j \in J}, \quad g \stackrel{\text{def}}{=} (g_i)_{i \in J}, \quad \tilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{\omega}_j)_{j \in \tilde{\mathcal{J}}}, \quad \tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{g}_i)_{i \in \tilde{\mathcal{J}}},$$

и рассмотрим матрицу $\mathfrak{P} = (\mathfrak{p}_{i,j})_{i \in \tilde{\mathcal{J}}, j \in J}$ вида

$$\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} (g \tilde{\omega}^T)^T, \quad \mathfrak{p}_{i,j} = \langle g_j, \tilde{\omega}_i \rangle, \quad i \in \tilde{\mathcal{J}}, \quad j \in J. \quad (4.5)$$

Теорема 18: *В условиях теоремы 16 и при*

$$[\mathfrak{P}\omega]_j(\mathbf{t}) \equiv 0 \quad \forall \mathbf{t} \notin \tilde{\mathfrak{S}}_j \quad \forall j \in \tilde{\mathcal{J}} \quad (4.6)$$

справедливо соотношение

$$\tilde{\omega}(\mathbf{t}) \equiv \mathfrak{P}\omega(\mathbf{t}). \quad (4.7)$$

Доказательство вытекает из теорем 4 и 5 работы [6]. ■

Покажем, что в исследуемом случае справедливы предположения (4.6). Для этого заметим, что j -й столбец ($j \in \tilde{\mathcal{J}}$) матрицы $g \tilde{\omega}^T$ получается применением функционалов g_i , $i \in J$, к функции $\tilde{\omega}_j$. Ввиду непрерывности функции $\tilde{\omega}_j$ и в соответствии с определением (4.4) функционалов g_i , значения на $\tilde{\omega}_j$ тех функционалов, которые соответствуют узлам \mathbf{t}_i , лежащим на границе или вне носителя $\tilde{\mathfrak{S}}_j$ функции $\tilde{\omega}_j$, равны нулю. Таким образом, неравными нулю могут быть лишь значения

на $\tilde{\omega}_j$ тех функционалов g_i , которые соответствуют узлам \mathbf{t}_i , лежащим внутри барицентрической звезды $\tilde{\mathfrak{S}}_j$; функции ω_i , соответствующие только что упомянутым узлам (по построению триангуляции $\tilde{\mathfrak{T}}$), непрерывны и имеют носители, содержащиеся в барицентрической звезде $\tilde{\mathfrak{S}}_j$. Итак, $\text{supp } \sum_{i \in J} \langle g_i, \tilde{\omega}_j \rangle \omega_i \subset \tilde{\mathfrak{S}}_j$; последнее означает, что выполнено условие (4.6). Учитывая непрерывность рассматриваемых функций в области Ω , видим, что установлено следующее утверждение.

Теорема 19: *В условиях теоремы 16 при $\mathbb{T} \in \mathcal{T}$ для систем ω_j и $\tilde{\omega}_i$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\tilde{\omega}_j(\mathbf{t}) \equiv \sum_{i \in J_{\mathbb{T}}} \langle g_i, \tilde{\omega}_j \rangle \omega_i(\mathbf{t}), \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{T}.$$

2.4. Вложенность пространств и всплесковое разложение

Рассмотрим пространства $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \mathcal{L}(\{\omega_i\}_{i \in J})$ и $\tilde{\mathbb{S}} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \mathcal{L}(\{\tilde{\omega}_j\}_{j \in \tilde{J}})$, где символ \mathcal{L} означает линейную оболочку функций, заключенных в фигурные скобки, а символ Cl_p означает замыкание в топологии поточечной сходимости. Ввиду теоремы 4 верно соотношение

$$\tilde{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{S} \subseteq C(\Omega).$$

Пусть $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{g} \omega^T$ — матрица с элементами $\mathfrak{q}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{g}_i, \omega_j \rangle$, $i \in \tilde{J}, j \in J$.

Теорема 20: *В условиях теоремы 16 матрица \mathfrak{Q} является левой обратной к матрице \mathfrak{P}^T .*

Доказательство: Транспонируем соотношение (4.7) и умножим его на одностолбцовую матрицу \tilde{g} слева; ввиду очевидного равенства $\tilde{g} \tilde{\omega}^T = I$ (где I — единичная матрица) получаем $I = \tilde{g} \omega^T \mathfrak{P}^T$, что и требовалось. Теорема доказана.

■

Определим линейную операцию проектирования \mathcal{P} пространства \mathbb{S} на $\tilde{\mathbb{S}}$ равенством²

$$\mathcal{P}u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in \tilde{J}} \langle \tilde{g}_i, u \rangle \tilde{\omega}_i, \quad \forall u \in \mathbb{S}, \quad (5.1)$$

²Фигурирующие дальше бесконечные суммы понимаются в топологии поточечной сходимости (легко видеть, что при фиксированном $\mathbf{t} \in \Omega$ каждая из этих сумм имеет конечное число ненулевых слагаемых).

и рассмотрим линейное пространство $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{I} - \mathcal{P}) \mathbb{S}$, где \mathcal{I} — тождественная операция. Очевидно, что пространство \mathbb{S} может быть представлено в виде прямой суммы: $\mathbb{S} = \tilde{\mathbb{S}} \dot{+} \mathbb{W}$. Эта формула дает искомое всплесковое разложение пространства \mathbb{S} ; первое слагаемое в этом разложении называется *основным* пространством, а второе — *всплесковым* пространством.

Если $u \in \mathbb{S}$ и $\tilde{u} \in \tilde{\mathbb{S}}$, то с некоторыми коэффициентами $c_j \in \mathbb{R}^1$, $j \in J$, и $\tilde{c}_j \in \mathbb{R}^1$, $j \in \tilde{J}$, верны представления $u = \sum_{j \in J} \omega_j c_j$ и $\tilde{u} = \sum_{j \in \tilde{J}} \tilde{\omega}_j \tilde{c}_j$; вводя вектор-столбцы $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_j)_{j \in J}$ и $\tilde{\mathbf{c}} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{c}_j)_{j \in \tilde{J}}$ запишем эти соотношения в виде $u = \omega^T \mathbf{c}$, $\tilde{u} = \tilde{\omega}^T \tilde{\mathbf{c}}$.

Теорема 21: Пусть выполнены условия теоремы 20. Если элемент $u \in \mathbb{S}$ представлен в виде суммы $u = \tilde{u} + w$, $\tilde{u} \in \tilde{\mathbb{S}}$, $w \in \mathbb{W}$, то для векторов $\tilde{\mathbf{c}}$, \mathbf{c} и \mathbf{b} таких, что $\tilde{u} = \tilde{\omega}^T \tilde{\mathbf{c}}$, $u = \omega^T \mathbf{c}$, $w = \omega^T \mathbf{b}$, справедливы формулы декомпозиции

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{\Omega} \mathbf{c}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{c}, \quad (5.2)$$

и формулы реконструкции

$$\mathbf{c} = \mathfrak{P}^T \tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{b}. \quad (5.3)$$

Доказательство³: Из определения (5.1) для $u = \omega^T \mathbf{c}$ имеем

$$\tilde{u} = \mathcal{P}u = \sum_{i \in \tilde{J}} \tilde{\omega}_i \sum_{j \in J} \langle \tilde{g}_i, \omega_j \rangle c_j = \tilde{\omega}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{c},$$

откуда благодаря единственности разложения по базису $\tilde{\omega}$ выводим первое из соотношений (5.2). Из (4.5) получаем $\mathfrak{P}^T = g \tilde{\omega}^T$. Переписывая представление $u = \tilde{u} + w$ в виде $\omega^T \mathbf{c} = \tilde{\omega}^T \tilde{\mathbf{c}} + \omega^T \mathbf{b}$ и умножая последнее соотношение слева на g , а затем используя определение матрицы $\mathbf{\Omega}$, находим (5.3). Благодаря применению в формуле (5.3) только что установленного первого из соотношений (5.2), получаем второе соотношение в (5.2). Теорема доказана. ■

Определение: Матрица $\mathbf{\Omega}$ называется *матрицей продолжения*, а матрица \mathfrak{P} — *матрицей сужения*.

Рассмотрим сначала матрицу \mathfrak{P} , обозначая ее элементы (\mathbf{p}_{ji}) : согласно определению $\mathfrak{P}^T = g \tilde{\omega}^T$, так что $\mathbf{p}_{ji} = \langle g_i, \tilde{\omega}_j \rangle$, $i \in J$, $j \in \tilde{J}$.

³Доказательство аналогично доказательству теоремы 7 из [6], и приводится здесь для удобства читателя.

Учитывая расположение носителя функции $\tilde{\omega}_j$ и принимая во внимание непрерывность этой функции, ввиду определения (4.4) приходим к выводу, что в j -м столбце матрицы \mathfrak{P}^T ненулевыми окажутся разве лишь те элементы p_{ji} с номерами $i \in J$ из рассматриваемого столбца, которым соответствуют узлы \mathbf{t}_i , являющиеся внутренними точками упомянутого носителя, то есть внутренними точками тела звезды $\tilde{\mathfrak{S}}_j$: $\mathbf{t}_i \in \tilde{\mathfrak{S}}'_j$. Итак,

$$\mathbf{p}_{ji} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{t}_i \notin \tilde{\mathfrak{S}}'_j. \quad (6.1)$$

$$[\mathfrak{P}\mathbf{c}]_j = \sum_{i \in J, \mathbf{t}_i \in \tilde{\mathfrak{S}}'_j} \langle g_i, \tilde{\omega}_j \rangle \mathbf{c}_i. \quad (6.2)$$

Обратимся теперь к матрице $\mathfrak{Q} = (\mathbf{q}_{j'k})_{j' \in \tilde{J}, k \in J}$, где $\mathbf{q}_{j'k} = \langle \tilde{g}_{j'}, \omega_k \rangle$; очевидно, что в каждой строке этой матрицы имеется лишь одна единица, а остальные элементы — нули: в строке с номером $j' \in \tilde{J}$ единица находится на том месте, номер k которого является номером удаляемой вершины \mathbf{t}_k исходной триангуляции \mathcal{T} . Номерам вершин укрупненной триангуляции $\tilde{\mathcal{T}}$ поставим в соответствие номера вершин исходной триангуляции \mathcal{T} и это соответствие обозначим ϑ ; итак,

$$\vartheta: \quad \tilde{J} \rightarrow J, \quad \tilde{\mathbf{t}}_j = \mathbf{t}_{\vartheta(j)}. \quad (6.3)$$

В этих обозначениях имеем

$$\mathbf{q}_{j'k} = \delta_{\vartheta(j'), k}, \quad j' \in \tilde{J}, k \in J. \quad (6.4)$$

Непосредственным вычислением покажем, что произведение $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T$ представляет собой единичную матрицу. Имеем

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{j'j} = \sum_{k \in J} \mathbf{q}_{j'k} \mathbf{p}_{jk} = \sum_{k \in J} \delta_{\vartheta(j'), k} \mathbf{p}_{jk} = \mathbf{p}_{j\vartheta(j')}. \quad (6.5)$$

Ввиду соотношений (6.3) находим

$$\mathbf{t}_{\vartheta(j')} \in \tilde{\mathfrak{S}}'_j \quad \iff \quad j' = j,$$

так что из (6.5) благодаря соотношениям (4.1) и (4.5) получаем

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T]_{j'j} = \delta_{j', j};$$

последнее соответствует тому, что матрица Ω — левая обратная к матрице \mathfrak{P}^T (см. теорему 20).

Теорема 22: В условиях теоремы 16 формулы декомпозиции (5.2) могут быть записаны в виде

$$\tilde{c}_j = c_{\vartheta(j)} \quad \forall j \in \tilde{J}, \quad (6.6)$$

$$b_i = c_i - \sum_{j \in \tilde{J}, \mathbf{t}_i \in \tilde{\mathfrak{S}}'_j} \langle g_i, \tilde{\omega}_j \rangle c_{\vartheta(j)}, \quad \forall i \in J, \quad (6.7)$$

а формулам реконструкции (5.3) можно придать форму

$$c_i = \sum_{j \in \tilde{J}, \mathbf{t}_i \in \tilde{\mathfrak{S}}'_j} \langle g_i, \tilde{\omega}_j \rangle \tilde{c}_j + b_i, \quad \forall i \in J. \quad (6.8)$$

Доказательство: Соотношения (6.6) получаются применением свойства (6.4) к первой из формул (5.2).

Для второй формулы (5.2) с учетом соотношения (6.2) получаем

$$b_i = c_i - [\mathfrak{P}^T \Omega \mathbf{c}]_i = c_i - [\mathfrak{P}^T \tilde{\mathbf{c}}]_i = c_i - \sum_{j \in \tilde{J}, \mathbf{t}_i \in \tilde{\mathfrak{S}}'_j} \langle g_i, \tilde{\omega}_j \rangle \tilde{c}_j \quad \forall i \in J,$$

откуда учитывая (6.6), выводим (6.7). Формулы реконструкции (6.8) очевидным образом получаются из (6.7). ■

2.5. Триангуляция, допускающая локальное укрупнение

В дальнейших рассуждениях ограничиваемся прямолинейной триангуляцией и кусочно-линейной аппроксимацией Куранта, т. е. в качестве генерирующей функции берем $\varphi(\mathbf{t}) = (1, [\mathbf{t}]_1, [\mathbf{t}]_2)^T$.

Для определения подходящего варианта сплайн-всплескового разложения важно иметь возможность локально укрупнять триангуляцию (т. е. укрупнять ее лишь в некоторой подобласти $\Omega_0 \subset \Omega$, оставляя нетронутыми треугольники вне этой подобласти); при этом результирующая триангуляция области Ω должна оставаться правильной (т. е. никакая вершина никакого треугольника не должна лежать на стороне другого треугольника). Оказывается, не каждую триангуляцию можно локально укрупнять.

В этом пункте рассмотрена локально укрупняемая триангуляция, причем в области укрупнения укрупненная триангуляция снова может укрупняться; таким образом, предлагаемый алгоритм укрупнения обладает рекуррентными свойствами: укрупнение можно проводить многократно. Предлагаемый далее алгоритм применим не только к плоской области, но и к некоторым двумерным поверхностям: он годится для аппроксимаций курантова типа в случае цилиндрической поверхности, тора и сферы.

Сначала рассмотрим правильную триангуляцию плоскости $\{t \mid t = (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ (эта триангуляция может состоять из конечного или бесконечного числа треугольников). Нас интересуют локальные укрупнения исходной правильной триангуляции (т. е. объединения конечного числа треугольников), приводящие снова к правильной триангуляции.

Для описания триангуляции будем использовать таблицу инциденций, каждая строка которой описывает треугольник перечнем инцидентных ему вершин. Иногда рассматривается таблица инциденций, получающаяся объединением нескольких таблиц инциденций. Заметим, что порядок объединения таблиц не имеет значения; также не существен порядок строк и порядок следования вершин в строках рассматриваемых таблиц.

Введем обозначения

$$\mathbb{Z}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(i, j) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Z}_0^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(2i, 2j) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathbb{Z}_1^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(2i + 1, 2j + 1) \mid i \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}, \quad \widehat{\mathbb{Z}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}_0^2 \cup \mathbb{Z}_1^2.$$

Пусть фиксированы числа $h' > 0, h'' > 0$. Обозначим $\mathbf{r}_{i,j}$ точки с координатами (ih', jh'') , $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, и рассмотрим прямоугольники вида $\Pi_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid ih' \leq x \leq (i + 2)h', jh'' \leq y \leq (j + 2)h''\}$, где $(i, j) \in \mathbb{Z}_0^2$.

Пусть триангуляция \mathcal{T}^* , описывается трехстолбцовой таблицей (с бесконечным числом строк), получающейся объединением таблиц

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i+1,j} & \mathbf{r}_{i,j+1} \\ \mathbf{r}_{i+1,j+1} & \mathbf{r}_{i+1,j} & \mathbf{r}_{i,j+1} \end{array} \right\| \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2,$$

где $\mathbf{r}_{k,l}$ — радиус-векторы соответствующих вершин треугольников триангуляции. Легко видеть, что триангуляция \mathcal{T}^* не допускает локального укрупнения с сохранением правильности; дальше предлагается триангуляция, лишенная этого недостатка.

Пусть \mathbb{X}^* — некоторое (конечное или бесконечное) множество пар четных целочисленных индексов: $\mathbb{X}^* \subset \mathbb{Z}_0^2$; рассмотрим замкнутую область

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{X}^*} \Pi_{i,j}$$

(в частности, если $\mathbb{X}^* = \mathbb{Z}_0^2$, то Ω совпадает со всей плоскостью \mathbb{R}^2).

Через \mathbb{X} обозначим множество индексов $(i, j) \in \mathbb{Z}_0^2 \cup \mathbb{Z}_1^2$ таких, что точки $\mathbf{r}_{i,j} = (ih', jh'')$ лежат в Ω ; только что упомянутые точки $\mathbf{r}_{i,j}$ будем называть узлами исходной сетки, они являются вершинами определяемой ниже исходной триангуляции.

Узел $\mathbf{r}_{2i_0, 2j_0}$ называется внутренним узлом для Ω , если он является внутренней точкой в Ω (таким образом, в Ω содержатся прямоугольники $\Pi_{i,j}$ при $i \in \{2i_0, 2i_0 - 2\}$, $j \in \{2j_0, 2j_0 - 2\}$; здесь же заметим, что вводимое понятие относится только к узлам с четными индексами). Множество пар $(i, j) \in \mathbb{X}^*$, для которых $\mathbf{r}_{i,j}$ — внутренний узел, обозначим \mathbb{X}_0 . Очевидно, что

$$\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X}^* \subset \mathbb{X} \subset \widehat{\mathbb{Z}}^2.$$

Рассмотрим триангуляцию, которая получается объединением таблиц

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \end{array} \right\| \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}_0^2. \quad (7.1)$$

Укрупнение триангуляции будем производить объединением двух соседних (то есть имеющих общую сторону) треугольников. Полученные в результате треугольники будем называть *укрупненными* треугольниками.

Не нарушая общности, в дальнейшем предполагаем, что $\mathbf{r}_{0,0}$ — внутренний узел в Ω , то есть $(0, 0) \in \mathbb{X}_0$. Рассмотрим такое укрупнение, при котором вершину $\mathbf{r}_{0,0}$ окружают лишь укрупненные треугольники. Для этого заменим перечисленные ниже соседние треугольники на треугольник, получающийся их объединением. Эквивалентное преобразование таблицы инцидентий состоит в том, что из нее исключаются строки, соответствующие объединяемым треугольникам, и добавляются строки, соответствующие результатам такого объединения — укрупненным треугольникам. Как было отмечено выше, расположение строк в таблице инцидентий не существенно, и потому строки могут быть добавлены между любыми строками упомянутой таблицы. Таким образом, достаточно перечислить выбрасываемые строки таблицы и указать вставляемые в нее строки. Однако, для наглядности преобразования таблицы инцидентий будем задавать указанием двух строк заменяемых треугольников (в левой от стрелки части формулы) и указанием строки укрупненного треугольника (в правой части формулы).

Укрупнение зададим следующим преобразованием таблицы инциденций.

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,1} \\ \mathbf{r}_{-2,2} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,2} \end{array} \right\|, \quad (7.2)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{-2,2} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-1,1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-1,1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-2,2} \end{array} \right\|, \quad (7.3)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{1,1} \\ \mathbf{r}_{2,2} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{1,1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{2,2} \end{array} \right\|, \quad (7.4)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{2,2} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,2} \end{array} \right\|, \quad (7.5)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,-1} \\ \mathbf{r}_{2,-2} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{1,-1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,-2} \end{array} \right\|, \quad (7.6)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{2,-2} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{1,-1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{1,-1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{2,-2} \end{array} \right\|, \quad (7.7)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{-1,-1} \\ \mathbf{r}_{-2,-2} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{-1,-1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{-2,-2} \end{array} \right\|, \quad (7.8)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{-2,-2} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,-1} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-1,-1} \end{array} \right\| \longrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,-2} \end{array} \right\|. \quad (7.9)$$

Легко видеть, что в результате получается правильная триангуляция.

Исходную триангуляцию (7.1) обозначим \mathcal{T} , описанную только что укрупненную (согласно формулам (7.2) — (7.9)) триангуляцию обозначим \mathcal{T}_0 , а переход от исходной триангуляции к укрупненной обозначим $[\mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}_0]$.

2.6. Структура барицентрических звезд на исходной и укрупненной триангуляциях

Для построения аппроксимации Куранта важна структура барицентрических звезд, соответствующих вершинам рассматриваемой триангуляции.

Для исходной триангуляции имеется два типа барицентрических звезд: к пер-

вому типу отнесем барицентрические звезды, содержащие четыре треугольника, а ко второму типу отнесем барицентрические звезды с восемью треугольниками.

3.8.1. Барицентрические звезды с четырьмя треугольниками соответствуют вершинам $\mathbf{r}_{i,j}$ при $(i, j) \in \mathbb{Z}_1^2$; каждой такой вершине соответствует барицентрическая звезда, описываемая следующей таблицей инциденций

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{2+i,2+j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \end{array} \right\| .$$

3.8.2. Вершинам $\mathbf{r}_{i,j}$ при $(i, j) \in \mathbb{Z}_0^2$ соответствуют барицентрические звезды с таблицей инциденций вида

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{-2+i,j} & \mathbf{r}_{-1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{-1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,2+j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{2+i,j} & \mathbf{r}_{1+i,-1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,-2+j} & \mathbf{r}_{1+i,-1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{i,-2+j} & \mathbf{r}_{-1+i,-1+j} \\ \mathbf{r}_{i,j} & \mathbf{r}_{-2+i,2+j} & \mathbf{r}_{-1+i,-1+j} \end{array} \right\|$$

При локальном укрупнении триангуляции на "границе укрупнения" появляются дополнительно новые типы барицентрических звезд, содержащих по шесть и по восемь треугольников, тогда как внутри зоны укрупнения типы барицентрических звезд сохраняются.

3.9.1. Барицентрическая звезда точки $\mathbf{r}_{0,0}$ состоит из восьми треугольников; она определяется следующей таблицей:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{-2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,0} & \mathbf{r}_{2,-2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{2,-2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{-2,-2} \\ \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,0} & \mathbf{r}_{-2,-2} \end{array} \right\|$$

3.9.2. Барицентрические звезды из шести треугольников определяются следующими таблицами:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,\pm 4} & \mathbf{r}_{-1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{-2,\pm 2} & \mathbf{r}_{-1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{2,\pm 2} & \mathbf{r}_{1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,\pm 4} & \mathbf{r}_{1,\pm 3} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{-2,\pm 2} \\ \mathbf{r}_{0,\pm 2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{2,\pm 2} \end{array} \right\| ;$$

здесь знак \pm означает, что во всей таблице он заменяется одинаково: либо плюсом, либо минусом.

Таблицы для барицентрических звезд вершин $\mathbf{r}_{\pm 2,0}$ получаются перестановкой индексов каждой вершины в таблицах для барицентрических звезд вершин $\mathbf{r}_{0,\pm 2}$:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 4,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 4,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,-2} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,2} \end{array} \right\| .$$

3.9.3. Барицентрические звезды вершины $\mathbf{r}_{\pm 2,2}$ имеют вид

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{0,2} & \mathbf{r}_{\pm 1,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 2,4} & \mathbf{r}_{\pm 1,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 2,4} & \mathbf{r}_{\pm 3,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 4,2} & \mathbf{r}_{\pm 3,3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 4,2} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,2} \end{array} \right\|.$$

Барицентрические звезды вершин $\mathbf{r}_{\pm 2,-2}$ получаются сменой знака второго индекса у точек предыдущей таблицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{0,-2} & \mathbf{r}_{\pm 1,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 2,-4} & \mathbf{r}_{\pm 1,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 2,-4} & \mathbf{r}_{\pm 3,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 4,-2} & \mathbf{r}_{\pm 3,-3} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 4,-2} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} & \mathbf{r}_{\pm 3,-1} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{\pm 2,0} \\ \mathbf{r}_{\pm 2,-2} & \mathbf{r}_{0,0} & \mathbf{r}_{0,-2} \end{array} \right\|.$$

2.7. Калибровочные соотношения

Функцией Куранта, ассоциированной с выделенной вершиной правильной триангуляции, называется непрерывная функция, равная единице в упомянутой вершине, линейная на каждом треугольнике барицентрической звезды этой вершины и равная нулю вне указанной барицентрической звезды. Система функций Куранта — линейно независимая система.

Функцию Куранта, соответствующую выделенной вершине $\mathbf{r}_{i,j}$ исходной триангуляции, обозначим $\omega_{i,j}(t)$, $(i,j) \in \mathbb{X}$, $t \in \mathbb{R}^2$. На исходной триангуляции имеется два типа функций Куранта, соответствующих рассмотренным выше двум типам

барицентрических звезд (см. пункты 2.1 и 2.2): у функций Куранта с нечетными индексами носитель состоит из четырех треугольников, а у функций Куранта с четными индексами носитель состоит из восьми треугольников.

Введем обозначения

$$\mathbb{I}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}, \quad \mathbb{I}'_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_1 \setminus (0, 0).$$

Для укрупненной триангуляции функцию Куранта, соответствующую выделенной вершине $\mathbf{r}_{i,j}$, будем обозначать $\tilde{\omega}_{i,j}$; заметим, что не все вершины исходной триангуляции участвуют в укрупненной триангуляции, а именно, индексы (i, j) пробегает не все множество \mathbb{X} , а лишь его часть: $(i, j) \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}'_1$; обозначим $\mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}'_1$.

Теорема 23: *Справедливы следующие соотношения*

$$\tilde{\omega}_{i,j}(t) \equiv \omega_{i,j}(t) \quad \forall (i, j) \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}_1 \setminus 2\mathbb{I}_1, \quad (10.1)$$

$$\tilde{\omega}_{0,0}(t) \equiv \omega_{0,0}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,-1}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,-1}(t), \quad (10.2)$$

$$\tilde{\omega}_{2,2}(t) \equiv \omega_{2,2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,1}(t), \quad \tilde{\omega}_{-2,2}(t) \equiv \omega_{-2,2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,1}(t), \quad (10.3)$$

$$\tilde{\omega}_{2,-2}(t) \equiv \omega_{2,-2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{1,-1}(t), \quad \tilde{\omega}_{-2,-2}(t) \equiv \omega_{-2,-2}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-1,-1}(t). \quad (10.4)$$

Доказательство: Представленные в теореме соотношения (10.1) — (10.4) легко получается, если учесть линейность функций Куранта на треугольниках, содержащихся в их носителе. ■

В дальнейшем вектор (i, j) будем обозначать через α (впрочем, для краткости иногда скобки в обозначении вектора будем опускать); положим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{i,j}, & \omega_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \omega_{i,j}, & \tilde{\omega}_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\omega}_{i,j}, \\ \mathbf{0} &\stackrel{\text{def}}{=} (0, 0), & \mathbf{e} &\stackrel{\text{def}}{=} (1, 1), & \mathbf{e}^* &\stackrel{\text{def}}{=} (-1, 1). \end{aligned}$$

В этих обозначениях имеем

$$\mathbb{I}_1 = \{\mathbf{0}, \mathbf{e}, \mathbf{e}^*, -\mathbf{e}, -\mathbf{e}^*\}, \quad \mathbb{I}'_1 = \mathbb{I}_1 \setminus \mathbf{0}, \quad 2\mathbb{I}_1 = \{\mathbf{0}, 2\mathbf{e}, 2\mathbf{e}^*, -2\mathbf{e}, -2\mathbf{e}^*\},$$

так что формулы (10.1) — (10.4) принимают вид

$$\tilde{\omega}_\alpha(t) \equiv \omega_\alpha(t) \quad \text{при } \alpha \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}_1 \setminus 2\mathbb{I}_1, \quad \alpha \in \mathbb{X}, \quad (10.5)$$

$$\tilde{\omega}_0(t) \equiv \omega_0(t) + \frac{1}{2}\omega_e(t) + \frac{1}{2}\omega_{e^*}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-e}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-e^*}(t), \quad (10.6)$$

$$\tilde{\omega}_{2e}(t) \equiv \omega_{2e}(t) + \frac{1}{2}\omega_e(t), \quad \tilde{\omega}_{-2e}(t) \equiv \omega_{-2e}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-e}(t), \quad (10.7)$$

$$\tilde{\omega}_{2e^*}(t) \equiv \omega_{2e^*}(t) + \frac{1}{2}\omega_{e^*}(t), \quad \tilde{\omega}_{-2e^*}(t) \equiv \omega_{-2e^*}(t) + \frac{1}{2}\omega_{-e^*}(t). \quad (10.8)$$

Краткая запись формул (10.5) — (10.8) такова

$$\tilde{\omega}_\alpha(t) \equiv \sum_{\gamma \in \mathbb{X}} \mathfrak{p}_{\alpha, \gamma} \omega_\gamma(t) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Y}, \quad (10.9)$$

где

$$\mathfrak{p}_{\alpha, \gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{\alpha, \gamma} \quad \text{при } \alpha \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{I}_1 \setminus 2\mathbb{I}_1, \quad \gamma \in \mathbb{X}, \quad (10.10)$$

$$p_{2\alpha, 2\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \quad \text{при } \alpha \in \mathbb{I}_1, \quad p_{0, \alpha} \stackrel{\text{def}}{=} 1/2, \quad p_{2\alpha, \alpha} = 1/2 \quad \text{при } \alpha \in \mathbb{I}'_1; \quad (10.11)$$

здесь $\delta_{\alpha, \alpha'}$ — символ Кронекера.

Заметим, что формула (10.9) охватывает все функции $\tilde{\omega}_\alpha$, соответствующие укрупненной триангуляции, а формула (10.10) учитывает все случаи (10.5) совпадения функций $\tilde{\omega}_\alpha$ и ω_γ ; кроме того, первая формула в (10.11) охватывает коэффициенты первых слагаемых в правых частях всех формул (10.6) — (10.8), а вторая формула в (10.11) дает значения коэффициентов всех слагаемых правой части формулы (10.6) кроме первого. Наконец, третья формула в (10.11) задает вторые слагаемые в правых частях формул (10.7) — (10.8).

Выберем и зафиксируем на множестве мультииндексов γ произвольный порядок (т. е. упорядочим множество \mathbb{X}), который будем использовать в дальнейшем; в подмножестве \mathbb{Y} введем порядок, индуцированный выбранному.

В соответствии с этой упорядоченностью введем вектор-столбцы

$$\tilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{\omega}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Y}}, \quad \omega \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{X}}, \quad (10.12)$$

а также рассмотрим матрицу

$$\mathfrak{P}_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{\alpha, \gamma}), \quad (10.13)$$

где $\alpha \in \mathbb{Y}$ — номер строки, а $\gamma \in \mathbb{X}$ — номер столбца.

Следствие 3: Справедливо соотношение

$$\tilde{\omega} = \mathfrak{P}_0 \omega. \quad (10.14)$$

Доказательство: Соотношения (10.14) очевидным образом следует из формул (10.9) — (10.13). ■

Для иллюстрации обратимся к случаю, когда \mathfrak{P}_0 — матрица размеров 9×13 :

$$\mathbb{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{-\mathbf{i}^*, -\mathbf{i}, -2\mathbf{e}^*, -2\mathbf{e}, \mathbf{e}^*, \mathbf{e}, \mathbf{0}, \mathbf{e}, \mathbf{e}^*, 2\mathbf{e}, 2\mathbf{e}^*, \mathbf{i}, \mathbf{i}^*\}, \quad (10.15)$$

где $\mathbf{i} \stackrel{\text{def}}{=} (2, 0)$, $\mathbf{i}^* \stackrel{\text{def}}{=} (0, 2)$. В этом случае

$$\mathbb{Y} = \{-\mathbf{i}^*, -\mathbf{i}, -2\mathbf{e}^*, -2\mathbf{e}, \mathbf{0}, 2\mathbf{e}, 2\mathbf{e}^*, \mathbf{i}, \mathbf{i}^*\}, \quad (10.16)$$

\mathfrak{P}_0 — прямоугольная матрица вида

$$\mathfrak{P}_0 = \begin{pmatrix} & -\mathbf{i}^* & -\mathbf{i} & -2\mathbf{e}^* & -2\mathbf{e} & -\mathbf{e}^* & -\mathbf{e} & \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{e}^* & 2\mathbf{e} & 2\mathbf{e}^* & \mathbf{i} & \mathbf{i}^* \\ -\mathbf{i}^* & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{i} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\mathbf{e}^* & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\mathbf{e} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mathbf{e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mathbf{e}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{i}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим линейные пространства

$$\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \mathcal{L}(\{\omega_\gamma \mid \forall \gamma \in \mathbb{X}\}), \quad \tilde{\mathbb{S}}_0 \stackrel{\text{def}}{=} Cl_p \mathcal{L}(\{\tilde{\omega}_\alpha \mid \forall \alpha \in \mathbb{Y}\}). \quad (10.17)$$

Следствие 4: Линейное пространство $\tilde{\mathbb{S}}_0$ является подпространством в \mathbb{S} :

$$\tilde{\mathbb{S}}_0 \subset \mathbb{S}. \quad (10.18)$$

Доказательство: Соотношение (10.18) следует из формул (10.14) и (10.17). ■

2.8. Биортогональная система и ее значения на базисных функциях объемлющего пространства

В пространстве $C(\mathbb{R}^2)$ зададим систему линейных функционалов g_γ для $\forall \gamma \in \mathbb{X}$ формулами

$$\langle g_\gamma, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\mathbf{r}_\gamma). \quad (11.1)$$

Ясно, что система $\{g_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{X}}$ биортогональна системе функций $\{\omega_{\gamma'}\}_{\gamma' \in \mathbb{X}}$:

$$\langle g_\gamma, \omega_{\gamma'} \rangle = \delta_{\gamma, \gamma'}. \quad (11.2)$$

Аналогично задается \tilde{g}_α для $\forall \alpha \in \mathbb{Y}$ формулами

$$\langle \tilde{g}_\alpha, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(\tilde{\mathbf{r}}_\alpha); \quad (11.3)$$

система функционалов $\{\tilde{g}_\alpha\}$ оказывается биортогональной системе функций $\{\tilde{\omega}_{\alpha'}\}_{\alpha' \in \mathbb{Y}}$:

$$\langle \tilde{g}_\alpha, \tilde{\omega}_{\alpha'} \rangle = \delta_{\alpha, \alpha'} \quad \forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{Y},$$

и, кроме того,

$$\langle \tilde{g}_\alpha, u \rangle = \langle g_\alpha, u \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{Y} \quad \forall u \in C(\Omega). \quad (11.4)$$

Пусть \mathfrak{Q}_0 — матрица с элементами

$$\mathfrak{q}_{\alpha, \gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{g}_\alpha, \omega_\gamma \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{Y} \quad \forall \gamma \in \mathbb{X}, \quad (11.5)$$

где α — номер строки, а β — номер столбца.

Теорема 24: *Справедливы соотношения*

$$\mathfrak{q}_{\alpha, \gamma} = \delta_{\alpha, \gamma} \quad \forall \alpha \in \mathbb{Y} \quad \forall \gamma \in \mathbb{X}. \quad (11.6)$$

Доказательство: С учетом расположения носителей функций $\omega_{\alpha'}$ из (11.1) — (11.4) получаем

$$\langle \tilde{g}_\alpha, \omega_\gamma \rangle = \delta_{\alpha, \gamma} \quad \forall \alpha \in \mathbb{Y} \quad \forall \gamma \in \mathbb{X};$$

отсюда, учитывая обозначение (11.5), приходим к (11.6). ■

В случае (10.15) — (10.16) \mathfrak{Q}_0 — прямоугольная матрица размеров 9×13 ; она

имеет вид

$$\mathfrak{P}_0 = \begin{pmatrix} & -\mathbf{i}^* & -\mathbf{i} & -2\mathbf{e}^* & -2\mathbf{e} & -\mathbf{e}^* & -\mathbf{e} & \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{e}^* & 2\mathbf{e} & 2\mathbf{e}^* & \mathbf{i} & \mathbf{i}^* \\ -\mathbf{i}^* & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{i} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\mathbf{e}^* & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\mathbf{e} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mathbf{e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mathbf{e}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{i}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Введем вектор-столбцы, компонентами которых являются функционалы \tilde{g}_α , $\alpha \in \mathbb{Y}$: $\tilde{\mathbf{g}} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{g}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Y}}$.

Благодаря свойству биортогональности имеем

$$\tilde{\mathbf{g}} \tilde{\omega}^T = I, \quad (11.7)$$

где I — единичная матрица с элементами $\delta_{\alpha, \alpha'}$ $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Y}$ (здесь $\delta_{\alpha, \alpha'}$ — символ Кронекера).

Применяя теорему 19, получаем следующее утверждение

Теорема 25: *Матрица Ω_0 является левой обратной для матрицы \mathfrak{P}_0^T , то есть*

$$\Omega_0 \mathfrak{P}_0^T = I. \quad (11.8)$$

В иллюстративном примере (10.15) — (10.16) легко проверить формулу (11.8) непосредственным подсчетом произведения прямоугольных матриц Ω_0 и \mathfrak{P}_0^T (размеров 9×13 и 13×9 соответственно): в результате получается квадратная единичная матрица девятого порядка.

2.9. Общая структура всплескового разложения

Аналогично пунктам 5 и 6 для рассматриваемых триангуляций введем оператор P_0 проектирования пространства $C(\Omega)$ на подпространство $\tilde{\mathfrak{S}}_0$, задав его формулой

$$P_0 u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \in \mathbb{Y}} \langle \tilde{g}_\alpha, u \rangle \tilde{\omega}_\alpha \quad \forall u \in C(\Omega); \quad (12.1)$$

кроме того, положим $Q_0 = I - P_0$, где I — тождественный в $C(\Omega)$ оператор.

В данном случае пространством всплесков является пространство $\mathbb{W}_0 \stackrel{\text{def}}{=} Q_0 \mathfrak{S}$.

Благодаря соотношениям (10.18) и (12.1) получаем прямое разложение

$$\mathbb{S} = \tilde{\mathbb{S}} \dot{+} \mathbb{W}_0 \quad (12.2)$$

— *сплайн-всплесковое разложение* пространства \mathbb{S} .

Как и прежде, рассматривая вектор-столбцы $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Y}}$, $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_\beta)_{\beta \in \mathbb{X}}$, $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{X}}$, получаем следующие утверждения

Теорема 26: *Формулы декомпозиции имеют вид*

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}_0^T \mathfrak{Q}_0 \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_0 \mathbf{c}, \quad (12.3)$$

а формулы реконструкции могут быть представлены в виде

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathfrak{P}_0^T \mathbf{a}. \quad (12.4)$$

Доказательство: Аналогично доказательству теоремы 21. ■

Теорема 27: *Пространство \mathbb{W}_0 изоморфно ядру оператора \mathfrak{Q}_0 :*

$$\mathbb{W}_0 = \{w \mid w = \sum_{\beta \in \mathbb{X}} b_\beta \omega_\beta \quad \forall \mathbf{b} \in \ker \mathfrak{Q}_0\}. \quad (12.5)$$

Доказательство: Вытекает из следующей цепочки эквивалентных формул

$$\begin{aligned} u = \sum_{\gamma \in \mathbb{X}} c_\gamma \omega_\gamma \in \mathbb{W}_0 &\iff P_0 u = 0 \iff \langle \tilde{g}_\alpha, u \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Y} \iff \\ &\iff \langle \tilde{g}_\alpha, \sum_{\gamma \in \mathbb{X}} c_\gamma \omega_\gamma \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Y} \iff \mathfrak{Q}_0 \mathbf{c} = 0 \iff \mathbf{c} \in \ker \mathfrak{Q}_0. \end{aligned}$$

Заметим, что первая эквивалентность следует из определения (12.1) оператора P_0 , предпоследняя эквивалентность следует из определения матрицы \mathfrak{Q}_0 , а остальные эквивалентности очевидны. Формула (12.5) и упомянутый в теореме изоморфизм установлены. ■

Рассмотрим линейные пространства

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Y}}\}, \quad \mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \ker \mathfrak{Q}_0, \quad \mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} = (a_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{X}}\}.$$

Пусть \mathcal{E} — прямое произведение пространств \mathcal{A} и \mathcal{B} : $\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, так что

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}, \mathbf{b} \in \mathcal{B} \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{D}_0 : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{E}, \quad \mathfrak{D}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_0 \\ I - \mathfrak{P}_0^T \mathfrak{Q}_0 \end{pmatrix};$$

для него верна эквивалентность

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_0 \\ I - \mathfrak{P}_0^T \mathfrak{Q}_0 \end{pmatrix} \mathbf{c} \iff \begin{cases} \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_0 \mathbf{c} \\ \mathbf{b} = (I - \mathfrak{P}_0^T \mathfrak{Q}_0) \mathbf{c} \end{cases};$$

этот оператор называется *оператором декомпозиции*.

Оператор $\mathfrak{R}_0 : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{C}$, $\mathfrak{R}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_0^T & I \end{pmatrix}$, удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{c} = \mathfrak{R}_0 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_0^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \iff \mathbf{c} = \mathfrak{P}_0^T \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

он называется *оператором реконструкции*.

Теорема 28: *Операторы \mathfrak{D}_0 и \mathfrak{R}_0 взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств \mathcal{C} и \mathcal{E} .*

Доказательство: Рассмотрим произведение $\mathfrak{R}_0 \mathfrak{D}_0$:

$$\mathfrak{R}_0 \mathfrak{D}_0 = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_0^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_0 \\ I - \mathfrak{P}_0^T \mathfrak{Q}_0 \end{pmatrix} = \mathfrak{P}_0^T \mathfrak{Q}_0 + I - \mathfrak{P}_0^T \mathfrak{Q}_0 = I.$$

С другой стороны с учетом свойства (11.8) имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_0 \mathfrak{R}_0 \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_0 \\ I - \mathfrak{P}_0^T \mathfrak{Q}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_0^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_0 \mathfrak{P}_0^T & \mathfrak{Q}_0 \\ \mathfrak{P}_0^T - \mathfrak{P}_0^T \mathfrak{Q}_0 \mathfrak{P}_0^T & I - \mathfrak{P}_0^T \mathfrak{Q}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} + \mathfrak{Q}_0 \mathbf{b} \\ \mathbf{b} - \mathfrak{P}_0^T \mathfrak{Q}_0 \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

2.10. Всплесковое разложение при локальном укрупнении триангуляции

Здесь применим полученные в предыдущих пунктах формулы для отыскания всплескового разложения пространства \mathbb{S} при локальном укрупнении триангуляции $[\mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}_0]$, описанном в пунктах 2.6 – 2.9.

Теорема 29: *При локальном укрупнении триангуляции $[\mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}_0]$ во всплесковом разложении (12.2) формулы декомпозиции (12.3) имеют вид*

$$b_\alpha = 0, \quad a_\alpha = c_\alpha \quad \alpha \in \mathbb{Y}, \quad (13.1)$$

$$b_{-e^*} = c_{-e^*} - \frac{1}{2}c_{-2e^*} - \frac{1}{2}c_0, \quad b_{-e} = c_{-e} - \frac{1}{2}c_{-2e} - \frac{1}{2}c_0, \quad (13.2)$$

$$b_e = c_e - \frac{1}{2}c_{2e} - \frac{1}{2}c_0, \quad b_{e^*} = c_{e^*} - \frac{1}{2}c_{2e^*} - \frac{1}{2}c_0. \quad (13.3)$$

Доказательство: Используя формулы (10.10) – (10.11) и (11.6) в соотношениях (12.3), получаем равенства (13.1) – (13.3). ■

Заметим, что в случае (10.15) – (10.16) формулы (13.2) – (13.3) можно проиллюстрировать первым из соотношений (12.3), где $\mathfrak{P}_0^T \Omega_0$ – квадратная матрица (порядка 13) вида

$$\mathfrak{P}_0^T \Omega_0 = \begin{pmatrix} & -i^* & -i & -2e^* & -2e & -e^* & -e & 0 & e & e^* & 2e & 2e^* & i & i^* \\ -i^* & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2e^* & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e^* & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ e^* & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2e^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ i^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 30: *Для локального укрупнения $[\mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}_0]$ всплесковому разложению (12.2) соответствуют формулы реконструкции*

$$c_\alpha = a_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{Y}, \quad (13.4)$$

$$c_{-e^*} = b_{-e^*} + \frac{1}{2}a_{-2e^*} + \frac{1}{2}a_0, \quad c_{-e} = b_{-e} + \frac{1}{2}a_{-2e} + \frac{1}{2}a_0, \quad (13.5)$$

$$c_e = b_e + \frac{1}{2} a_{2e} + \frac{1}{2} a_0, \quad c_{e^*} = b_{e^*} + \frac{1}{2} a_{2e^*} + \frac{1}{2} a_0. \quad (13.6)$$

Доказательство формул (13.4) – (13.6) вытекают из соотношений (12.4), если подставить в них значения коэффициентов $\mathbf{p}_{\alpha,\gamma}$ из равенств (10.10) – (10.11). ■

Исследуем структуру предложенного укрупнения исходной триангуляции. При фиксированных $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+1,2j+1}, & \mathbf{X} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i,2j}, & \mathbf{Y} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i,2j+2}, \\ \mathbf{Z} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+2,2j+2}, & \mathbf{W} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+2,2j}, & \mathbf{Y}' &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i,2j-2}, \\ \mathbf{Z}' &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i-2,2j-2}, & \mathbf{O}' &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{2i+1,2j-1}. \end{aligned}$$

Прямоугольник с вершинами $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ назовем исходным прямоугольником.

В соответствии с рассматриваемым алгоритмом триангуляция исходного прямоугольника преобразуется следующим образом

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{x} & \mathbf{o} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y} & \mathbf{o} & \mathbf{z} \\ \mathbf{z} & \mathbf{o} & \mathbf{w} \\ \mathbf{x} & \mathbf{o} & \mathbf{w} \end{array} \right\| \implies \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{x} & \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{array} \right\|, \quad (14.1)$$

а триангуляция симметричного относительно прямой \mathbf{xw} прямоугольника преобразуется по правилу

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{x} & \mathbf{o}' & \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}' & \mathbf{o}' & \mathbf{z}' \\ \mathbf{z}' & \mathbf{o}' & \mathbf{w} \\ \mathbf{x} & \mathbf{o}' & \mathbf{w} \end{array} \right\| \implies \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{x} & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \\ \mathbf{x} & \mathbf{z}' & \mathbf{w} \end{array} \right\|. \quad (14.2)$$

В дальнейшем рассматриваются также соответствующие преобразования прямоугольников, симметричных упомянутым относительно прямой \mathbf{yy}' .

Прямоугольники

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{i,j} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid (2i - 2)h' \leq x \leq (2i + 2)h', \\ &\quad (2i - 2)h'' \leq y \leq (2i + 2)h''\}, \end{aligned}$$

рассматриваемые для всех $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, заполняют всю плоскость. Очевидно, что

$$\mathbb{R}_{i,j} = \bigcup_{i'=i-1, i; j'=j-1, j} \Pi_{i',j'}.$$

Для $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ каждый прямоугольник $\Pi_{i,j}$ триангулирован согласно таблице

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_{2i,2j} & \mathbf{r}_{2i,2j+2} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \\ \mathbf{r}_{2i,2j} & \mathbf{r}_{2i+2,2j} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \\ \mathbf{r}_{2i+2,2j+2} & \mathbf{r}_{2i+2,2j} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \\ \mathbf{r}_{2i+2,2j+2} & \mathbf{r}_{2i,2j+2} & \mathbf{r}_{2i+1,2j+1} \end{array} \right\|, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2. \quad (14.3)$$

Рассмотрим укрупнение вида (14.1) — (14.2) соответствующего подразделения прямоугольника $\mathbb{R}_{i,j}$ и покажем, что результат изоморфен подразделению (14.3); тем самым будет установлено, что структура локального укрупнения подразделения в подобласти совпадает со структурой исходного подразделения. Будет показано, что в области, где произведено укрупнение, возможно использование предлагаемого алгоритма для дальнейшего локального укрупнения. Отсюда видно, что можно получить цепочку вложенных пространств с локальным укрупнением триангуляции и сгенерировать вэйвлетный пакет.

Для удобства введем обозначения

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_{2i-2,2j-2}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_{2i+2,2j-2}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{r}_{2i+2,2j+2}, \quad \mathbf{a}_4 = \mathbf{r}_{2i-2,2j+2},$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{r}_{2i,2j-2}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{r}_{2i+2,2j}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{r}_{2i,2j+2}, \quad \mathbf{b}_4 = \mathbf{r}_{2i-2,2j},$$

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_{2i-1,2j-1}, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{r}_{2i+1,2j-1}, \quad \mathbf{c}_3 = \mathbf{r}_{2i+1,2j+1}, \quad \mathbf{c}_4 = \mathbf{r}_{2i-1,2j+1}, \quad \mathbf{o} = \mathbf{r}_{2i,2j}.$$

Рассмотрим преобразование, описываемое соотношениями (14.4) – (14.7) (см. дальше):

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{a}_1 \end{array} \right\| \implies \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_4 \end{array} \right\|, \quad (14.4)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{o} \end{array} \right\| \implies \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \end{array} \right\|, \quad (14.5)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{a}_3 \end{array} \right\| \implies \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{o} & \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{o} & \mathbf{b}_3 \end{array} \right\|, \quad (14.6)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_4 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{o} \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{a}_4 \end{array} \right\| \implies \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_4 & \mathbf{o} & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_4 & \mathbf{o} & \mathbf{b}_4 \end{array} \right\|. \quad (14.7)$$

Итак, в результате получаем триангуляцию

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{array} \right\|^T. \quad (14.8)$$

Выделим фрагмент исходной триангуляции топологически изоморфный результату, полученному применением преобразования (14.4) — (14.7):

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{c}_4 \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{array} \right\|^T. \quad (14.9)$$

Из формул (14.8) — (14.9) видно, что установлено следующее утверждение.

Теорема 31: *Исходное и укрупненное подразделения изоморфны; изоморфизм, сохраняющий величины углов треугольников, определяется отображением*

$$\mathbf{o} \longrightarrow \mathbf{o}, \quad \mathbf{a}_i \longrightarrow \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{b}_i \longrightarrow \mathbf{c}_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{b}_4 \longrightarrow \mathbf{c}_1. \quad (14.10)$$

Замечание 2: Другой изоморфизм, который, однако, не сохраняет величины углов, может быть задан соотношениями

$$\mathbf{o} \longrightarrow \mathbf{o}, \quad \mathbf{a}_i \longrightarrow \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{b}_i \longrightarrow \mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Заключение

В данной главе рассмотрен вопрос построения адаптивных локально укрупняемых сеток узлов, ассоциированных с двумерной триангулированной плоскостью, а также выполнено построение пространств сплайн-всплесковых разложений, ассоциированных с этими сетками. Выведены формулы реконструкции и декомпозиции, калибровочные соотношения. Рассмотрены вопросы построения сплайн-всплесковых разложений для частного случая курантовских аппроксимаций.

Глава 3

Реализация алгоритма укрупнения триангуляции

Обзор главы

В данной главе дано описание выполненной автором реализации алгоритма (в виде комплекса компьютерных программ), предложенного в предыдущей главе. Приведены результаты тестирования программы на модельных примерах.

3.1. Обозначения

Определение: *триангуляция называется правильной, если никакая вершина не лежит внутри какого-либо ребра.*

В дальнейшем мы всегда будем подразумевать, что рассматриваемая триангуляция является правильной.

Следует обратить внимание на то, что в общем случае триангуляция может быть и криволинейной. Подобные случаи могут возникать, например, при цифровом моделировании геологических или астрономических объектов. Данный случай не будет рассматриваться здесь в связи со сложностью задания входных данных. Тем не менее, рассматриваемый алгоритм допускает работу с криволинейными триангуляциями. Необходимым условием остается правильность обрабатываемой триангуляции, а также ее изоморфизм той триангуляции, которая представлена в этой работе.

Задание триангуляции предлагается осуществлять с помощью двух таблиц: таблицы инциденций треугольник-вершина T , и соответствующей ей таблицы инци-

денций вершина-координаты V .

При наличии N вершин таблица V будет представлять собой матрицу размера $N \times 3$. Каждую строку данной матрицы будем рассматривать как координаты некоторой точки v в трехмерном пространстве. Таблица V может содержать как целые, так и вещественные числа. Обозначим координаты точки через (x, y, z) , при этом для определенности будем говорить, что x и y — координаты точки на двумерной плоскости, а z — значение аппроксимируемой функции в данной точке. Порядковый номер строки назовем индексом вершины и обозначим через $vidx$ (vertex index). В дальнейшем мы будем работать не с самими вершинами (то есть массивами векторов вида (x_i, y_i, z_i)), а с их индексами. Это сделано для того, чтобы избавиться от необходимости работать с координатами узлов, которые, в общем случае, могут быть не целыми числами, что привело бы к увеличению объема необходимых вычислений и снизило бы точность вычислений.

Таблица вершин имеет следующий вид:

$vidx$	x	y	z	,
0	x_0	y_0	z_0	
1	x_1	y_1	z_1	
...	
$N - 2$	x_{N-2}	y_{N-2}	z_{N-2}	
$N - 1$	x_{N-1}	y_{N-1}	z_{N-1}	

в данной таблице $vidx$ — порядковый номер элемента (индекс вершины), а x , y и z — соответствующие координаты вершины.

В качестве таблицы инциденций треугольников мы будем рассматривать список всех треугольников, заданных в триангуляции. В предположении, что общее количество треугольников равно K , таблица инциденций T будет представлять собой матрицу размера $K \times 3$, где i -я строка состоит из трех целых чисел (v_{i0}, v_{i1}, v_{i2}) — индексов вершин, составляющих вершины i -го треугольника. Номер строки в этой таблице назовем индексом треугольника.

Таблица T будет выглядеть следующим образом:

$tidx$	v_0	v_1	v_2
0	$v_{0,0}$	$y_{0,1}$	$z_{0,2}$
1	$v_{1,0}$	$y_{1,1}$	$z_{1,2}$
...
$K - 2$	$x_{K-2,0}$	$y_{K-2,1}$	$z_{K-2,2}$
$K - 1$	$x_{K-1,0}$	$y_{K-1,1}$	$z_{K-1,2}$

При этом, в общем случае, порядок строк не играет роли и никак не отражает взаимное расположение треугольников на плоскости. Также не имеет значения порядок задания вершин.

3.2. Изменение таблицы инциденций

На плоскости \mathbb{R}^2 рассмотрим правильную (возможно, криволинейную) триангуляцию \mathbb{T}_0 , заданную на прямоугольной сетке узлов, которая характеризуется следующей таблицей инциденций:

$$\left\| \begin{array}{ccc} r_{2i,2j} & r_{2i,2j+2} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i+2,2j+2} & r_{2i+2,2j} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i+2,2j+2} & r_{2i,2j+2} & r_{2i+1,2j+1} \end{array} \right\| \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

Определение: Множество вершин, используемых в триангуляции, назовем ее нульмерным остовом.

Определение: Всякую прямолинейную триангуляцию, нульмерный остов которой содержится в множестве вида $\{(ih, jh) \mid (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$, где h – некоторое фиксированное число, назовем стандартной триангуляцией.

Укрупнение триангуляции будем проводить объединением двух треугольников исходной триангуляции, имеющих общее ребро. Для этого предлагается заменить два треугольника исходной триангуляции треугольником, получающимся их объединением. Эквивалентное преобразование таблицы инциденций состоит в том, что из нее исключаются строки, соответствующие объединяемым треугольникам, и добавляются строки, соответствующие результату такого объединения – укруп-

ненному треугольнику ¹. При этом необходимо выбирать пары объединяемых треугольников таким образом, чтобы результат их объединения также являлся треугольником. Порядок строк в таблице инциденций не играет роли, поэтому удаление и добавление строк можно осуществлять в любых местах таблицы; для задания укрупнения достаточно перечислить выбрасываемые и добавляемые строки. Будем задавать преобразование таблицы инциденций указанием двух строк заменяемых треугольников (в левой от стрелки части формулы); например, отображение

$$\left\| \begin{array}{ccc} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{ccc} x_2 & y_2 & z_2 \end{array} \right\|$$

означает, что треугольники $\left\| \begin{array}{ccc} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{array} \right\|$ и $\left\| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \end{array} \right\|$ заменяются треугольником $\left\| \begin{array}{ccc} x_2 & y_2 & z_2 \end{array} \right\|$.

3.3. Укрупнение триангуляции

Рассмотрим следующие отображения:

$$\varepsilon_{ij}^l : \left\| \begin{array}{ccc} r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i+2,2j} & r_{2i+2,2j+2} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i+2,2j+2} & r_{2i,2j+2} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i,2j+2} & r_{2i,2j} & r_{2i+1,2j+1} \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{ccc} r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j} & r_{2i,2j+2} \\ r_{2i+2,2j+2} & r_{2i+2,2j} & r_{2i,2j+2} \end{array} \right\|,$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \quad (i + j) \bmod 2 \equiv 0,$$

и

$$\varepsilon_{ij}^r : \left\| \begin{array}{ccc} r_{2i+2,2j} & r_{2i+2,2j+2} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i+2,2j+2} & r_{2i,2j+2} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i,2j+2} & r_{2i,2j} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j} & r_{2i+1,2j+1} \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{ccc} r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j+2} & r_{2i+2,2j} \\ r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j+2} & r_{2i,2j+2} \end{array} \right\|,$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \quad (i + j + 1) \bmod 2 \equiv 0$$

¹Следует отметить, что объединение двух треугольников не всегда является треугольником. В общем случае необходимо проводить проверку того, что результат укрупнения также является треугольником. При проведении укрупнения построенным в данной работе алгоритмом таких ситуаций не возникает, поэтому такая проверка не требуется.

Триангуляция \mathcal{T}_1 , полученная с помощью данного отображения, будет иметь следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{ccc} r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j} & r_{2i,2j+2} \\ r_{2i+2,2j+2} & r_{2i+2,2j} & r_{2i,2j+2} \end{array} \right\|, \quad (i+j) \equiv 0 \pmod{2} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2,$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j+2} & r_{2i+2,2j} \\ r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j+2} & r_{2i,2j+2} \end{array} \right\|, \quad (i+j+1) \equiv 0 \pmod{2} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2.$$

Замечание 1: Триангуляция \mathcal{T}_1 топологически изоморфна исходной триангуляции \mathcal{T}_0 .

Замечание 2: Для стандартных триангуляций переход от триангуляции \mathcal{T}_0 к триангуляции \mathcal{T}_1 может быть осуществлен поворотом плоскости на угол $\frac{\pi}{4}$ и масштабированием ее с коэффициентом $\sqrt{2}$ относительно начала координат.

3.4. Алгоритм укрупнения в данной области

Рассмотрим прямоугольную область

$$D = \{(x, y), \quad |x| \leq M, \quad |y| \leq N\},$$

где M и N — натуральные числа. Будем считать, что числа M и N достаточно велики. В области D построим целочисленную сетку узлов. Положим

$$r_{ij} = (i, j),$$

$$i \in \{-M, -M+1, \dots, M-1, M\},$$

$$j \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\}.$$

Нетрудно видеть, что рассматриваемая прямоугольная сетка узлов имеет размер $(2M+1) \times (2N+1)$.

Определим множество D_0 следующим образом:

$$D_0 = \{(x, y) \mid \varphi(x, y) \leq 0, (x, y) \in D\}$$

для некоторой измеримой функции $\varphi(x, y)$, заданной на D .

Пусть

$$T(i, j) = \left\| \begin{array}{ccc} (2i, 2j) & (2i + 2, 2j) & (2i + 1, 2j + 1) \\ (2i + 2, 2j) & (2i + 2, 2j + 2) & (2i + 1, 2j + 1) \\ (2i + 2, 2j + 2) & (2i, 2j + 2) & (2i + 1, 2j + 1) \\ (2i, 2j + 2) & (2i, 2j) & (2i + 1, 2j + 1) \end{array} \right\|,$$

$$Tl(i, j) = \left\| \begin{array}{ccc} (2i, 2j) & (2i + 2, 2j) & (2i, 2j + 2) \\ (2i + 2, 2j + 2) & (2i + 2, 2j) & (2i, 2j + 2) \end{array} \right\|,$$

$$Tr(i, j) = \left\| \begin{array}{ccc} (2i, 2j) & (2i + 2, 2j + 2) & (2i + 2, 2j) \\ (2i, 2j) & (2i + 2, 2j + 2) & (2i, 2j + 2) \end{array} \right\|.$$

В случае, если все элементы матрицы $T(i, j)$ содержатся в области D_0 , заменяем в таблице инцидентий строки, описанные в матрице $T(i, j)$ на строки из матрицы $Tl(i, j)$ или $Tr(i, j)$. Выбор между $Tl(i, j)$ и $Tr(i, j)$ делается таким образом, что бы структура укрупненной триангуляции совпадала со структурой исходной триангуляции.

Для удобства читателя покажем, как будут выглядеть треугольники, объединенные с помощью отображений $\varepsilon_{2,2}^l$ и $\varepsilon_{2,4}^r$:

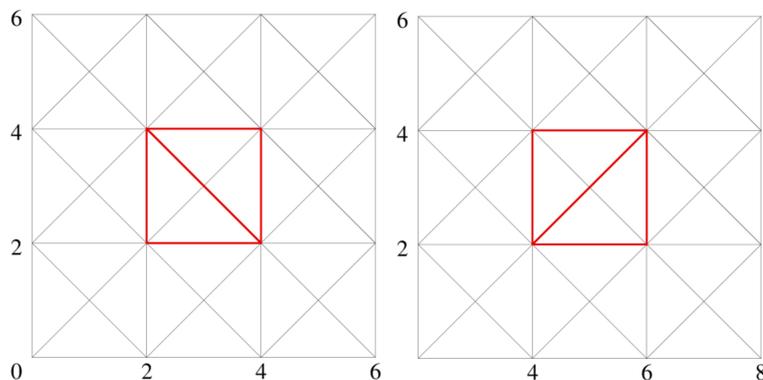


Рис. 3.1 – Результат работы отображений $\varepsilon_{1,1}^l$ и $\varepsilon_{1,2}^r$

Результатом работы алгоритма является триангуляция области D , укрупненная в области D_0 . Полученная триангуляция описывается таблицей инцидентий, которую обозначим T_{rez} .

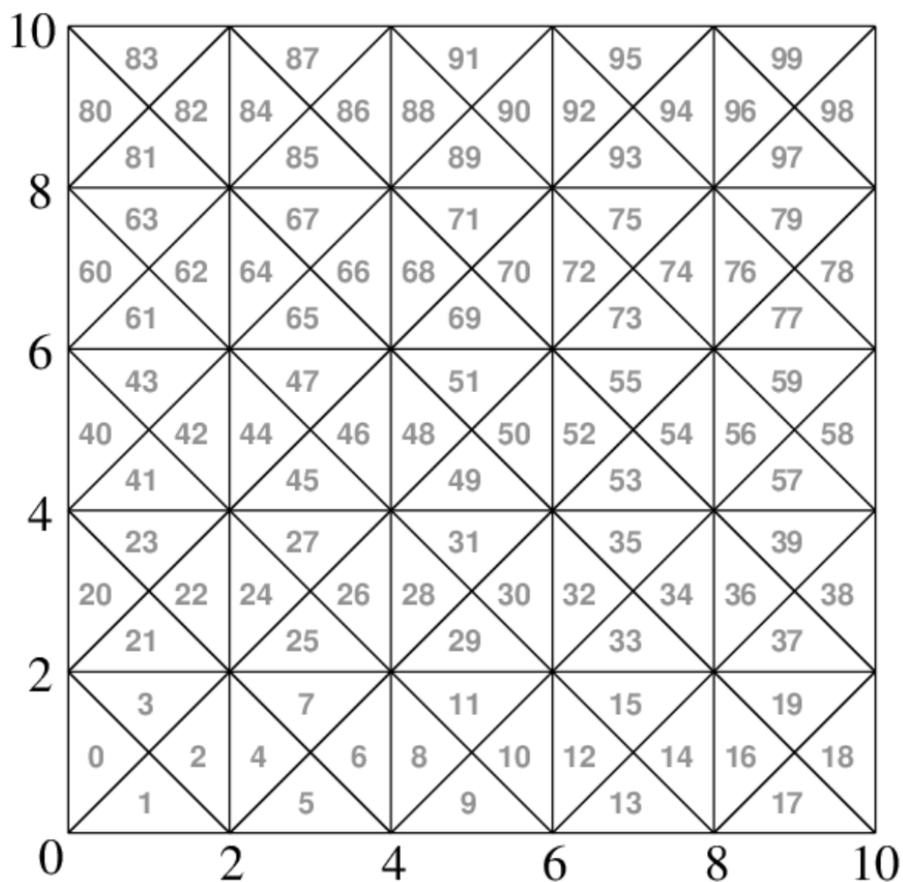


Рис. 3.2 – Исходная триангуляция

Серым цветом обозначены индексы треугольников. На таблице 3.1 показано, как выглядит таблица инциденций вершин данной триангуляции; в ней первый столбец — индекс вершины, 2-й и 3-й — ее координаты.

index	x	y
0	0	0
1	0	1
2	0	2
...		
...		
...		
118	10	8
119	10	9
120	10	10

Таблица 3.1 – Таблица инциденций вершин исходной триангуляции

На таблице 3.2 показана таблица инцидентий треугольников; в ней первая колонка — индекс треугольника, далее идут индексы вершин, составляющих треугольник.

index	vertice 0	vertice 1	vertice 2
0	0	2	12
1	2	24	12
2	24	22	12
...			
...			
...			
97	98	120	108
98	120	118	108
99	118	96	108

Таблица 3.2 – Таблица инцидентий треугольников исходной триангуляции

Полностью таблица приведена в приложении 14.

Напомним преобразование, определяющее первое укрупнение:

$$\varepsilon_{ij}^l : \begin{vmatrix} r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i+2,2j} & r_{2i+2,2j+2} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i+2,2j+2} & r_{2i,2j+2} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i,2j+2} & r_{2i,2j} & r_{2i+1,2j+1} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j} & r_{2i,2j+2} \\ r_{2i+2,2j+2} & r_{2i+2,2j} & r_{2i,2j+2} \end{vmatrix},$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \quad (i + j) \bmod 2 \equiv 0,$$

$$\varepsilon_{ij}^r : \begin{vmatrix} r_{2i+2,2j} & r_{2i+2,2j+2} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i+2,2j+2} & r_{2i,2j+2} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i,2j+2} & r_{2i,2j} & r_{2i+1,2j+1} \\ r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j} & r_{2i+1,2j+1} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j+2} & r_{2i+2,2j} \\ r_{2i,2j} & r_{2i+2,2j+2} & r_{2i,2j+2} \end{vmatrix},$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \quad (i + j + 1) \bmod 2 \equiv 0$$

Укрупненная триангуляция будет выглядеть следующим образом:

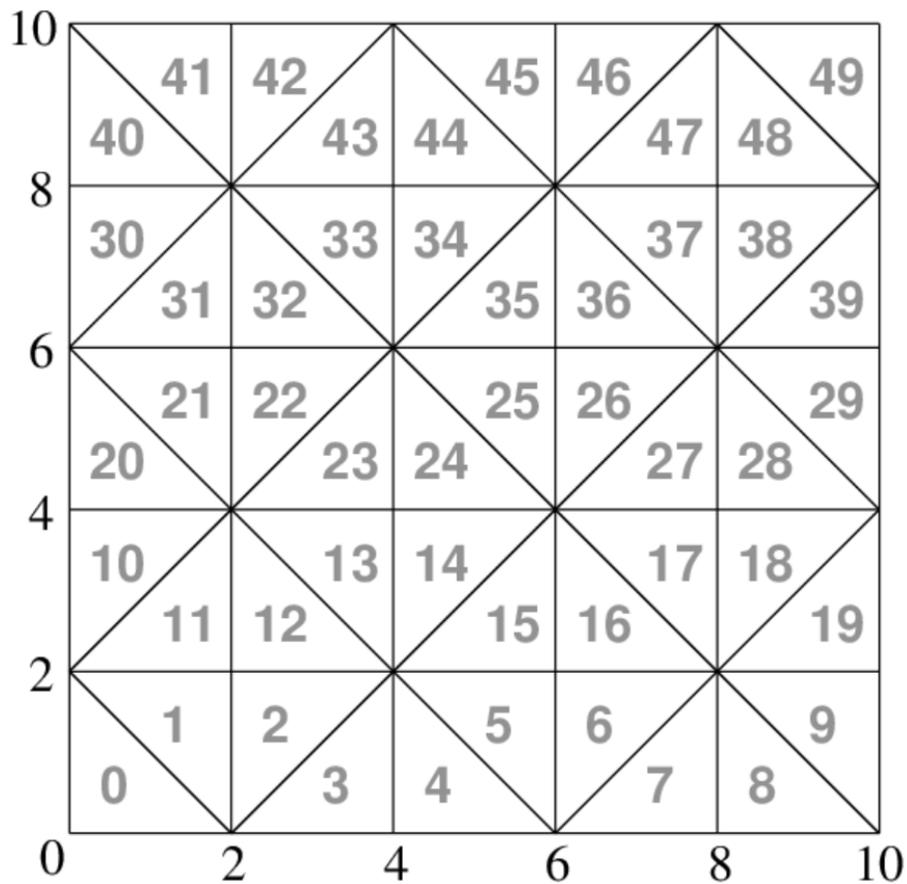


Рис. 3.3 – Триангуляция после укрупнения

Таблица инцидентий треугольников укрупненной триангуляции выглядит следующим образом:

index	vertice 0	vertice 1	vertice 2
0	0	2	22
1	2	22	24
2	2	4	26
...			
...			
...			
47	94	118	116
48	96	98	118
49	98	118	120

Таблица 3.3 – Таблица инцидентий треугольников укрупненной триангуляции

Полностью таблица инцидентий треугольников укрупненной триангуляции приведена в приложении 15.

3.5. Программная реализация алгоритма

Для демонстрации работы алгоритма был реализован комплекс компьютерных программ, выполняющий рекурсивное локальное адаптивное укрупнение триангуляции; полученная триангуляция далее используется для построения модели (на основе курантовской аппроксимации) исходного потока данных. В качестве языка программирования была выбрана Java; выбор обусловлен возможностями параллелизации и переносимостью на различные аппаратные платформы.

Для удобства тестирования предусмотрено использование графических файлов в качестве исходных данных; это позволяет генерировать множество различных примеров для тестирования, а также наглядно продемонстрировать качество получающихся математических моделей исходных данных. При этом данные интерпретируются как курантовская аппроксимация; ее график представляет собой кусочно-линейную поверхность. При укрупнении каждой группы треугольников проводится сравнение значений курантовских аппроксимаций на исходной и

укрупненной триангуляциях; укрупнения проводятся при условии, что максимум уклонения упомянутых аппроксимаций друг от друга не превосходит априори заданного числа $\varepsilon > 0$. Этим условием определяется критерий останковки процесса укрупнения.

Было проведено распараллеливание алгоритма, однако оно не дало существенного прироста производительности. Для эффективного использования возможностей современных вычислительных систем необходимо выполнить дополнительное исследование.

Для запуска программы необходимо использовать командную строку вида

```
tr_enl.java <\varepsilon> <input> <output>
```

Программа имеет следующие обязательные параметры:

1. верхняя граница погрешности аппроксимации ε ; целое число типа `integer`;
2. путь к директории в файловой системе (полный или относительный) *input*, в которой хранятся входные файлы; будут обработаны все файлы, имеющие расширения `bmp`, `jpg`, `jpeg`, `tiff` и `png`;
3. путь к директории в файловой системе (полный или относительный) *output*, в которую будут записаны полученные результаты.

Пример запуска программы из командной строки:

```
java -jar tr_enl.jar 10 "C:\tr_enlarge\input" "C:\tr_enlarge\output"
```

Каждый набор входных данных (графический файл) раскладывается затем на три независимых набора: для красной, зеленой и синей компонент цвета исходного изображения; разложение осуществляется с помощью встроенных средств языка Java. Каждый из трех полученных таким образом наборов данных интерпретируется как множество вершин стандартной триангуляции. Далее для каждой триангуляции выполняются адаптивные рекуррентные укрупнения.

3.6. Структура алгоритма укрупнения триангуляции

Дадим краткое описание последовательности действий, выполняемых при укрупнении триангуляции.

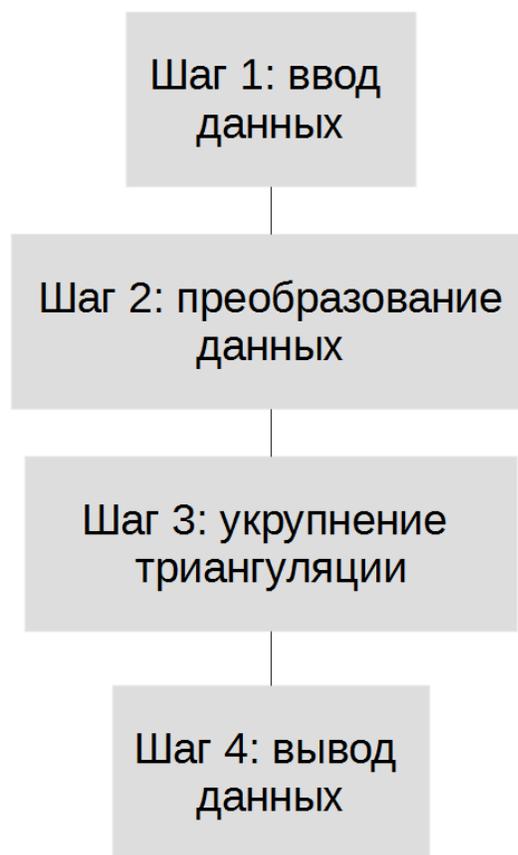


Рис. 3.4 – Этапы работы метода *processEnlargement*, выполняющего укрупнения триангуляции.

Шаг 1: ввод данных

Входные данные представлены в виде графического изображения, ассоциируемого с равномерной прямоугольной сеткой. В качестве значений в узлах сетки берутся уровни яркости красной, зеленой или синей компонент цветов соответствующих пикселей; таким образом, рассматриваются три экземпляра сеток. Далее узлы сетки автоматически интерпретируются как вершины триангуляции, имеющей рассмотренную в предыдущих главах топологию; триангуляция определяется таблицами инцидентий треугольник-вершина и вершина-координаты. Значениями в узлах сетки являются целые числа в диапазоне $[0, 255]$.



Рис. 3.5 – Ввод данных

Шаги 2 и 3 выполняются независимо для каждой построенной на этапе ввода данных триангуляции.

Шаг 2: преобразование данных

На втором шаге выполняется преобразование полученных данных. Как уже говорилось выше, триангуляция задается таблицами инциденций треугольник \rightarrow вершины T_v и вершина \rightarrow координаты V_c . Множество вершин триангуляции разобьем на два класса: к первому классу отнесем вершины, инцидентные четырем треугольникам, а ко второму классу — вершины, инцидентные восьми треугольникам. Телом барицентрической звезды назовем замыкание объединения ее треугольников.

Будем рассматривать барицентрические звезды, тело которых состоит из четырех треугольников триангуляции; следовательно, вершина каждой рассматриваемой барицентрической звезды — вершина первого класса, а ее граничные вершины — вершины второго класса. Составим таблицу инциденций вершина \rightarrow барицен-

трические звезды, позволяющую по данной вершине найти множество всех барицентрических звезд, для которых эта вершина является граничной. Обозначим эту таблицу V_s .

На рисунке 3.6 приведен один элемент таблицы инциденций V_s . Вершину (второго класса), являющуюся граничной для выделенных барицентрических звезд, обозначим Λ ; сами звезды обозначим символами Υ , Φ , Ψ и Ω . Множество барицентрических звезд, инцидентных граничной вершине, назовем *единицей укрупнения (триангуляции)*. Общую граничную вершину назовем *центральной* для данной единицы укрупнения. Каждая единица укрупнения имеет общие барицентрические звезды с другими единицами укрупнения; единицы укрупнения, имеющие общие барицентрические звезды, будем называть *соседними*. Назовем *угловыми* те вершины, которые являются граничными только для одной барицентрической звезды из составляющих данную единицу укрупнения. Очевидно, что каждая угловая вершина является также центральной для некоторой соседней единицы укрупнения.

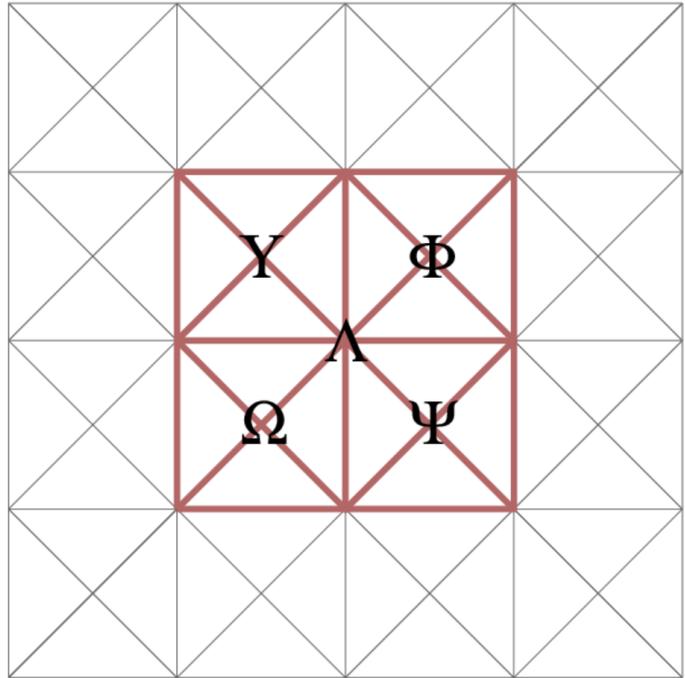


Рис. 3.6 – Единица укрупнения триангуляции.

Шаг 3: укрупнение триангуляции

Укрупнение триангуляции осуществляется в соответствии со следующими этапами:

1. выборка из построенной на предыдущем шаге таблицы инцидентий V_s первой единицы укрупнения (случайным образом) и постановка ее в очередь на укрупнение Q ;
2. снятие с очереди Q и обработка очередной единицы укрупнения ι ; укрупнение осуществляется только в том случае, если погрешность построенной на укрупненной триангуляции аппроксимации не превышает априори заданной верхней границы погрешности ε ;
3. поиск и постановка в очередь Q единиц укрупнения, являющихся соседними для ι ;
4. проверка очереди Q : если очередь не пуста, то идем к пункту 2, иначе — завершение алгоритма.

На рисунках 3.8 - 3.13 проиллюстрированы описанные выше этапы работы.

1. Нарисунке 3.7 показана исходная сетка.

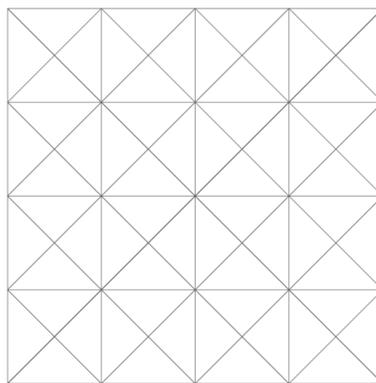


Рис. 3.7 – Получение исходной сетки.

2. На рисунке 3.8 демонстрируется выборка из очереди Q следующей единицы укрупнения триангуляции; обозначим ее $\tilde{\Lambda}$; ее центральную вершину, как и прежде, обозначим символом Λ . Барицентрические звезды, составляющие $\tilde{\Lambda}$, обозначим символами Υ , Φ , Ψ и Ω . Вершины, являющиеся для $\tilde{\Lambda}$ угловыми, обозначены символами α , β , γ и δ .

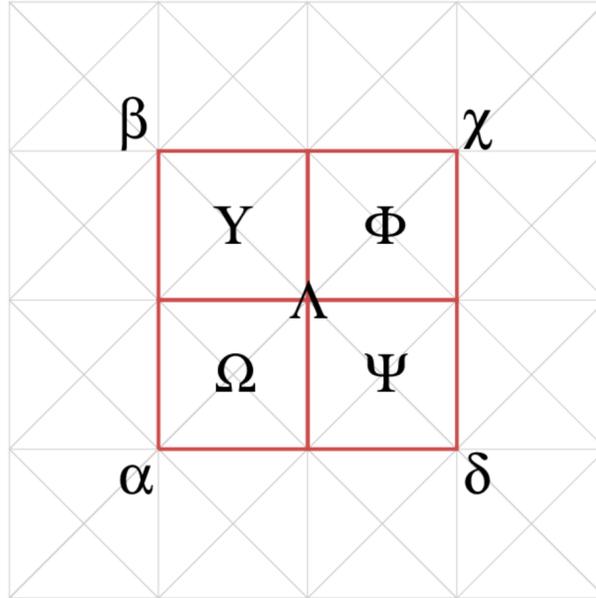


Рис. 3.8 – Выборка первой единицы укрупнения.

3. На рисунке 3.9 показано объединение треугольников, составляющих Υ ; при этом объединяется пара треугольников, инцидентных центральной вершине единицы укрупнения Λ , и пара треугольников, инцидентных общей угловой вершине β . β — вершина второго класса — является центральной для соседней единицы укрупнения триангуляции (обозначим ее $\tilde{\beta}$) посредством общей барицентрической звезды Υ ; поставим $\tilde{\beta}$ в очередь Q .

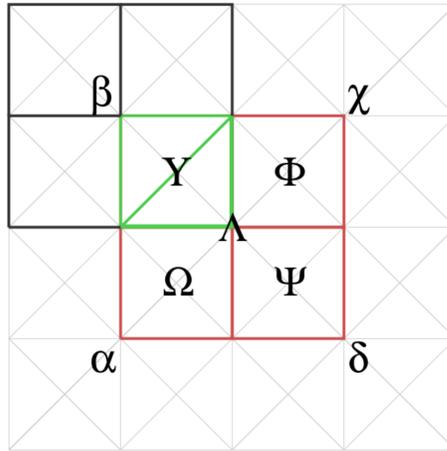


Рис. 3.9 – Укрупнение треугольников, составляющих барицентрическую звезду Υ .

4. Объединение треугольников в остальных трех барицентрических звездах осуществляется по тому же правилу: объединяется пара треугольников, инцидентных общей вершине Λ , и пара треугольников, инцидентных общей угловой вершине. После обработки каждой звезды в очередь Q ставится соседняя единица укрупнения, определяемая соответствующей угловой вершиной ($\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$ и $\tilde{\alpha}$ для соответственно γ , δ и α). На рисунке 3.10 показан результат обработки барицентрических звезд рассматриваемой единицы укрупнения.

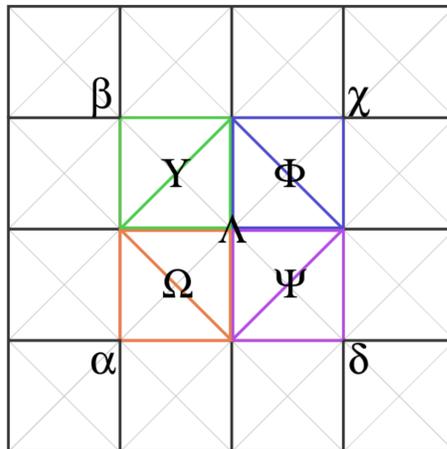


Рис. 3.10 – Укрупнение треугольников для барицентрических звезд Φ , Ψ и Ω .

После завершения обработки рассматриваемая на данной итерации единица укрупнения помечается как обработанная.

5. На последующих итерациях алгоритма обрабатываются единицы укрупнения, поставленные в очередь Q на предыдущих шагах: $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$ и $\tilde{\alpha}$. На рисунке 3.11 показан результат обработки всех представленных единиц укрупнения.

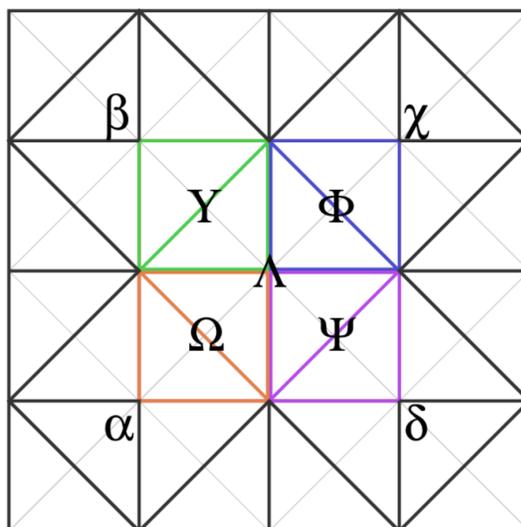


Рис. 3.11 – Результат обработки всех представленных единиц укрупнения.

6. Алгоритм завершается, как только в очереди Q не остается элементов для обработки.

Шаг 4: о результатах

Результатом работы программы являются таблицы инциденций укрупненных триангуляций для красной, зеленой и синей компонент цвета. Также была реализована возможность вывода результата в графический файл, построенный на аппроксимированных на значениях компонент цвета.

При запуске все файлы, находящиеся в директории *out_path* удаляются. В процессе работы программы для каждого обрабатываемого файла создается поддиректория с названием обрабатываемого файла, в которой создаются текстовые файлы с первоначальными и результирующими данными таблиц инциденций вершин и треугольников для каждой из компонент цвета обрабатываемого изображения. Кроме того, результат выводится в графический файл, который визуализируется на видеотерминале. Данные о количестве вершин и треугольников для исходной и укрупненной триангуляций всех файлов записываются в общий для

всех тестовых данных текстовый файл `summary.txt`.

Исходный код функций, выполняющих укрупнения триангуляции, представлен в листингах 1, 2 и 3 в приложении.

3.7. Результаты работы программы на модельных примерах

Разработанная программа была протестирована на множестве модельных примеров, здесь будут приведены результаты нескольких из них. В каждом тесте выполняется многократное локально-адаптивное укрупнения триангуляции. Укрупнения выполняются до тех пор, пока погрешность аппроксимации исходных данных, построенных на укрупненной сетке узлов не превысит априори заданного предельного значения погрешности ε_0 . На основе полученной аппроксимации выполняется построение модели исходного объекта.

В таблице 4.1 в первой колонке показано название теста, во второй — исходное изображение, в третьей — его аппроксимация, построенная на укрупненной триангуляции. Для определения погрешности вычисляется абсолютная величина разности между исходными значениями яркостей пикселей и построенным приближением к ним, а затем берется максимум по всем вершинам исходной триангуляции. В рассматриваемых тестах значение априори заданной верхней грани погрешности ε равно 20.

Название теста	Исходное изображение	Аппроксимация
Manet		
Lena		
Forest_august		

Таблица 3.4 – Аппроксимации тестовых данных при $\varepsilon = 20$

Таблица 18 характеризует степень уменьшения объема данных в различных тестовых примерах (а именно, для примеров Manet, Forest, Lena).

Название входного файла	Размер сетки	Исходное кол-во вершин	Вершин после укрупнения (%)	Исходное кол-во тр-в	Тр-в после укрупнения (%)
Manet	300 x 220	66000	11%	130962	10%
Forest_august	400 x 300	120000	99%	238602	99%
Lena	400 x 225	90000	34%	178752	33%

Таблица 3.5 – Результаты тестов

Как следует из представленных в таблице 18 результатов, лучше всего поддаются обработке данные, имеющие наиболее плавные цветовые переходы ².

В таблице 4.2 приведены аппроксимации теста Lena для различных значений указанной априори границы погрешности ϵ .

Верхняя граница погрешности ϵ	Аппроксимация
0	
40	

²Очевидно, что количество вершин связано с количеством треугольников триангуляции; в результатах мы приводим оба значения для наглядности.

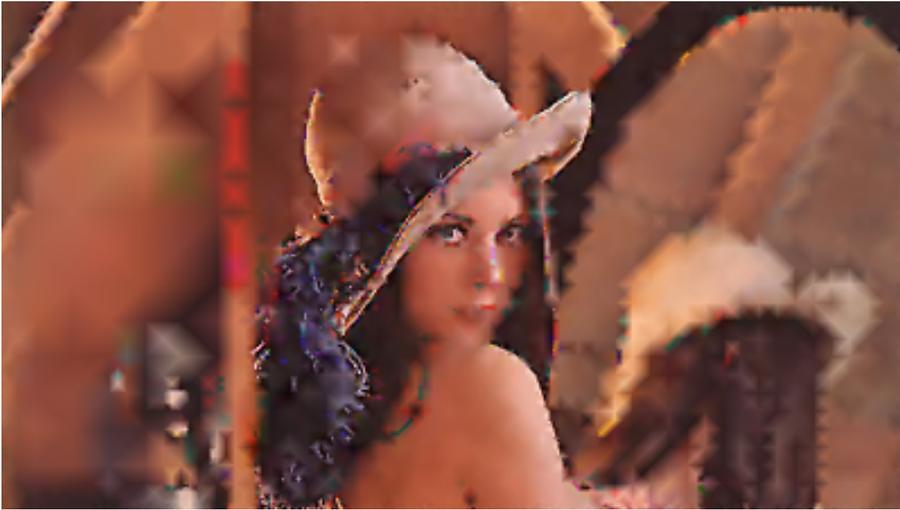
Верхняя граница погрешности ϵ	Аппроксимация
80	
120	

Таблица 3.6 – Аппроксимации набора данных Lena для различных значений погрешности ϵ

В таблице 3.7 показано относительное уменьшение объема информации для примеров, приведенных в таблицах 4.3.

Погрешность ε	Исходное кол-во вершин	Вершин после укрупнения (%%)	Исходное кол-во тр-в	Тр-в после укрупнения (%%)
20	90000	58%	37490	57%
40	90000	29%	178752	28%
80	90000	7%	178752	6%
120	90000	4%	178752	3%

Таблица 3.7 – Числовые характеристики аппроксимаций для различных значений ε в примере Lena

В таблицах 3.6 и 3.7 имеется две графы: в первой графе представлено максимальное числовое уклонение аппроксимирующего файла от исходного, а во второй графе представлено изображение, индуцированное аппроксимацией (при этом нулевому уклонению соответствует исходное изображение). Представленные в этих таблицах результаты демонстрируют, что в рассмотренном примере предлагаемый алгоритм позволяет исключить из рассмотрения до 29% процентов узлов при сохранении достаточного визуального качества аппроксимированных данных (для случая $\varepsilon = 40$). Задание большего ε приводит к существенной потере качества получаемой аппроксимации. Необходимо отметить, что область применения рассматриваемого алгоритма не ограничивается обработкой компьютерной графики; значения ε должны выбираться в соответствии с условиями решаемых задач.

На рисунке 3.12 приводится набор тестовых данных, в котором при обработке образовались 2 независимых области с укрупнениями триангуляции; рассматриваемый набор имеет размеры 16×16 . На рисунке 3.13 приведена карта укрупнения триангуляции: красным отмечены области набора данных (см. рисунок 3.12), подвергшиеся укрупнению; области, где укрупнение не проведено, отмечены черным. Числа на этой картинке показывают значение синей компоненты цвета в соответствующем пикселе; „-“ показывает, что узел был исключен из сетки при проведении укрупнения триангуляции. Обработке подвергаются только те области, в которых погрешность аппроксимированных на укрупненной триангуляции данных не превышает априори заданной верхней грани погрешности ε . Для простоты в данном тесте проводилось только одно укрупнение. Как показано на рисунке 3.13, при

Заключение

В данной главе дано описание выполненной автором компьютерной реализации алгоритма, предложенного в предыдущей главе. Приведены результаты тестирования программы на модельных примерах.

Заключение

В работе построена правильная триангуляция двумерной плоскости, допускающая проведение рекуррентных локальных укрупнений, а также рассмотрены вопросы построения сплайн-всплесковых разложений входного набора данных, заданного в вершинах триангуляции. На исходной триангуляции и на ее укрупнении выполняется построение пространств курантова типа³; доказываемся вложенность пространства, соответствующего укрупненной триангуляции, в пространство, соответствующее исходной триангуляции, и строится всплесковое разложение. Приводятся формулы реконструкции и декомпозиции; выводятся калибровочные соотношения для функций курантова типа. Рассматриваемый алгоритм применим не только к плоской области, но и к некоторым двумерным поверхностям: его можно использовать для аппроксимаций курантова типа в случае цилиндрической поверхности, тора и сферы.

Некоторые из существующих алгоритмов сжатия двумерных наборов данных (например, jpeg) используют преобразование Фурье; в этих алгоритмах реализуется сжатие с потерями. Сплайн-вэйвлетные алгоритмы, позволяющие организовать сжатие без потерь, используются в относительно новых алгоритмах сжатия графических данных, таких, например, как jpeg2000 и ICER.

Заметим, однако, что при обработке данных с помощью этих алгоритмов данные подвергаются чередующимся последовательностям вертикальных и горизонтальных одномерных вэйвлет-преобразований: сначала преобразуются все строки, а затем все столбцы (см. [34] и [47]). Из-за этого подхода оказывается затруднительным эффективный учет локальных особенности данных, имеющих существенно двумерный характер. Предлагаемый в данной работе метод лишен этого недо-

³В общем случае, нелинейных.

статка, так как использует двумерные вэйвлет-преобразования.

Предложенный метод применим не только для сжатия графической информации; его можно использовать при решении задач математического моделирования, связанных с двумерными данными: расчете карт высот, геологических и астрономических данных, поверхностей в аэро- и гидродинамике.

На основе предложенного подхода автором была разработана компьютерная программа, реализующая предложенный алгоритм укрупнения триангуляции; также выполняется построение модели (на основе курантовской аппроксимации) исходного двумерного потока данных. Проведена апробация реализованного алгоритма на модельных примерах.

Перечислим основные преимущества предлагаемого алгоритма:

1. предлагаемый метод не имеет выделенного направления; учитывается структура входных данных по двум направлениям одновременно, что позволяет эффективно обрабатывать данные, имеющие существенно двумерный характер;
2. использование вэйвлетного разложения позволяет полностью восстанавливать входной поток данных;
3. возможно масштабирование метода на большее число измерений.

Литература

- [1] Арсентьева Е. Г. *Вейвлет-сплайновая аппроксимация функций с особенностями* – диссертация, СПб, 2011.
- [2] Афонский А. А., Дьяконов В. П. *Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики* – Под ред. проф. В. П. Дьяконова. М.: СОЛОН-Пресс, 2009, 248 с., ISBN 978-5-913-59049-7.
- [3] Афонский А. А., Дьяконов В. П. *Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики* под ред. проф. Дьяконова В. П. – М.: СОЛОН-Пресс, 2009, 248 с.
- [4] Бекмуратов А. Т., Онопенко Г. А., Кудуев А. Ж., Шумилов Б. М., Эшаров Э. А. *Вейвлет-преобразование и сжатие данных лазерного сканирования автомобильных дорог* – Вестник ТГАСУ №4, 2011.
- [5] Бурова И. Г. *О базисных сплайнах шестого порядка аппроксимации различной гладкости* – Тр. СПИИРАН, 12 (2010), с. 182–199.
- [6] Бурова И. Г., Демьянович Ю. К. *Минимальные сплайны и их приложения* – Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010.
- [7] Витязев В. В. *Вейвлет-анализ временных рядов* – Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2001.
- [8] Воробьев В. И., Грибунин В. Г. *Теория и практика вейвлет-преобразования* – СПб:ВУС, 1999.
- [9] Гонсалес Р., Вудс Р. *Цифровая обработка изображений в среде Matlab* – Техносфера, 2006.

- [10] Демьянович Ю. К. *Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны* – Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 1994, 356 с.
- [11] Демьянович Ю. К. *Локальные аппроксимации на многообразии и минимальные сплайны* – Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 1994, 356 с.
- [12] Демьянович Ю. К. *Пространства минимальных сплайнов и калибровочные соотношения* – Труды конференции СПИСОК-2013. с. 185-189.
- [13] Демьянович Ю. К. *Сплайн-вэйвлетные разложения на многообразии* – Сб. Проблемы математического анализа, 2007, Т.36. с. 15-22.
- [14] Демьянович Ю. К. *Сплайн-вэйвлеты при однократном локальном укрупнении сетки* – Численные методы и вопросы организации вычислений. XXV, Посвящается памяти Веры Николаевны Кублановской, Зап. научн. сем. ПОМИ, 405, ПОМИ, СПб., 2012, с. 97–118.
- [15] Демьянович Ю. К., Зимин А. В. *Аппроксимации курантова типа и их вэйвлетные разложения* – Проблемы математического анализа, 2008, с. 3-22.
- [16] Демьянович Ю. К., Косогоров О. М. *О параллельном вэйвлетно-сплайновом сжатии на локально квазиравномерной сетке* – Труды симпозиума "Міжнародний симпозіум питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)". Кацивели, Крым, 23-28 сент., 2007, Киев, 2007, 92 с.
- [17] Демьянович Ю. К., Мирошниченко И. Д. *Гнездовые сплайн-вэйвлетные разложения* – Проблемы мат. анализа 64, 2012, с. 51-61.
- [18] Демьянович Ю. К., Романовский Л. М. *Локальное укрупнение триангуляции и двумерные сплайн-вэйвлеты* – Санкт-Петербург, ВВМ, 2012.
- [19] Демьянович Ю. К., Ходаковский В. А. *Введение в теорию вэйвлетов* – Курс лекций. - СПб.: Изд-во С.-Пб. ун-та, 2007.
- [20] Добеши И. *Десять лекций по вэйвлетам* – НИЦ 'Хаотическая и регулярная динамика', 2001.

- [21] Дьяконов В. П. *Вейвлеты. От теории к практике* – СОЛОН-Пресс, 2004.
- [22] Зорич В. А. *Математический анализ* – М.: Физматлит, 1984, 544 с.
- [23] Иванов М. А. *Применение вейвлет-преобразований в кодировании изображений* – Новые информационные технологии в науке и образовании. — Новосибирск: Ин-т систем информатики им. А.П. Ершова СОР АН, 2003, с. 157-176.
- [24] Канторович Л. В., Крылов В. И. *Приближенные методы высшего анализа* – 3-е издание, Государственное Изд-во технико-теоретической литературы, 1950.
- [25] Макаров А. А. *Матрицы реконструкции и декомпозиции для линейных сплайнов* – Труды СПИИРАН, 2011, Вып. 18.
- [26] Макаров А. А. *Некоторые сплайн-вейвлетные разложения на неравномерной сетке* – диссертация, СПб, 2007.
- [27] Максименко И. Е., Скопина М. А. *Многомерные периодические всплески* – Алгебра и анализ (2003), т. 15, №2. с. 1-39.
- [28] Максимов А. Ю., Строганов С. А. *О применении диадических вейвлетов для сжатия изображений* – Изд-во Саратов. ун-та, 2008, с. 108-109.
- [29] Малла С. *Вэйвлеты в обработке сигналов* – М., 2003.
- [30] Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. *Теория всплесков* – М., 2005.
- [31] Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. *Теория всплесков* – Физматлит, 2006.
- [32] Обидин М. В., Серебровский А. П. *Очистка сигнала от шумов с использованием вейвлет преобразования и фильтра Калмана* – Информационные процессы, Том 13, №3, 2013, с. 198–205.
- [33] Романовский Л. М. *Локальное укрупнение триангуляции и калибровочные соотношения* – Труды XLII Международной конференции аспирантов и студентов, Санкт-Петербург, 2011, с. 338-434.
- [34] Семенюк В. В. *Обзор стандарта JPEG2000*,

- [35] Сергиенко А. Б. *Цифровая обработка сигналов* – 2-е изд. — СПб.: Питер, 2006, 751 с.
- [36] Сергиенко А. Б. *Цифровая обработка сигналов* – Питер, 2006.
- [37] Скворцов А. В. *Триангуляция Делоне и её применение* – Издательство Томского университета, 2002.
- [38] Смоленцев Н. К. *Введение в теорию вейвлетов* – Ижевск:РХД, 2010.
- [39] Смоленцев Н. К. *Основы теории вейвлетов Вейвлеты в MATLAB* – ДМК, 2005.
- [40] Фарков Ю. А. *Функции Уолша и непрерывное вейвлет-преобразование* – Труды. - Ростов н/Д: Изд-во ЦВВР, 2008, с. 27-32.
- [41] Фарков Ю. А., Строганов С. А. *О дискретных диадических вейвлетах для обработки изображений* – Известия вузов. Математика, 2011, №7, с. 57–66.
- [42] Фарков Ю. А., Строганов С. А. *О дискретных диадических вейвлетах для обработки изображений* – Известия вузов, Математика, 2007, №7, с. 57-66.
- [43] Хардле В., Крекьячаряна Ж., Пикара Д., Цыбакова А. *Вэйвлеты, аппроксимация и статистические приложения* – перевод Алексева К.А., 2002.
- [44] Чуи К. *Введение в вэйвлеты* – Мир, 2007.
- [45] Штарк Г. Г. *Применение вейвлетов для ЦОС* – Техносфера, 2007.
- [46] Эммануил С. Айфичер, Барри У. Джервис *Цифровая обработка сигналов. Практический подход* – Вильямс, 2004.
- [47] A. Kiely, M. Klimesh *The ICER Progressive Wavelet Image Compressor* – IPN Progress Report 42-155, november 15, 2003.
- [48] Ahmet Artu Yildirim, Cem Ozdogan, *Parallel wavelet-based clustering algorithm on GPUs using CUDA* – WCIT, 2010.

- [49] D. Chaver, M. Prieto, L. Piñuel, F. Tirado *Parallel Wavelet Transform for Large Scale Image Processing* – Parallel and Distributed Processing Symposium., Proceedings International, IPDPS 2002.
- [50] Fourier *Théorie analytique de la chaleur* – 1822.
- [51] J. Lewalle *Введение в анализ данных с применением непрерывного вейвлет-преобразования* – пер. Грибунин В.Г., АВТЭКС, 1995.
- [52] Joaquín Franco, Gregorio Bernabé, Juan Fernández, Manuel E. Acacio *A Parallel Implementation of the 2D Wavelet Transform Using CUDA* – IEEE, 18-20 Feb. 2009, с. 111-118.
- [53] R.J.E. Merry *Wavelet Theory and Applications* – Eindhoven, 2005.

Приложение

I. Таблицы

Таблица 8 – Таблица инциденций вершин исходной триакнгуляции

0	(0, 0)	21	(2, 5)	42	(5, 2)
1	(0, 1)	22	(2, 6)	43	(5, 3)
2	(0, 2)	23	(2, 7)	44	(5, 4)
3	(0, 3)	24	(3, 0)	45	(5, 5)
4	(0, 4)	25	(3, 1)	46	(5, 6)
5	(0, 5)	26	(3, 2)	47	(5, 7)
6	(0, 6)	27	(3, 3)	48	(6, 0)
7	(0, 7)	28	(3, 4)	49	(6, 1)
8	(1, 0)	29	(3, 5)	50	(6, 2)
9	(1, 1)	30	(3, 6)	51	(6, 3)
10	(1, 2)	31	(3, 7)	52	(6, 4)
11	(1, 3)	32	(4, 0)	53	(6, 5)
12	(1, 4)	33	(4, 1)	54	(6, 6)
13	(1, 5)	34	(4, 2)	55	(6, 7)
14	(1, 6)	35	(4, 3)	56	(7, 0)
15	(1, 7)	36	(4, 4)	57	(7, 1)
16	(2, 0)	37	(4, 5)	58	(7, 2)
17	(2, 1)	38	(4, 6)	59	(7, 3)
18	(2, 2)	39	(4, 7)	60	(7, 4)
19	(2, 3)	40	(5, 0)	61	(7, 5)
20	(2, 4)	41	(5, 1)	62	(7, 6)
				63	(7, 7)

Таблица 9 – Таблица инциденций треугольников исходной триангуляции

0	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	24	(2, 5)	(2, 6)	(1, 5)
---	----------	----------	----------	----	----------	----------	----------

1	(0, 0)	(0, 1)	(1, 1)
2	(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)
3	(0, 2)	(1, 1)	(1, 2)
4	(0, 2)	(1, 2)	(1, 3)
5	(0, 2)	(0, 3)	(1, 3)
6	(0, 3)	(0, 4)	(1, 3)
7	(0, 4)	(1, 3)	(1, 4)
8	(0, 4)	(1, 4)	(1, 5)
9	(0, 4)	(0, 5)	(1, 5)
10	(0, 5)	(0, 6)	(1, 5)
11	(0, 6)	(1, 5)	(1, 6)
12	(0, 6)	(1, 6)	(1, 7)
13	(0, 6)	(0, 7)	(1, 7)
14	(2, 0)	(1, 0)	(1, 1)
15	(2, 1)	(2, 0)	(1, 1)
17	(2, 2)	(1, 1)	(1, 2)
16	(2, 1)	(2, 2)	(1, 1)
19	(2, 3)	(2, 2)	(1, 3)
18	(2, 2)	(1, 2)	(1, 3)
21	(2, 4)	(1, 3)	(1, 4)
20	(2, 3)	(2, 4)	(1, 3)
23	(2, 5)	(2, 4)	(1, 5)
22	(2, 4)	(1, 4)	(1, 5)
25	(2, 6)	(1, 5)	(1, 6)
49	(4, 4)	(3, 3)	(3, 4)
48	(4, 3)	(4, 4)	(3, 3)
55	(4, 6)	(4, 7)	(3, 7)
54	(4, 6)	(3, 7)	(3, 6)
53	(4, 6)	(3, 5)	(3, 6)

27	(2, 7)	(2, 6)	(1, 7)
26	(2, 6)	(1, 6)	(1, 7)
29	(2, 1)	(2, 0)	(3, 1)
28	(2, 0)	(3, 1)	(3, 0)
31	(2, 2)	(3, 1)	(3, 2)
30	(2, 1)	(2, 2)	(3, 1)
34	(2, 3)	(2, 4)	(3, 3)
35	(2, 4)	(3, 3)	(3, 4)
32	(2, 2)	(3, 3)	(3, 2)
33	(2, 3)	(2, 2)	(3, 3)
38	(2, 5)	(2, 6)	(3, 5)
39	(2, 6)	(3, 5)	(3, 6)
36	(2, 4)	(3, 5)	(3, 4)
37	(2, 5)	(2, 4)	(3, 5)
42	(4, 0)	(3, 1)	(3, 0)
43	(4, 0)	(4, 1)	(3, 1)
40	(2, 6)	(3, 7)	(3, 6)
41	(2, 7)	(2, 6)	(3, 7)
46	(4, 2)	(3, 3)	(3, 2)
47	(4, 2)	(4, 3)	(3, 3)
44	(4, 2)	(4, 1)	(3, 1)
45	(4, 2)	(3, 1)	(3, 2)
51	(4, 4)	(4, 5)	(3, 5)
50	(4, 4)	(3, 5)	(3, 4)
78	(6, 4)	(5, 4)	(5, 5)
79	(6, 5)	(6, 4)	(5, 5)
72	(6, 2)	(6, 1)	(5, 1)
73	(6, 2)	(5, 2)	(5, 1)
74	(6, 2)	(5, 2)	(5, 3)

52	(4, 6)	(4, 5)	(3, 5)
59	(4, 2)	(5, 2)	(5, 1)
58	(4, 2)	(4, 1)	(5, 1)
57	(4, 0)	(4, 1)	(5, 1)
56	(4, 0)	(5, 0)	(5, 1)
63	(4, 4)	(5, 3)	(5, 4)
62	(4, 3)	(4, 4)	(5, 3)
61	(4, 2)	(4, 3)	(5, 3)
60	(4, 2)	(5, 2)	(5, 3)
68	(4, 6)	(5, 6)	(5, 7)
69	(4, 6)	(4, 7)	(5, 7)
70	(6, 0)	(5, 0)	(5, 1)
71	(6, 1)	(6, 0)	(5, 1)
64	(4, 4)	(5, 4)	(5, 5)
65	(4, 4)	(4, 5)	(5, 5)
66	(4, 6)	(4, 5)	(5, 5)
67	(4, 6)	(5, 6)	(5, 5)
76	(6, 3)	(6, 4)	(5, 3)
77	(6, 4)	(5, 3)	(5, 4)

75	(6, 3)	(6, 2)	(5, 3)
85	(6, 1)	(6, 0)	(7, 1)
84	(6, 0)	(7, 1)	(7, 0)
87	(6, 2)	(7, 2)	(7, 1)
86	(6, 2)	(6, 1)	(7, 1)
81	(6, 6)	(5, 6)	(5, 5)
80	(6, 6)	(6, 5)	(5, 5)
83	(6, 7)	(6, 6)	(5, 7)
82	(6, 6)	(5, 6)	(5, 7)
93	(6, 5)	(6, 4)	(7, 5)
92	(6, 4)	(7, 5)	(7, 4)
95	(6, 6)	(7, 6)	(7, 5)
94	(6, 6)	(6, 5)	(7, 5)
89	(6, 3)	(6, 2)	(7, 3)
88	(6, 2)	(7, 3)	(7, 2)
91	(6, 4)	(7, 3)	(7, 4)
90	(6, 3)	(6, 4)	(7, 3)
96	(6, 6)	(7, 7)	(7, 6)
97	(6, 7)	(6, 6)	(7, 7)

Таблица 10 – Таблица инцидентий вершин после первого укрупнения

0	(0, 0)	23	(5, 1)
1	(1, 0)	24	(5, 7)
2	(1, 1)	25	(6, 0)
3	(0, 1)	26	(7, 1)
4	(0, 2)	27	(7, 0)
5	(0, 3)	28	(6, 7)
6	(1, 3)	29	(6, 6)
7	(0, 4)	30	(6, 2)
8	(0, 5)	31	(7, 2)
9	(1, 5)	32	(7, 6)
10	(0, 6)	33	(7, 5)
11	(0, 7)	34	(6, 4)
12	(1, 7)	35	(7, 4)
13	(2, 0)	36	(7, 3)
14	(2, 7)	37	(7, 7)
15	(2, 6)	38	(4, 2)
16	(3, 1)	39	(3, 3)
17	(3, 0)	40	(2, 2)
18	(4, 0)	41	(2, 4)
19	(3, 7)	42	(3, 5)
20	(4, 6)	43	(4, 4)
21	(4, 7)	44	(5, 5)
22	(5, 0)	45	(5, 3)

Таблица 11 – Таблица инциденций треугольников после первого укрупнения

0	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	24	(6, 6)	(7, 6)	(7, 7)
1	(0, 0)	(1, 1)	(0, 1)	27	(4, 2)	(3, 3)	(3, 1)
2	(0, 2)	(1, 1)	(0, 1)	26	(3, 3)	(3, 1)	(2, 2)
3	(0, 2)	(0, 3)	(1, 3)	29	(2, 0)	(3, 1)	(1, 1)
4	(0, 3)	(1, 3)	(0, 4)	28	(3, 1)	(2, 2)	(1, 1)
5	(0, 5)	(1, 5)	(0, 4)	31	(3, 3)	(1, 3)	(2, 4)
6	(0, 5)	(1, 5)	(0, 6)	30	(3, 3)	(2, 2)	(1, 3)
7	(1, 7)	(0, 6)	(0, 7)	34	(3, 5)	(3, 3)	(2, 4)
8	(1, 0)	(2, 0)	(1, 1)	35	(3, 5)	(3, 3)	(4, 4)
9	(1, 7)	(2, 7)	(2, 6)	32	(1, 3)	(2, 2)	(1, 1)
10	(3, 0)	(3, 1)	(2, 0)	33	(0, 2)	(1, 3)	(1, 1)
11	(3, 0)	(3, 1)	(4, 0)	38	(1, 5)	(1, 3)	(2, 4)
12	(3, 7)	(2, 7)	(2, 6)	39	(1, 5)	(1, 3)	(0, 4)
13	(4, 7)	(4, 6)	(3, 7)	36	(3, 5)	(1, 5)	(2, 4)
14	(5, 1)	(5, 0)	(4, 0)	37	(3, 5)	(1, 5)	(2, 6)
15	(4, 7)	(5, 7)	(4, 6)	42	(3, 5)	(4, 6)	(3, 7)
17	(6, 0)	(7, 0)	(7, 1)	43	(3, 5)	(3, 7)	(2, 6)
16	(6, 0)	(5, 1)	(5, 0)	40	(1, 7)	(1, 5)	(2, 6)
19	(6, 6)	(5, 7)	(6, 7)	41	(1, 7)	(1, 5)	(0, 6)
18	(7, 2)	(7, 1)	(6, 2)	46	(3, 5)	(4, 4)	(5, 5)
21	(6, 6)	(7, 6)	(7, 5)	47	(3, 5)	(4, 6)	(5, 5)
20	(6, 4)	(7, 4)	(7, 5)	44	(6, 6)	(5, 7)	(5, 5)
23	(6, 4)	(7, 4)	(7, 3)	45	(5, 7)	(4, 6)	(5, 5)
22	(7, 2)	(7, 3)	(6, 2)	51	(3, 3)	(4, 4)	(5, 3)
25	(6, 6)	(6, 7)	(7, 7)	50	(4, 2)	(3, 3)	(5, 3)
49	(4, 4)	(5, 5)	(5, 3)	59	(6, 6)	(5, 5)	(7, 5)
48	(6, 4)	(5, 5)	(5, 3)	58	(6, 4)	(5, 5)	(7, 5)
55	(4, 2)	(3, 1)	(5, 1)	57	(7, 3)	(5, 3)	(6, 2)

54	(3, 1)	(5, 1)	(4, 0)
53	(4, 2)	(5, 1)	(5, 3)
52	(5, 1)	(5, 3)	(6, 2)

56	(6, 4)	(7, 3)	(5, 3)
61	(6, 0)	(5, 1)	(7, 1)
60	(5, 1)	(7, 1)	(6, 2)

Таблица 12 – Таблица инцидентий вершин после второго укрупнения

0	(0, 0)	21	(4, 7)
1	(1, 0)	22	(5, 0)
2	(1, 1)	23	(5, 1)
3	(0, 1)	24	(5, 7)
4	(0, 2)	25	(6, 0)
5	(0, 3)	26	(7, 1)
6	(1, 3)	27	(7, 0)
7	(0, 4)	28	(6, 7)
8	(0, 5)	29	(6, 6)
9	(1, 5)	30	(6, 2)
10	(0, 6)	31	(7, 2)
11	(0, 7)	32	(7, 6)
12	(1, 7)	33	(7, 5)
13	(2, 0)	34	(6, 4)
14	(2, 7)	35	(7, 4)
15	(2, 6)	36	(7, 3)
16	(3, 1)	37	(7, 7)
17	(3, 0)	38	(5, 3)
18	(4, 0)	39	(5, 5)
19	(3, 7)	40	(3, 5)
20	(4, 6)	41	(3, 3)

Таблица 13 – Таблица инциденций треугольников после второго укрупнения

0	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	26	(2, 0)	(3, 1)	(1, 1)
1	(0, 0)	(1, 1)	(0, 1)	29	(5, 3)	(5, 1)	(6, 2)
2	(0, 2)	(1, 1)	(0, 1)	28	(3, 1)	(5, 1)	(4, 0)
3	(0, 2)	(0, 3)	(1, 3)	31	(6, 4)	(5, 3)	(7, 3)
4	(0, 3)	(1, 3)	(0, 4)	30	(5, 3)	(7, 3)	(6, 2)
5	(0, 5)	(1, 5)	(0, 4)	34	(6, 4)	(5, 3)	(5, 5)
6	(0, 5)	(1, 5)	(0, 6)	35	(6, 6)	(5, 5)	(7, 5)
7	(1, 7)	(0, 6)	(0, 7)	32	(6, 0)	(5, 1)	(7, 1)
8	(1, 0)	(2, 0)	(1, 1)	33	(5, 1)	(7, 1)	(6, 2)
9	(1, 7)	(2, 7)	(2, 6)	38	(6, 6)	(5, 5)	(5, 7)
10	(3, 0)	(3, 1)	(2, 0)	39	(3, 7)	(3, 5)	(2, 6)
11	(3, 0)	(3, 1)	(4, 0)	36	(6, 4)	(5, 5)	(7, 5)
12	(3, 7)	(2, 7)	(2, 6)	37	(5, 5)	(5, 7)	(4, 6)
13	(4, 7)	(4, 6)	(3, 7)	42	(1, 5)	(1, 3)	(0, 4)
14	(5, 1)	(5, 0)	(4, 0)	43	(1, 7)	(1, 5)	(2, 6)
15	(4, 7)	(5, 7)	(4, 6)	40	(4, 6)	(3, 7)	(3, 5)
17	(6, 0)	(7, 0)	(7, 1)	41	(5, 5)	(4, 6)	(3, 5)
16	(6, 0)	(5, 1)	(5, 0)	46	(3, 1)	(1, 3)	(3, 3)
19	(6, 6)	(5, 7)	(6, 7)	47	(3, 1)	(1, 3)	(1, 1)
18	(7, 2)	(7, 1)	(6, 2)	44	(1, 7)	(1, 5)	(0, 6)
21	(6, 6)	(7, 6)	(7, 5)	45	(1, 5)	(3, 5)	(2, 6)
20	(6, 4)	(7, 4)	(7, 5)	51	(5, 3)	(5, 5)	(3, 5)
23	(6, 4)	(7, 4)	(7, 3)	50	(5, 3)	(3, 5)	(3, 3)
22	(7, 2)	(7, 3)	(6, 2)	49	(5, 3)	(3, 1)	(5, 1)
25	(6, 6)	(6, 7)	(7, 7)	48	(5, 3)	(3, 1)	(3, 3)
24	(6, 6)	(7, 6)	(7, 7)	53	(1, 5)	(1, 3)	(3, 5)
27	(0, 2)	(1, 3)	(1, 1)	52	(1, 3)	(3, 5)	(3, 3)

Таблица 14 – Таблица инцидентий исходной триангуляции

index	vertice 0	vertice 1	vertice 2
0	0	2	12
1	2	24	12
2	24	22	12
3	22	0	12
4	2	4	14
5	4	26	14
6	26	24	14
7	24	2	14
8	4	6	16
9	6	28	16
10	28	26	16
11	26	4	16
12	6	8	18
13	8	30	18
14	30	28	18
15	28	6	18
16	8	10	20
17	10	32	20
18	32	30	20
19	30	8	20
20	22	24	34
21	24	46	34
22	46	44	34
23	44	22	34
24	24	26	36
25	26	48	36

26	48	46	36
27	46	24	36
28	26	28	38
29	28	50	38
30	50	48	38
31	48	26	38
32	28	30	40
33	30	52	40
34	52	50	40
35	50	28	40
36	30	32	42
37	32	54	42
38	54	52	42
39	52	30	42
40	44	46	56
41	46	68	56
42	68	66	56
43	66	44	56
44	46	48	58
45	48	70	58
46	70	68	58
47	68	46	58
48	48	50	60
49	50	72	60
50	72	70	60
51	70	48	60
52	50	52	62
53	52	74	62
54	74	72	62

55	72	50	62
56	52	54	64
57	54	76	64
58	76	74	64
59	74	52	64
60	66	68	78
61	68	90	78
62	90	88	78
63	88	66	78
64	68	70	80
65	70	92	80
66	92	90	80
67	90	68	80
68	70	72	82
69	72	94	82
70	94	92	82
71	92	70	82
72	72	74	84
73	74	96	84
74	96	94	84
75	94	72	84
76	74	76	86
77	76	98	86
78	98	96	86
79	96	74	86
80	88	90	100
81	90	112	100
82	112	110	100
83	110	88	100

84	90	92	102
85	92	114	102
86	114	112	102
87	112	90	102
88	92	94	104
89	94	116	104
90	116	114	104
91	114	92	104
92	94	96	106
93	96	118	106
94	118	116	106
95	116	94	106
96	96	98	108
97	98	120	108
98	120	118	108
99	118	96	108

Таблица 15 – Таблица инциденций укрупненной триангуляции

index	vertice 0	vertice 1	vertice 2
0	0	2	22
1	2	22	24
2	2	4	26
3	2	26	24
4	4	6	26
5	6	26	28
6	6	8	30
7	6	30	28

8	8	10	30
9	10	30	32
10	22	24	46
11	22	46	44
12	24	26	46
13	26	46	48
14	26	28	50
15	26	50	48
16	28	30	50
17	30	50	52
18	30	32	54
19	30	54	52
20	44	46	66
21	46	66	68
22	46	48	70
23	46	70	68
24	48	50	70
25	50	70	72
26	50	52	74
27	50	74	72
28	52	54	74
29	54	74	76
30	66	68	90
31	66	90	88
32	68	70	90
33	70	90	92
34	70	72	94
35	70	94	92
36	72	74	94

37	74	94	96
38	74	76	98
39	74	98	96
40	88	90	110
41	90	110	112
42	90	92	114
43	90	114	112
44	92	94	114
45	94	114	116
46	94	96	118
47	94	118	116
48	96	98	118
49	98	118	120

II. Результаты работы программы на модельных примерах

Таблица 16 – $\epsilon = 0.1$

Название входного файла	Размер сетки	Исходное кол-во вершин	Вершин после укрупнения (%%)	Исходное кол-во тр-в	Тр-в после укрупнения (%%)
manet1	300 x 220	66000	76%	130962	76%
mane2	600 x 400	240000	74%	478002	73%
nelina	500 x 400	200000	99%	398202	99%
p_forest_august	400 x 300	120000	99%	238602	99%
p_forest_light	400 x 300	120000	100%	238602	100%
p_forest_road	400 x 225	90000	99%	178752	99%
p_lena	400 x 225	90000	99%	178752	99%
s_scaled_01	8 x 8	64	78%	98	71%
s_scaled_02	16 x 16	256	69%	450	65%
s_scaled_03	32 x 32	1024	44%	1922	40%
s_scaled_04	64 x 64	4096	27%	7938	25%
s_scaled_05	128 x 128	16384	20%	32258	19%
s_scaled_06	256 x 256	65536	16%	130050	15%
s_scaled_07	512 x 512	262144	14%	522242	14%

Таблица 17 – eps = 0.3

Название входного файла	Размер сетки	Исходное кол-во вершин	Вершин после укрупнения (%%)	Исходное кол-во тр-в	Тр-в после укрупнения (%%)
manet1	300 x 220	66000	76%	130962	76%
mane2	600 x 400	240000	74%	478002	73%
nelina	500 x 400	200000	99%	398202	99%
p_forest_august	400 x 300	120000	99%	238602	99%
p_forest_light	400 x 300	120000	100%	238602	100%
p_forest_road	400 x 225	90000	99%	178752	99%
p_lena	400 x 225	90000	99%	178752	99%
s_scaled_01	8 x 8	64	78%	98	71%
s_scaled_02	16 x 16	256	69%	450	65%
s_scaled_03	32 x 32	1024	44%	1922	40%
s_scaled_04	64 x 64	4096	27%	7938	25%
s_scaled_05	128 x 128	16384	20%	32258	19%
s_scaled_06	256 x 256	65536	16%	130050	15%
s_scaled_07	512 x 512	262144	14%	522242	14%

Таблица 18 – eps = 0.5

Название входного файла	Размер сетки	Исходное кол-во вершин	Вершин после укрупнения (%%)	Исходное кол-во тр-в	Тр-в после укрупнения (%%)
manet1	300 x 220	66000	76%	130962	76%
mane2	600 x 400	240000	74%	478002	73%
nelina	500 x 400	200000	99%	398202	99%
p_forest_august	400 x 300	120000	99%	238602	99%
p_forest_light	400 x 300	120000	100%	238602	100%
p_forest_road	400 x 225	90000	99%	178752	99%
p_lena	400 x 225	90000	99%	178752	99%
s_scaled_01	8 x 8	64	78%	98	71%
s_scaled_02	16 x 16	256	69%	450	65%
s_scaled_03	32 x 32	1024	44%	1922	40%
s_scaled_04	64 x 64	4096	27%	7938	25%
s_scaled_05	128 x 128	16384	20%	32258	19%
s_scaled_06	256 x 256	65536	16%	130050	15%
s_scaled_07	512 x 512	262144	14%	522242	14%

255	255	255	255	255	255	255	36	255	255	255	255	255	255	255	
255	255	-1	255	-1	255	255	36	255	255	-1	255	-1	255	-1	255
255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	255
255	255	-1	255	-1	255	255	36	255	255	-1	255	-1	255	-1	255
255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	255
255	255	-1	255	-1	255	255	36	255	255	-1	255	-1	255	-1	255
255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	255
255	255	-1	255	-1	255	255	36	255	255	-1	255	-1	255	-1	255
255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	255
255	255	-1	255	-1	255	255	36	255	255	-1	255	-1	255	-1	255
255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	255
255	255	-1	255	-1	255	255	36	255	255	-1	255	-1	255	-1	255
255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	255
255	255	-1	255	-1	255	255	36	255	255	-1	255	-1	255	-1	255
255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	255
255	255	-1	255	-1	255	255	36	255	255	-1	255	-1	255	-1	255
255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	-1	255	255
255	255	255	255	255	255	255	36	255	255	255	255	255	255	255	255

Таблица 19 – Таблица значений синей компоненты цвета для теста cutSample; значение -1 показывает, что вершина была исключена из триангуляции.

III. Исходные коды компьютерных программ

Listing 1 – Метод `TriangulationEnlargementFactory.processEnlargement`

```
1 public static TrianglesData processEnlargement(  
2     Triangulation triangulation  
3 ) {  
4     System.out.println( "void processEnlargement started" );  
5     HashMap<Integer, Triangle> trs = triangulation.getTrianglesData().get( triangulation.  
6         getEnlargementNum() ).getTriangles();  
7     System.out.println( "Source triangles count : " + trs.size() );  
8  
9     final Vertice [] vertices = triangulation.getVerticesData().getVertices();  
10  
11     int [][] originalValues = triangulation.originalValues;  
12  
13     System.out.println( "Preparing helper mappings" );  
14     HelperMappings helpersMappings = new HelperMappings(  
15         vertices ,  
16         trs  
17     );  
18  
19     LinkedList<Integer> queue = new LinkedList<Integer>();  
20     HashMap<Integer, Triangle> enlargedTriangles = new HashMap<Integer, Triangle>();  
21  
22     // select first vertex (randomly)  
23     queue.add( selectFirstRandomVidx( helpersMappings ) );  
24  
25     // process enlargement, while queue not empty  
26     while ( queue.size() > 0 )  
27     {  
28         enlargeSquaresGroup(  
29             queue.poll(),  
30             trs ,  
31             enlargedTriangles ,  
32             helpersMappings ,  
33             queue ,  
34             vertices ,  
35             originalValues  
36         );  
37     } // end of while  
38  
39     System.out.println( "Source triangles count : " + trs.size() );  
40     System.out.println( "Enlarged triangles count : " + enlargedTriangles.size() );  
41     System.out.println( "void processEnlargement finished\n" );  
42     return new TrianglesData( enlargedTriangles );  
43 } // end of void processEnlargement
```

Listing 2 – Метод `TriangulationEnlargementFactory.enlargeSquaresGroup`

```
1 private static void enlargeSquaresGroup(  
2     final Integer centralVidx ,  
3     HashMap<Integer, Triangle> sourceTriangles ,  
4     HashMap<Integer, Triangle> enlargedTriangles ,  
5     HelperMappings helpersMappings ,  
6     LinkedList<Integer> queue ,  
7     final Vertice [] vertices ,  
8     int [][] originalValues  
9 ) {  
10     HashSet<Square> squares = helpersMappings.squaresByVidxMap.get( centralVidx );  
11     if ( squares == null )
```

```

12     return;
13
14     // process all squares for group
15     for ( Square sq : squares )
16     {
17         if ( sq.isEnlarged() )
18             continue;
19
20         Integer outwardVidx = Square.enlarge(
21             sq,
22             centralVidx,
23             sourceTriangles,
24             enlargedTriangles,
25             vertices,
26             originalValues
27         );
28         if ( outwardVidx == -1 )
29             continue;
30
31         // add to queue
32         queue.push( outwardVidx );
33
34         // delete small triangles, which were enlarged
35         HashSet<Integer> tidxes = Square.getTriangles( sq );
36         for ( Integer tidx : tidxes )
37             sourceTriangles.remove( tidx );
38     } // end of for Square
39
40     // remove square from mapping
41     helpersMappings.squaresByVidxMap.remove( centralVidx );
42 } // end of void enlargeForSquaresGroup

```

Listing 3 – Метод Square.enlarge

```

1  public static Integer enlarge(
2      Square sq,
3      final Integer oneSideVidx,
4      final HashMap<Integer, Triangle> sourceTriangles,
5      final HashMap<Integer, Triangle> enlargedTrs,
6      Vertice [] vertices,
7      int [][] originalValues
8  ) {
9      HashSet<Integer> sqTrs = sq.sq;
10
11     final Integer sqaureCentralVidx = sq.vidx;
12     final Vertice sqaureCentralVertice = vertices[sqaureCentralVidx];
13
14     HashSet<Triangle> group0 = new HashSet<Triangle>(2);
15     HashSet<Triangle> group1 = new HashSet<Triangle>(2);
16     HashSet<Integer> g0vs = new HashSet<Integer>(4);
17     HashSet<Integer> g1vs = new HashSet<Integer>(4);
18
19     for ( Integer tidx : sqTrs ) {
20         Triangle tr = sourceTriangles.get( tidx );
21         HashSet<Integer> vs = Triangle.getVerteces( tr );
22         if ( vs.contains( oneSideVidx ) ) {
23             group0.add( tr );
24             g0vs.addAll( vs );
25         } else {
26             group1.add( tr );
27             g1vs.addAll( vs );

```

```

28     }
29 }
30
31 g0vs.remove( sqaureCentralVidx );
32 g1vs.remove( sqaureCentralVidx );
33
34 HashSet<Integer> newG0vs = new HashSet<Integer>(3);
35 HashSet<Integer> newG1vs = new HashSet<Integer>(3);
36 newG0vs.addAll( g0vs );
37 newG1vs.addAll( g1vs );
38
39 if ( newG0vs.size() != 3 || newG1vs.size() != 3 )
40     System.out.println( "Smth strange happens..." );
41
42 Triangle tr0 = Triangle.create( newG0vs );
43 Triangle tr1 = Triangle.create( newG1vs );
44
45     /*boolean passCheck = ErrorChecker.check(
46         sqaureCentralVertice ,
47         tr0 ,
48         vertices
49     );*/
50     boolean passCheck = ErrorChecker.checkByOriginalValue(
51         sqaureCentralVertice ,
52         tr0 ,
53         vertices ,
54         originalValues
55     );
56     //System.out.println( "Check result : " + passCheck );
57     if ( !passCheck ) {
58         return -1;
59     }
60
61     enlargedTrs.put( enlargedTrs.size(), tr0 );
62     enlargedTrs.put( enlargedTrs.size(), tr1 );
63
64     // get outward vertices
65     g1vs.removeAll( g0vs );
66     sq.setEnlarged( true );
67
68     return g1vs.iterator().next();
69 } // end of void enlarge

```