

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Гулицкий Николай Михайлович

РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ  
ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА И МАГНИТНОЙ  
ГИДРОДИНАМИКИ

01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель  
доктор физико–математических наук  
Антонов Н. В.

Санкт–Петербург — 2014

## Оглавление

<b>Введение</b>		<b>8</b>
<b>1</b>	<b>Модель Крейчнана и стохастические дифференциальные уравнения переноса пассивного поля</b>	<b>18</b>
1.1	Введение . . . . .	18
1.2	Изотропная модель Крейчнана . . . . .	20
1.3	Стохастическое уравнение переноса векторного поля . . . . .	22
1.4	Анизотропная модель Крейчнана . . . . .	24
1.5	Стохастическое уравнение Навье–Стокса . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Квантово–полевая формулировка моделей, УФ–расходимости и уравнение Дайсона</b>	<b>27</b>
2.1	Функционал действия $S$ . . . . .	27
2.2	Перенос пассивного векторного поля сильно анизотропным полем скорости (модель №1) . . . . .	28
2.2.1	Постановка задачи . . . . .	28
2.2.2	Квантово–полевая формулировка . . . . .	30
2.2.3	Канонические размерности . . . . .	33
2.2.4	Уравнение Дайсона . . . . .	37
2.3	МГД модель Крейчнана (модель №2) . . . . .	41
2.3.1	Постановка задачи. Функционал, диаграммная техника	41

2.3.2	Канонические размерности . . . . .	43
2.3.3	Уравнение Дайсона . . . . .	44
2.4	Перенос пассивного векторного поля полем скорости, подчиняющимся стохастическому уравнению Навье–Стокса (модель №3) . . . . .	49
2.4.1	Постановка задачи . . . . .	49
2.4.2	Квантово–полевая формулировка . . . . .	50
2.4.3	Канонические размерности . . . . .	53
2.4.4	Уравнение Дайсона для функции $\langle v'_\alpha v_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$ . . . . .	56
2.4.5	Уравнение Дайсона для функции $\langle \theta'_\alpha \theta_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$ . . . . .	59
2.4.6	Вычисление расходящейся части диаграммы $\langle \theta'_\alpha \theta_\gamma v_\beta \rangle$ . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Ренормировка моделей</b>	<b>66</b>
3.1	Модель №1 . . . . .	66
3.1.1	Уравнение РГ. $\beta$ - и $\gamma$ -функции. . . . .	66
3.1.2	ИК–притягивающая неподвижная точка . . . . .	69
3.1.3	Критические размерности . . . . .	70
3.1.4	Уравнение Дайсона и точные выражения для пропагаторов . . . . .	72
3.2	Модель №2 . . . . .	75
3.2.1	Уравнение РГ. $\beta$ - и $\gamma$ -функции . . . . .	75
3.2.2	ИК–притягивающая неподвижная точка . . . . .	77
3.2.3	Критические размерности . . . . .	78
3.3	Модель №3 . . . . .	79

3.3.1	Стохастическое уравнение Навье–Стокса. Ренормировка параметра $\nu_0$ . . . . .	79
3.3.1.1	Уравнение РГ. $\beta$ - и $\gamma$ -функции . . . . .	79
3.3.1.2	ИК–притягивающая неподвижная точка . . . . .	81
3.3.1.3	Критические размерности . . . . .	82
3.3.2	Ренормировка параметра $\mathcal{A}_0$ . . . . .	83
3.3.3	Стохастическое уравнение конвекции–диффузии. Ренормировка параметра $\kappa_0$ . . . . .	84
3.3.3.1	Уравнение РГ. $\beta$ - и $\gamma$ -функции . . . . .	84
3.3.3.2	ИК–притягивающая неподвижная точка . . . . .	86
3.3.3.3	Критические размерности . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Ренормировка составных операторов. Модель №1</b>	<b>89</b>
4.1	Критические размерности составных операторов . . . . .	89
4.1.1	Общая схема . . . . .	89
4.1.2	Однопетлевая диаграмма . . . . .	90
4.1.3	Многочетлевые диаграммы . . . . .	92
4.1.4	Аномальные размерности . . . . .	93
4.1.5	Матрица критических размерностей и ее собственные значения . . . . .	96
4.1.6	Асимптотика среднего значения оператора $F_{N,p}$ . . . . .	99
4.2	Асимптотика корреляционной функции $G = \langle F_1 F_2 \rangle$ . . . . .	102
4.3	Операторное разложение и асимптотика инерционного интервала . . . . .	109
4.4	Нильпотентность матрицы аномальных размерностей . . . . .	111

4.4.1	Определения и цели . . . . .	112
4.4.2	Основная идея . . . . .	115
4.4.3	Явный вид матрицы $U_N$ . . . . .	118
4.4.4	Доказательство . . . . .	119
4.4.4.1	Столбец №1 ( $\mathcal{C} = 0$ ) . . . . .	120
4.4.4.2	Столбец №2 ( $\mathcal{C} = 1$ ) . . . . .	120
4.4.4.3	Три нижние диагонали . . . . .	123
4.4.4.4	Все остальные элементы . . . . .	126
4.4.5	Заключение . . . . .	130
<b>5</b>	<b>Ренормировка составных операторов. Модели №2 и №3</b>	<b>131</b>
5.1	Аномальный скейлинг для корреляционных функций в инерционном интервале, составные операторы и операторное разложение . . . . .	131
5.2	Скаляризация диаграмм . . . . .	133
5.3	Модель №2 . . . . .	137
5.3.1	Однопетлевая диаграмма . . . . .	138
5.3.2	Двухпетлевые диаграммы . . . . .	140
5.3.3	Аномальная размерность $\gamma_{F_N, l}^*$ . . . . .	150
5.3.4	Сравнение результатов с точным решением в частном случае парной корреляционной функции . . . . .	153
5.4	Модель №3 . . . . .	154
5.4.1	Аномальный скейлинг и аномальные показатели в однопетлевом приближении . . . . .	154
	<b>Основные результаты и выводы</b>	<b>159</b>

<b>А</b>	<b>Приложения к Главе 1</b>	<b>163</b>
А.1	Галилеева инвариантность и ее следствия . . . . .	163
А.1.1	Галилеево–ковариантная производная . . . . .	163
А.1.2	Наличие $\delta$ -функции как следствие требования галилеевой инвариантности . . . . .	164
А.2	Модель магнитной гидродинамики Казанцева–Крейчнана . .	165
А.3	Согласование динамики с условием поперечности . . . . .	167
<b>В</b>	<b>Приложения к Главе 2</b>	<b>169</b>
В.1	Доопределение $\Theta(0)$ . . . . .	169
В.2	О невозможности существования двух пространственных масштабов в модели №1 . . . . .	170
В.3	Вычисление канонических размерностей в модели №3 . . . .	172
<b>С</b>	<b>Приложения к Главе 3</b>	<b>177</b>
С.1	Оператор $\mathcal{D}_{RG}$ . . . . .	177
С.2	Связь констант ренормировки $Z$ , $\beta$ - и $\gamma$ -функций . . . . .	179
С.2.1	Вычисление констант ренормировки $Z$ . . . . .	179
С.2.2	Вычисление аномальной размерности и $\beta$ -функции заряда $g$ . . . . .	180
С.2.3	Вычисление аномальной размерности и $\beta$ -функции заряда $u$ . . . . .	182
С.3	ИК–асимптотика функций Грина. Инвариантный заряд, неподвижная точка . . . . .	183
С.3.1	Уравнение РГ как дифференциальное уравнение в частных производных . . . . .	183

С.3.2	Решение однородного дифференциального уравнения.	
	Инвариантный заряд . . . . .	184
С.3.3	Решение неоднородного дифференциального уравнения	186
<b>Литература</b>		<b>188</b>

## Введение

### Актуальность темы.

На данный момент теоретическое описание развитой турбулентности и, в частности, аномального скейлинга в ней, в значительной степени остается нерешенной задачей; см. [1–8]. Натурные эксперименты и численное моделирование показывают, что отклонения от предсказаний классической теории Колмогорова — Обухова для переноса пассивного скаляра проявляются даже более сильно, чем для самого переносящего его поля скорости. Кроме того, оказывается, что проблема переноса достаточно просто поддается теоретическому описанию: даже упрощенные модели, описывающие перенос каким-либо «синтетическим» ансамблем скорости с заданной гауссовой статистикой, воспроизводят многие из аномальных свойств реального турбулентного переноса массы или тепла, наблюдаемые в эксперименте. Поэтому проблема турбулентного переноса, сама по себе имеющая важное практическое значение, может рассматриваться как исходная точка при изучении развитой гидродинамической турбулентности в целом [9].

Наиболее значительные успехи на этом пути были достигнуты для модели Крейчнана с нулевым временем корреляции, в которой корреляционная функция поля скорости выбрана в виде  $\langle vv \rangle \propto \delta(t - t') \cdot k^{-d-\xi}$ , где  $k$  является волновым числом,  $d$  — размерностью пространства, а  $\xi$  — произвольным показателем, являющимся характеристикой вещества. Впервые бесконечный набор аномальных показателей был вычислен на основе микроско-



пической модели в рамках регулярной теории возмущений; см. [10–23], а также обзоры [24, 25].

**Степень разработанности темы исследования.** Наибольшие успехи при изучении аномального скейлинга в статистических моделях турбулентного переноса были достигнуты с помощью применения методов ренормализационной группы (РГ) и операторного разложения (ОР); см. монографии [26, 27]. При таком подходе аномальный скейлинг является следствием существования составных полей («составных операторов» в терминологии квантовой теории поля) с *отрицательными* критическими размерностями; см. обзор [25]. В работах [28–33] методы РГ + ОР были применены к различным задачам турбулентного переноса пассивных векторных полей — как непосредственно к модели Крейчнана, так и к различным ее обобщениям — конечному времени корреляции, анизотропии, сжимаемости, нелинейности наиболее общего вида и т. д. Были получены аналитические выражения для членов первого (см. [30, 31]) и второго (см. [32]) порядков  $\xi$ -разложения. В рамках метода нулевых мод были получены точные ответы для парной корреляционной функции магнитных полей, см. [28, 34, 35].

**Целью** диссертационной работы является изучение аномального скейлинга в моделях магнитогидродинамической (МГД) турбулентности методами теоретико-полевой ренормгруппы и операторного разложения. Рассматривается приближение, в котором влиянием магнитного поля на динамику жидкости можно пренебречь («кинематическая модель динамо»), тогда проблему можно рассматривать как описание турбулентного переноса пассивного векторного (магнитного) поля в заданном турбулент-

ном течении. Для описания движения проводящей среды привлекаются статистический ансамбль Казанцева–Крейчнана (поле скорости гауссово и имеет нулевое время корреляции), его обобщение на случай сильной анизотропии с одним выделенным направлением (ансамбль Авельянеды–Майда) и стохастическое уравнение Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости. Также рассматривается обобщенная модель для динамики пассивного векторного поля, в которой нелинейность имеет наиболее общий вид, совместимый с галилеевой симметрией (т. н.  $\mathcal{A}$ -модель). В качестве частных случаев она содержит кинематическую модель динамо и линеаризованное уравнение Навье–Стокса, а также позволяет обсуждать влияние нелокальных вкладов давления. Для общности две модели из трех рассматриваются в произвольной размерности пространства. Необходимо установить наличие либо отсутствие аномального скейлинга в асимптотике инерционного интервала парной корреляционной функции, а также вычислить соответствующие аномальные показатели.

В соответствии с целью исследования для каждой из трех моделей были поставлены следующие основные задачи:

- (1) Построить квантово-полевую формулировку данной модели и установить ее ренормируемость.
- (2) Установить наличие ИК-притягивающей неподвижной точки, определяющей асимптотику инерционного интервала.
- (3) Используя технику РГ и ОР, вычислить аномальные размерности составных операторов, определяющих асимптотическое поведение парной корреляционно функции.

**Научная новизна.** Все основные результаты диссертации получены

впервые, что подтверждается их публикацией в ведущих отечественных и международных журналах, и включают следующее:

(1) Для модели МГД в случае, когда поле скорости описывается статистическим ансамблем Казанцева–Крейчнана, установлен аномальный скейлинг парной корреляционной функции в инерционном интервале, проверено сохранение иерархии анизотропных вкладов при включении в рассмотрение второго члена  $\xi$ -разложения; вычислены аномальные показатели во втором порядке разложения по константе связи  $g$ .

(2) Для  $\mathcal{A}$ -модели с полем среды, описываемым с помощью уравнения Навье–Стокса, аномальные показатели вычислены в первом порядке разложения по константе связи  $g$ ; установлено наличие аномального скейлинга для парной корреляционной функции и иерархия анизотропных вкладов.

(3) Для  $\mathcal{A}$ -модели в случае, когда поле скорости обладает анизотропией и описывается статистическим ансамблем Авельянеды–Майда, обнаружено нарушение аномального скейлинга. Вместо степенной асимптотики инерционного интервала корреляционные функции обладают логарифмической зависимостью. Показано, что в силу тождественного равенства нулю старших членов асимптотика корреляционных функций полностью определяется первым членом  $\xi$ -разложения.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при описании различных процессов в солнечной короне, ионосфере и межзвездном газе. Результаты работы должны стимулировать экспериментальные исследования по аккуратному измерению аномальных показателей в МГД турбулентности. Разработанные методы могут быть применены к другим подобным стохастическим

задачам, таким как турбулентный перенос тензорных полей, описание турбулентного переноса с помощью стохастического уравнения Навье–Стокса при наличии анизотропии и сжимаемости и т. п.

**Методология и методы исследования.** В работе активно используются метод ренормализационной группы, в частности для вычисления координат ИК–притягивающих неподвижных точек и асимптотического поведения парной корреляционной функции, и операторного разложения, позволяющий связать асимптотическое поведение парной корреляционной функции составных операторов с асимптотическим поведением самих составных операторов; см. [18].

**Достоверность результатов** обеспечивается использованием мощного и хорошо развитого математического аппарата квантовой теории поля и сравнением с результатами, известными ранее для различных частных случаев.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

(1) Для модели турбулентного переноса пассивного векторного поля при наличии крупномасштабной анизотропии в случае, когда поле скоростей обладает конечным временем корреляции и описывается стохастическим уравнением Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости, установлено существование аномального скейлинга в инерционном интервале масштабов, а соответствующие показатели вычислены явно в главном (однопетлевом) приближении ренормгруппы, включая показатели анизотропных вкладов. Как и для случая скалярного поля, они демонстрируют иерархию, связанную со степенью анизотропности вклада: чем она выше, тем больше показатель и тем быстрее вклад убывает в глубине инерци-

онного интервала. Ведущий член асимптотики в инерционном интервале определяется изотропным вкладом, что согласуется с гипотезой Колмогорова о локально изотропной турбулентности.

(2) В кинематической модели турбулентного динамо при наличии крупномасштабной анизотропии для случая, когда поле скоростей описывается статистическим ансамблем Казанцева–Крейчнана, аномальные показатели явно вычислены в двухпетлевом приближении ренормгруппы (второй порядок  $\epsilon$ -разложения). Показано, что в отличие от скалярного случая, учет двухпетлевого вклада приводит к усилению аномального скейлинга и иерархии анизотропных вкладов по сравнению с ведущим (однопетлевым) приближением.

(3) Для модели турбулентного переноса пассивного векторного поля в случае, когда поле скоростей описывается сильно анизотропным статистическим ансамблем Авельянеды–Майда с одним выделенным направлением, показано, что соответствующие уравнения ренормализационной группы имеют инфракрасно–притягивающую неподвижную точку в широком интервале параметров, в том числе для частных случаев кинематической модели динамо, линеаризованного уравнение Навье–Стокса и т. н. линейной модели с давлением, то есть в модели реализуется скейлинговое поведение. Найдены точные значения соответствующих критических размерностей полей и основных параметров модели.

(4) Установлено, что в модели турбулентного переноса пассивного векторного поля в случае, когда поле скоростей описывается статистическим ансамблем Авельянеды–Майда, аномальный скейлинг проявляется в логарифмической зависимости корреляционных функций от внешнего (ин-

тегрального) масштаба, в отличие от степенной зависимости для ансамбля Казанцева–Крейчнана и большинства его модификаций. Это является результатом специального случая смешивания в семействах составных операторов, при котором матрица смешивания оказывается нильпотентной.

Апробация работы. Результаты и положения работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и школах:

1. Международная студенческая конференция «Физика и Прогресс — 2010» (Санкт-Петербург, Россия, 2010 г.).

<http://www.phys.spbu.ru/grisc/science-and-progress/archive.html>

2. Международная конференция «Математическое моделирование и вычислительная физика» ММСР — 2011 (Кошице, Словакия, 2011 г.).

<http://www.informatik.uni-trier.de/~ley/db/conf/mmcp/mmcp2011.html>

3. Международная студенческая конференция «Физика и Прогресс — 2013» (Санкт-Петербург, Россия, 2013 г.).

<http://www.phys.spbu.ru/grisc/science-and-progress/archive.html>

4. XLVIII Зимняя школа Петербургского института ядерной физики (Санкт-Петербург, Россия, 2014 г.).

[http://dbserv.pnpi.spb.ru/WinterSchool/school\\_program.html](http://dbserv.pnpi.spb.ru/WinterSchool/school_program.html)

5. 52я Международная школа по субатомной физике (Эричи, Италия, 2014 г.).

<http://www.ccsem.infn.it/issp2014/index.html>

6. XI Международная конференция «Кварки, конфайнмент и спектр адронов» (Санкт-Петербург, Россия, 2014 г.).

<http://onlinereg.ru/confXI/list.pdf>

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 научные работы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и входящих в базы данных РИНЦ, Web of Science и Scopus, а также тезисы докладов 2 международных конференций:

1. Н.В. Антонов, Н.М. Гулицкий, тезисы международной студенческой конференции «Физика и Прогресс — 2010».
2. N.V. Antonov, N.M. Gulitskiy, Lecture Notes in Comp. Science Vol. 7125, p. 128–135, 2012.
3. N.V. Antonov, N.M. Gulitskiy, Phys. Rev. E Vol. 85, 065301(R), 2012; Erratum, Phys. Rev. E Vol. 87, 039902, 2013.
4. Н.В. Антонов, Н.М. Гулицкий, тезисы международной студенческой конференции «Физика и Прогресс — 2013».
5. Н.В. Антонов, Н.М. Гулицкий, ТМФ Т. 176. №1, с. 22–34, 2013.
6. Н.В. Антонов, Н.М. Гулицкий, Вестник СПбГУ, Сер. 4 Т. 1 (59) Вып. 3, с. 299–317, 2014.

**Личный вклад автора.** Все основные результаты получены соискателем лично либо при его прямом участии в неразделимом соавторстве.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, приложений и списка литературы из 80 наименований. Работа изложена на 198 страницах и содержит 24 рисунка и 3 таблицы.

Первая глава содержит введение в проблематику задач данного типа, а также описание ансамблей скорости и постановку задачи с помощью стохастических дифференциальных уравнений.

Вторая глава посвящена переформулировке данных задач в виде некоторых квантово-полевых моделей с заданными функционалами действия; для каждой из моделей устанавливается ренормируемость и вычисляется оператор собственной энергии, входящий в уравнение Дайсона.

В третьей главе вычисляются РГ-функции — аномальные размерности  $\gamma$  и  $\beta$ -функции полей и параметров; будет показано, что в некоторых интервалах значений параметров данные модели обладают ИК-притягивающей неподвижной точкой, определяющей ИК-асимптотику корреляционных функций.

Червертая глава посвящена ренормировке составных операторов в модели №1 (ансамбль скорости Авельянеды–Майда). Будет показано, что матрица ренормировки дается своим однопетлевым приближением точно; приведены выражение для матрицы аномальных размерностей и матрицы критических размерностей. В частности будет доказано, что матрица аномальных размерностей является нильпотентной, следствием чего является невозможность диагонализации матрицы критических размерностей. В результате вместо степенной зависимости от внешнего масштаба асимптотика парной корреляционной функции является логарифмической.

В пятой главе методы ренормгруппы и операторного разложения применяются к изучению асимптотики корреляционных функций в моделях №2 (ансамбль скорости Казанцева–Крейчнана) и №3 (скорость среды описывается с помощью стохастического уравнения Навье–Стокса). Будет установлено наличие аномального скейлинга и вычислены соответствующие аномальные показатели в двухпетлевом (для модели №2) и однопетлевом (для модели №3) приближениях.



В заключении суммируются основные результаты работы.

В приложениях обсуждаются вопросы, связанные с постановкой задачи (приложения к Главе 1), квантово-полевой формулировкой (приложения к Главе 2) и уравнениями ренормгруппы (приложения к Главе 3).

# 1. Модель Крейчнана и стохастические дифференциальные уравнения переноса пассивного поля

## 1.1. Введение

В течение последних десятилетий большое внимание уделяется проблеме перемежаемости и аномального скейлинга в развитой МГД турбулентности, см. обзор [24] и имеющиеся в нем ссылки. Известно, что в т. н. Альфвеновском режиме МГД турбулентность демонстрирует поведение, подобное обычной развитой гидродинамической турбулентности: существует каскад энергии из инфракрасной области к меньшим масштабам, на которых доминирует диссипация, а также автомодельное (скейлинговое) поведение спектра энергии в промежуточном (инерционном) интервале. Более того, перемежающийся характер флуктуаций в МГД турбулентности выражен гораздо ярче, чем в обычной турбулентной жидкости.

Различные модели и подходы к МГД турбулентности можно «тестировать» в процессах, происходящих в солнечной короне — т. н. «аэродинамических трубах», см. [3–7]. В солнечных вспышках высокоэнергичные и сильно анизотропные крупномасштабные движения сосуществуют с мелкомасштабными когерентными структурами, ответственными за диссипацию. Поэтому описание процессов, в которых энергия перераспределяется по спектру и в конечном счете диссипирует, является достаточно сложной

задачей. Перемежаемость существенно изменяет поведение корреляционных функций высших порядков и приводит к возникновению аномального скейлинга, характеризуемого бесконечным набором аномальных показателей.

Упрощенное описание ситуации состоит в том, что крупномасштабное поле  $B_i^0 = n_i B^0$  выделяет определенное направление  $\mathbf{n}$ , а динамика флуктуаций в перпендикулярной плоскости описывается как независимая и квазидвумерная [8]. Такой подход позволяет осуществлять довольно точное численное моделирование. Однако наблюдения показывают, что скейлинговое поведение в солнечной короне ближе к обычному аномальному скейлингу в трехмерной турбулентности, чем к простому скейлингу Ирошникова–Крейчнана, свойственному двумерной задаче с обратным потоком энергии [3]. Таким образом, дальнейшее изучение проблемы в рамках более реалистических моделей является актуальной задачей.

В реальной физической задаче поле среды  $\mathbf{v}(x)$  удовлетворяет уравнению Навье–Стокса с дополнительными членами, описывающими обратное влияние переносимого поля  $\boldsymbol{\theta}(x)$  на поле скорости. При этом при изучении данных (полномасштабных) моделей возможны два упрощения. Во-первых, магнитное поле  $\boldsymbol{\theta}(x)$  может быть выбрано *пассивным*, т. е. не имеющим обратного влияния на динамику поля скорости (т. н. *кинематический* режим). Данное приближение верно при не слишком больших градиентах магнитного поля; предполагается, что на начальных стадиях поле  $\boldsymbol{\theta}(x)$  является слабым и не влияет на движение проводящей жидкости. В работах [36, 37] показано, что РГ–анализ такого кинематического режима успешно описывает ИК–асимптотику моделей данного типа.

Во-вторых, поскольку описание турбулентного движения жидкости само по себе является сложной задачей, а мы ограничиваемся рассмотрением пассивных полей примеси, поле среды может быть задано с помощью некоторого статистического ансамбля. Данное упрощение будет применяться при моделировании поля скорости ансамблями Казанцева–Крейчнана и Авельянеды–Майда; также в диссертации рассматривается модель, в которой поле скорости подчиняется непосредственно стохастическому уравнению Навье–Стокса, при этом на данный момент удалось вычислить только первый порядок  $\xi$ -разложения.

В отличие от *скалярного* случая, стохастическое уравнение для *векторных* полей в дополнение к члену, отвечающему за диффузию, содержит еще один — т. н. «растягивающий» член. Благодаря этому асимптотика инерционного интервала таких полей является более интересной, чем у их скалярных аналогов; см. [28–35, 38–42]. В частности, аномальный скейлинг может проявляться уже на уровне парной корреляционной функции [34, 35]; также имеют место крупномасштабные неустойчивости, которые можно рассматривать как эффект турбулентного динамо, см. [34, 38, 43].

## 1.2. Изотропная модель Крейчнана

В оригинальной модели Крейчнана пассивное поле  $\theta(x) \equiv \theta(t, \mathbf{x})$ , где  $x = \{t, \mathbf{x}\}$ , является скалярным, а уравнение диффузии имеет вид

$$\nabla_t \theta = \nu_0 \Delta \theta + f, \quad \nabla_t \equiv \partial_t + v_i \partial_i. \quad (1.1)$$

Символами  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ ,  $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$  обозначены производные по времени и по координатам,  $\nu_0$  является коэффициентом диффузии,  $\Delta$  — оператор

Лапласа,  $\mathbf{v}(x) \equiv \{v_i(x)\}$  — поперечное (в силу несжимаемости) поле скорости,  $f \equiv f(x)$  — случайная сила, обладающая гауссовым распределением с нулевым средним и корреляционной функцией вида

$$\langle f(x)f(x') \rangle = \delta(t - t') C(r/L), \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \quad (1.2)$$

Параметр  $L \equiv M^{-1}$  является внешним масштабом турбулентности, связанным со сторонней силой, а  $C(r/L)$  — некоторая функция, конечная при  $L \rightarrow \infty$ .

Поле скорости  $\mathbf{v}(x)$  было выбрано гауссовым, с нулевым временем корреляции, статистически изотропным и несжимаемым, с парной корреляционной функцией вида

$$\langle v_i(x)v_j(x') \rangle = \delta(t - t') \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} P_{ij}(\mathbf{k}) D_0 \frac{1}{k^{d+\xi}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}, \quad (1.3)$$

где  $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$  — поперечный проектор,  $k \equiv |\mathbf{k}|$  — волновое число,  $d$  — размерность пространства,  $D_0 > 0$  — амплитудный множитель, величина  $1/m$ , являющаяся внешним масштабом турбулентности  $\tilde{L}$  (радиус корреляций поля скорости), обеспечивает ИК-регуляризацию,  $\xi$  — произвольный показатель (с наиболее реалистичным «колмогоровским» значением  $\xi = 4/3$ ). Для простоты данный внешний масштаб  $\tilde{L}$ , связанный с полем скорости, отождествляется с внешним масштабом случайной силы  $L$ , упоминавшимся ранее в (1.2).

Ансамбль скорости (1.3) содержит  $\delta$ -функцию по времени как следствие галилеевой инвариантности; подробнее см. приложение А.1.2.

Соотношения

$$D_0/\nu_0 = \hat{g}_0 \equiv \Lambda^\xi \quad (1.4)$$

определяют константу взаимодействия  $\hat{g}_0$ , которая с точностью до численного множителя является параметром разложения теории возмущений, и характерный малый масштаб  $\Lambda$ , на котором определяющую роль начинает играть вязкость.

### 1.3. Стохастическое уравнение переноса векторного поля

Данная постановка задачи, описываемая уравнениями (1.1) — (1.3), позволяет различные обобщения на более сложные физические ситуации. Например, вместо *скалярного* пассивного поля  $\theta(x)$  и уравнения диффузии (1.1) можно рассматривать *векторное* поле  $\boldsymbol{\theta}(x)$  и линейризованное уравнение магнитной гидродинамики (см. приложение А.2), описывающее эволюцию флуктуирующей компоненты магнитного поля в присутствии основной компоненты  $\boldsymbol{\theta}^o$ , меняющейся на очень больших масштабах:

$$\partial_t \theta_i + \partial_k (v_k \theta_i - v_i \theta_k) = \nu_0 \partial^2 \theta_i + f_i, \quad (1.5)$$

где как поле  $\mathbf{v}$ , так и поле  $\boldsymbol{\theta}$  являются поперечными (бездивергентными) векторными полями:  $\partial_i v_i = \partial_i \theta_i = 0$ .

Также можно рассматривать линейризацию уравнения Навье–Стокса вблизи фонового быстро меняющегося поля скорости, что дает аналогичное уравнение с точностью до знака:

$$\partial_t \theta_i + \partial_k (v_k \theta_i + v_i \theta_k) + \partial_i \mathcal{P} = \nu_0 \partial^2 \theta_i + f_i, \quad (1.6)$$

где  $\mathcal{P}$  — давление.

Уравнения (1.5) и (1.6) можно объединить введением нового параметра  $\mathcal{A}_0$ :

$$\partial_t \theta_i + \partial_k (v_k \theta_i - \mathcal{A}_0 v_i \theta_k) + \partial_i \mathcal{P} = \nu_0 \partial^2 \theta_i + f_i. \quad (1.7)$$

При этом предполагается, что  $\mathcal{A}_0$  принимает не только значения  $\pm 1$ , но и все остальные числовые значения. Благодаря этому возникает еще один интересный случай: при  $\mathcal{A}_0 = 0$  в уравнении (1.7) отсутствует «растягивающий» член  $\partial_k(v_i\theta_k)$ , поэтому модель обладает дополнительной симметрией сдвига  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \text{const}_i$ . Благодаря этому основной вклад в аномальную размерность дается составными операторами, построенными не из самих полей, а из их производных. Необходимо отметить, что для ренормировки введенного параметра  $\mathcal{A}_0$  необходима собственная ренормировочная константа  $Z_{\mathcal{A}}$ , которая может оказаться нетривиальной [41].

Введение члена  $\partial\mathcal{P}$  в уравнения (1.6) и (1.7) необходимо для согласования динамики с условиями поперечности  $\partial_i\theta_i = 0$ ,  $\partial_iv_i = 0$ . Благодаря этому давление может быть выражено как решение уравнения Пуассона (подробнее см. в приложении А.3):

$$\partial^2\mathcal{P} = (\mathcal{A}_0 - 1) \partial_iv_k\partial_k\theta_i. \quad (1.8)$$

При рассмотрении векторных полей, уравнение диффузии для которых представляет собой уравнение вида (1.5) — (1.7), случайная внешняя сила  $\mathbf{f}$  также должна быть векторной. При этом по прежнему предполагается, что она обладает гауссовым распределением с нулевым средним, а вместо корреляционной функции (1.2) необходимо рассматривать коррелятор вида

$$\langle f_i(t, \mathbf{x}) f_k(t', \mathbf{x}') \rangle = \delta(t - t') C_{ik}(\mathbf{r}/L), \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , параметр  $L \equiv M^{-1}$  является внешним масштабом турбулентности, связанным со сторонней силой, а  $C_{ik}$  — безразмерные функции, конечные при  $r/L \rightarrow 0$  и убывающие при  $r/L \rightarrow \infty$ .

#### 1.4. Анизотропная модель Крейчнана

Поле скорости  $\mathbf{v}$ , описывающее переносящую среду и заданное в модели Крейчнана с помощью парного коррелятора (1.3), также может быть модифицировано в связи с различными физическими ситуациями. Можно рассматривать такие эффекты, как сжимаемость среды, конечное время корреляции, анизотропию.

Для введения анизотропии ансамбль поля скорости может быть модифицирован несколькими способами. В частности, вместо поперечного проектора  $P_{ij}(\mathbf{k})$  в коррелятор скорости (1.2) можно ввести оператор  $T_{ij}(\mathbf{k})$  вида

$$T_{ij}(\mathbf{k}) = a(\psi)P_{ij}(\mathbf{k}) + b(\psi)n_s n_l P_{is}(\mathbf{k})P_{jl}(\mathbf{k}), \quad (1.10)$$

где  $\psi$  — угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{k}$ , а  $a(\psi)$  и  $b(\psi)$  — некоторые скейлинговые функции. Этот путь использовался в работах [44–47] и отвечал случаю анизотропии на малых пространственных масштабах. Видно, что данная постановка задачи содержит изотропную модель как частный случай: при  $a(\psi) = 1$  и  $b(\psi) = 0$  оператор  $T_{ij}(\mathbf{k})$  превращается в поперечный проектор  $P_{ij}(\mathbf{k})$ .

«Сильно анизотропная» модель Крейчнана (ансамбль Авельянеды–Майда) не содержит в себе изотропную модель как частный случай и описывается полем скорости  $\mathbf{v}$ , обладающим выделенным направлением  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot v(t, \mathbf{x}_\perp). \quad (1.11)$$

Статистический ансамбль выбирается гауссовым, с нулевым средним и кор-



реляционной функцией

$$\langle v_i(t, \mathbf{x}) v_k(t', \mathbf{x}') \rangle = n_i n_k \cdot \langle v(t, \mathbf{x}_\perp) v(t', \mathbf{x}'_\perp) \rangle, \quad (1.12)$$

где

$$\langle v(t, \mathbf{x}_\perp) v(t', \mathbf{x}'_\perp) \rangle = \delta(t - t') \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} D_v(k), \quad (1.13)$$

а

$$D_v(k) = 2\pi\delta(k_\parallel) D_0 \frac{1}{k_\perp^{d-1+\xi}}. \quad (1.14)$$

Все параметры в уравнениях (1.12) — (1.14) идентичны параметрам из ансамбля (1.3), а именно:  $d$  — размерность пространства,  $k_\perp \equiv |\mathbf{k}_\perp|$  — волновое число,  $m$  — обратный радиус корреляций поля скорости,  $D_0 > 0$  — амплитудный фактор,  $\xi$  — произвольный показатель, являющийся параметром РГ-разложения. Такая формулировка может рассматриваться как  $d$ -мерное обобщение анизотропного ансамбля скорости, впервые введенного в [48], а затем рассматривавшегося в работах [49–59]. Как и в разделе 1.2, соотношения

$$D_0/\nu_0 = \hat{g}_0 \equiv \Lambda^\xi \quad (1.15)$$

определяют константу взаимодействия  $\hat{g}_0$  и характерный УФ-масштаб  $\Lambda$ .

## 1.5. Стохастическое уравнение Навье–Стокса

Кроме различных модификаций модели Крейчнана ((1.3), (1.10), (1.12) и т. д.), в которых поле  $\mathbf{v}$  обладает гауссовой статистикой с заданной парной (степенной) корреляционной функцией, поле скорости в (1.7) может быть задано с помощью стохастического уравнения Навье–Стокса:

$$\nabla_t v_i = \nu_0 \partial^2 v_i - \partial_i \wp + \eta_i, \quad \nabla_t \equiv \partial_t + v_i \partial_i, \quad (1.16)$$

где  $\wp$  и  $\eta_i$  — удельные по массе давление и поперечная случайная сила. Для  $\boldsymbol{\eta}$  предполагается гауссово распределение с нулевым средним и корреляционной функцией

$$\langle \eta_i(x) \eta_j(x') \rangle = \frac{\delta(t - t')}{(2\pi)^d} \int_{k \geq m} d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) d_\eta(k) \exp[\mathbf{i}\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]. \quad (1.17)$$

Все параметры в уравнении (1.16) идентичны параметрам из ансамблей (1.3) и (1.12);  $d_\eta(k)$  — некоторая функция от  $k \equiv |\mathbf{k}|$  и параметров модели. Величина  $1/m$ , являющаяся внешним масштабом турбулентности  $\tilde{L}$ , обеспечивает ИК-регуляризацию.

Задача (1.16), (1.17) допускает решение методами РГ в том случае, если коррелятор случайной силы имеет степенной вид, см. [60–63], а также обзор [64]:

$$d_\eta(k) = D_0 k^{4-d-\xi}, \quad (1.18)$$

где  $D_0 > 0$  является положительным амплитудным множителем, а показатель  $0 < \xi \leq 4$  играет роль параметра РГ-разложения. Наиболее реалистичным значением для него является  $\xi = 4$ : при  $\xi \rightarrow 4$  и соответствующем выборе амплитуды функция (1.18) стремится к дельта-функции,  $d_\eta(k) \propto \delta(\mathbf{k})$ , что отвечает накачке системы энергией через взаимодействие с крупномасштабными турбулентными вихрями; см. [26, 64, 65].

В отличие от (1.4) и (1.15), характерный УФ-масштаб  $\Lambda$  и константа взаимодействия  $\hat{g}_0$  определяются соотношениями

$$D_0/\nu_0^3 = \hat{g}_0 \equiv \Lambda^\xi. \quad (1.19)$$

## 2. Квантово–полевая формулировка моделей, УФ–расходимости и уравнение Дайсона

### 2.1. Функционал действия $S$

Известно [26, 27], что любая стохастическая задача вида

$$\partial_t \boldsymbol{\theta} = U(x, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{f}(x), \quad (2.1a)$$

$$\langle f_i(x) f_k(x') \rangle = D_\theta(x, x'), \quad (2.1b)$$

эквивалентна квантовополевой модели с удвоенным числом полей  $\Phi = \{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}'\}$  и функционалом действия

$$S(\Phi) = \boldsymbol{\theta}' D_\theta \boldsymbol{\theta}' / 2 + \theta'_i [-\partial_t \theta_i + U(\boldsymbol{\theta})]. \quad (2.2)$$

Здесь  $U(x, \boldsymbol{\theta})$  — заданный  $t$ -локальный функционал, не содержащий производных  $\boldsymbol{\theta}$  по времени,  $\mathbf{f}(x)$  — случайная внешняя сила, обладающая гауссовым распределением с нулевым средним и коррелятором (2.1b).

В общем случае функционал  $U$  содержит линейную и нелинейную по  $\boldsymbol{\theta}$  части:  $U(\boldsymbol{\theta}) = L\boldsymbol{\theta} + n(\boldsymbol{\theta})$ . Это означает, что действию (2.2) отвечает стандартная диаграммная техника с вершиной, содержащей одно поле  $\boldsymbol{\theta}'$  и несколько (в зависимости от конкретного вида  $n(\boldsymbol{\theta})$ ) полей  $\boldsymbol{\theta}$  и двумя пропагаторами:  $\langle \theta_i \theta'_k \rangle = (\partial_t - L)^{-1}$  и  $\langle \theta_i \theta_k \rangle = \langle \theta_i \theta'_l \rangle \cdot D_\theta \cdot \langle \theta_l \theta'_k \rangle^T$ , где символ транспонирования означает перестановку аргументов:  $M^T(x, x') \equiv M(x', x)$ ,  $\partial_t^T = -\partial_t$ . Пропагатор  $\langle \theta'_i \theta'_k \rangle$  тождественно равен нулю. Здесь и

далее интегрирование по  $x = \{t, \mathbf{x}\}$  и суммирование по повторяющимся индексам подразумевается, например

$$\boldsymbol{\theta}' \partial_t \boldsymbol{\theta} = \theta'_i \partial_t \theta_i = \int dt \int d\mathbf{x} \theta'_i(x) \partial_t \theta_i(x),$$

$$\mathbf{v} D_v^{-1} \mathbf{v} = \int dt \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' v_i(t, \mathbf{x}) D_{v,ij}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') v_j(t, \mathbf{x}').$$

Такая формулировка означает, что статистическое усреднение в стохастической задаче (2.1) совпадает с функциональным интегрированием с весом  $\exp S(\Phi)$ .

## 2.2. Перенос пассивного векторного поля сильно анизотропным полем скорости (модель №1)

### 2.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим стохастическую задачу, определяемую уравнениями (1.7), (1.9) и (1.12) — (1.14), а именно пассивное векторное поле, эволюция которого описывается уравнением конвекции–диффузии

$$\partial_t \theta_i + \partial_k (v_k \theta_i - \mathcal{A}_0 v_i \theta_k) + \partial_i \mathcal{P} = \nu_0 \partial^2 \theta_i + f_i, \quad (2.3)$$

где  $f_i$  — случайная гауссова сила с нулевым средним и заданной парной корреляционной функцией:

$$\langle f_i(t, \mathbf{x}) f_k(t', \mathbf{x}') \rangle = \delta(t - t') C_{ik}(\mathbf{r}/L). \quad (2.4)$$

Здесь  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , параметр  $L \equiv M^{-1}$  является внешним масштабом турбулентности, связанным со сторонней силой, а  $C_{ik}$  — безразмерные функции, конечные при  $r/L \rightarrow 0$  и убывающие при  $r/L \rightarrow \infty$ .

Поле скорости  $\mathbf{v}$  выбирается анизотропным,

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot v(t, \mathbf{x}_\perp), \quad (2.5)$$

гауссовым, с нулевым средним и заданной парной корреляционной функцией

$$\langle v_i(t, \mathbf{x}) v_k(t', \mathbf{x}') \rangle = n_i n_k \cdot \langle v(t, \mathbf{x}_\perp) v(t', \mathbf{x}'_\perp) \rangle, \quad (2.6)$$

где

$$\langle v(t, \mathbf{x}_\perp) v(t', \mathbf{x}'_\perp) \rangle = \delta(t - t') \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} D_v(k), \quad (2.7)$$

а

$$D_v(k) = 2\pi\delta(k_\parallel) D_0 \frac{1}{k_\perp^{d-1+\xi}}. \quad (2.8)$$

В силу условия (2.5) поле скорости не является  $O_d$ -симметричным, а обладает симметрией  $O_{d-1} \otimes Z_2$ . Поэтому в уравнении конвекции — диффузии (2.3) необходимо нарушить  $O_d$ -симметрию оператора Лапласа, введя новый параметр  $f_0$ :

$$\partial_t \theta_i + \partial_k (v_k \theta_i - \mathcal{A}_0 v_i \theta_k) + \partial \mathcal{P} = \nu_0 (\partial_\perp^2 + f_0 \partial_\parallel^2) \theta_i + f_i. \quad (2.9)$$

Введение данного параметра можно рассматривать как чисто технический прием, переводящий  $O_d$ -симметрию оператора Лапласа в  $O_{d-1} \otimes Z_2$  симметрию и необходимый для осуществления процедуры ренормировки, а можно как следствие необходимости наличия в модели всех ИК-существенных членов, разрешенных симметрией задачи.

Как поле  $\boldsymbol{\theta}$ , так и поле  $\mathbf{v}$  являются поперечными,  $\partial_i \theta_i = \partial_i v_i = 0$ , а член  $\partial \mathcal{P}$  необходим для согласования условий поперечности с динамикой, подробнее см. приложение А.3.

### 2.2.2. Квантово–полевая формулировка

В соответствии с разделом 2.1, данная стохастическая задача эквивалентна квантовополевой модели для набора из 3 полей  $\Phi = \{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}', \mathbf{v}\}$  с функционалом действия

$$S(\Phi) = -\theta'_k \left[ -\partial_t \theta_k - (v_i \partial_i) \theta_k + \mathcal{A}_0(\theta_i \partial_i) v_k + \nu_0(\partial_\perp^2 + f_0 \partial_\parallel^2) \theta_k \right] + \\ + \theta'_i D_\theta \theta'_k / 2 + v_i D_v^{-1} v_k / 2, \quad (2.10)$$

где первые четыре члена представляют собой действие (2.2) для стохастической задачи (2.4), (2.9) при фиксированной  $\mathbf{v}$ , а последний член есть гауссово усреднение по  $\mathbf{v}$ .

Такой модели соответствует тройная вершина

$$V_{cab} = (\partial_a \theta'_c) (v_a \theta_c - \mathcal{A}_0 \cdot v_c \theta_a), \quad (2.11)$$

а также три затравочных пропагатора:  $\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0$ ,  $\langle \theta_i \theta_k \rangle_0$  и  $\langle v_i v_k \rangle_0$ , диаграммное представление для которых представлено на рисунках (2.1) — (2.4):

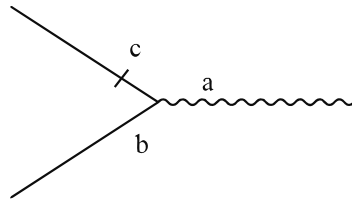


Рис. 2.1. Диаграммное представление тройной вершины  $V_{cab}$ .



Рис. 2.2. Диаграммное представление пропагатора  $\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0$ .

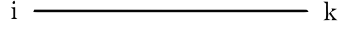


Рис. 2.3. Диаграммное представление пропагатора  $\langle \theta_i \theta_k \rangle_0$ .



Рис. 2.4. Диаграммное представление пропагатора  $\langle v_i v_k \rangle_0$ .

Здесь и далее перечеркнутый конец соответствует полю  $\theta'$ , конец без черты — полю  $\theta$ .

В импульсно–частотном представлении вершине соответствует множитель

$$V_{cab} = i\delta_{bc} p_a^{\theta'} - i\mathcal{A}_0 \cdot \delta_{ac} p_b^{\theta'}, \quad (2.12)$$

где  $p^{\theta'}$  — импульс поля  $\theta'$ . Пользуясь поперечностью поля  $\theta$ , с помощью интегрирования по частям можно перебросить производную в вершинном члене действия (2.10) с поля  $\theta$  на поле  $\theta'$ :

$$-\theta'_i [\partial_k (v_k \theta_i - \mathcal{A}_0 \cdot v_i \theta_k)] = (\partial_k \theta'_i) \cdot (v_k \theta_i - \mathcal{A}_0 \cdot v_i \theta_k). \quad (2.13)$$

Для того, чтобы убедиться в верности явного вида вершинного множителя, необходимо рассмотреть свертку  $\theta'_c V_{abc} v_a \theta_b$  и воспользоваться фурье–преобразованием  $ip_a \rightarrow \partial_a$ :

$$\begin{aligned} \theta'_c V_{abc} v_a \theta_b &= \theta'_c \cdot i[p_a \delta_{bc} - \mathcal{A}_0 \cdot p_b \delta_{ac}] \cdot v_a \theta_b = \\ &= i\theta'_c p_a v_a \theta_c - i\mathcal{A}_0 \cdot \theta'_c p_b v_c \theta_b = (\partial_a \theta'_c) \cdot (v_a \theta_c - \mathcal{A}_0 \cdot v_c \theta_a). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из действия (2.10) следует, что в импульсно–частотном представлении пропагаторам отвечают выражения

$$\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0 = \frac{P_{ik}(\mathbf{k})}{-i\omega + \nu_0(\mathbf{k}_\perp^2 + f_0 k_\parallel^2)}, \quad (2.15a)$$

$$\langle \theta_i \theta_k \rangle_0 = \frac{C_{ik}(\mathbf{k})}{\omega^2 + \left[ \nu_0(\mathbf{k}_\perp^2 + f_0 k_\parallel^2) \right]^2}, \quad (2.15b)$$

где  $C_{ik}(\mathbf{k})$  является фурье-образом функции  $C_{ik}(\mathbf{r}/L)$  из (2.4). Пропагатор  $\langle v_i v_k \rangle_0$  дается выражением (2.6).

В импульсно-временном представлении пропагаторам (2.15a) и (2.15b) отвечают выражения

$$\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0 = P_{ik}(\mathbf{k}) \cdot \Theta(t - t') \exp \{ -(t - t') \epsilon_{\mathbf{k}} \}, \quad (2.16a)$$

$$\langle \theta_i \theta_k \rangle_0 = \{ C_{ik}(\mathbf{k}) / 2\epsilon_{\mathbf{k}} \} \cdot \exp \{ -|t - t'| \epsilon_{\mathbf{k}} \}, \quad (2.16b)$$

где  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \nu_0(\mathbf{k}_\perp^2 + f_0 k_\parallel^2)$ ; в выражении для пропагатора  $\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0$  символ  $t$  является временным аргументом поля  $\boldsymbol{\theta}$ , символ  $t'$  — поля  $\boldsymbol{\theta}'$ . Это означает, что пропагатор  $\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0$  является запаздывающим. Как мы впоследствии увидим, данное свойство является причиной тождественного равенства нулю всех многопетлевых диаграмм, входящих в уравнение Дайсона.

На самом деле из анализа уравнения Дайсона (см. раздел 3.1.4) следует необходимость введения еще одной структуры в функционал действия  $S(\Phi)$ , что, в свою очередь, приводит к изменению выражений (2.15a), (2.15b). При этом оказывается, что на самом деле полученная таким образом аддитивная добавка не требуется, т. к. дает нулевой вклад при вычислении расходящихся частей всех необходимых диаграмм.



### 2.2.3. Канонические размерности

Анализ УФ–расходимостей основан на анализе канонических размерностей 1–неприводимых функций Грина. В отличие от статических, динамические модели имеют 2 независимые канонические размерности — импульсную размерность  $d_F^k$  и частотную размерность  $d_F^\omega$ . Таким образом для любой величины  $F$  верно

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L]^{-d_F^k}, \quad (2.17)$$

где  $T$  и  $L$  являются некоторыми масштабами времени и длины.

Размерности всех величин находятся из нормализационного условия  $d_k^k = -d_{\mathbf{x}}^k = 1$ ,  $d_k^\omega = -d_{\mathbf{x}}^\omega = 0$ ,  $d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$ ,  $d_\omega^k = d_t^k = 0$  и требования, чтобы все члены в функционале действия (2.10) были безразмерными (по отдельности по импульсной и частотной размерностям).

Основываясь на  $d_F^k$  и  $d_F^\omega$  и учитывая, что в функционал действия (2.10) входит комбинация  $\partial_t + \text{const} \cdot \partial^2$ , т. е.  $\partial_t \propto \partial^2$ , можно ввести каноническую размерность

$$d_F = d_F^k + 2d_F^\omega, \quad (2.18)$$

которая играет в теории перенормировки динамических моделей такую же роль, как и обычная (импульсная) размерность для статических моделей.

Канонические размерности полей и параметров модели (2.10) представлены в таблице 2.1, включая ренормированные аналоги, которые будут введены позже. В работе [59] рассматривалась скалярная версия данной модели. Оказывается, что в этом случае возможно ввести не один, а два независимых пространственных масштаба, каждый из которых отвечает за

Таблица 2.1. Канонические размерности полей и параметров в модели (2.10).

$F$	$\theta'$	$\theta$	$\mathbf{v}$	$M, m, \mu, \Lambda$	$\nu, \nu_0$	$\mathcal{A}, \mathcal{A}_0$	$f, f_0$	$u, u_0$	$\hat{g}_0, g_0$	$\hat{g}, g$
$d_F^\omega$	1/2	-1/2	1	0	1	0	0	0	0	0
$d_F^k$	$d$	0	-1	1	-2	0	0	0	$\xi$	0
$d_F$	$d+1$	-1	1	1	0	0	0	0	$\xi$	0

перпендикулярное и параллельное по отношению к вектору  $\mathbf{n}$  направление.

Это означает, что

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L_\perp]^{-d_F^\perp} [L_\parallel]^{-d_F^\parallel}, \quad (2.19)$$

где  $L_\perp$  и  $L_\parallel$  являются двумя независимыми пространственными масштабамми, а  $d_F^\perp$  и  $d_F^\parallel$  — двумя независимыми каноническими размерностями. Однако в данной (векторной) задаче существует дополнительное условие — условие поперечности полей  $\theta$  и  $\theta'$ :  $\partial_i \theta_i = \partial_i \theta'_i = 0$ , которое запрещает существование двух независимых пространственных масштабов (подробнее см. приложение В.2). В частности это означает, что введенная в (2.9) константа  $f_0$  является безразмерной.

Из таблицы 2.1 следует, что данная модель является логарифмической (константа взаимодействия  $g_0 \sim [L]^{-\xi}$  безразмерная) при  $\xi = 0$ , т. о. УФ-расходимости функций Грина проявляются в виде полюсов по  $\xi$ .

Учитывая (2.18), канонические размерности произвольных 1-неприводимых функций Грина  $\Gamma = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1\text{-непр}}$  даются соотношением

$$d_\Gamma = d + 2 - \sum_{\Phi} N_\Phi d_\Phi = d + 2 - N_{\theta'} d_{\theta'} - N_\theta d_\theta - N_v d_v. \quad (2.20)$$

Здесь  $N_\Phi = \{N_\theta, N_{\theta'}, N_v\}$  является числом полей, входящих в данную

функцию Грина; в формуле (2.20) и всех аналогичных суммирование по всем типам полей подразумевается. Поскольку в логарифмической теории константа связи является безразмерной,  $N_\Phi$  в формуле (2.20) и аналогичных можно рассматривать как число *внешних* полей.

Поверхностные УФ–расходимости, для устранения которых необходимо введение контрчленов, присутствуют только в тех функциях  $\Gamma$ , для которых формальный индекс расходимости  $d_\Gamma$  является целым неотрицательным числом. При этом необходимо учитывать, что

(1) Для любой динамической модели вида (2.2) 1–неприводимые функции Грина, не содержащие дополнительного поля  $\theta'$  (т. е. те, для которых  $N_{\theta'} = 0$ ), содержат замкнутые циклы запаздывающих пропагаторов (2.16а) и таким образом обращаются в нуль.

(2) Для любой 1–неприводимой функции Грина  $N_{\theta'} - N_\theta = 2N_0$ , где  $N_0 \geq 0$  является числом затравочных пропагаторов  $\langle \theta\theta \rangle_0$ , входящих в любую из ее диаграмм. Данное соотношение следует из того, что вершина (2.11) содержит по одному полю  $\theta_i$  и  $\theta'_k$ , т. е. линии  $\langle \theta_i\theta_k \rangle$  и  $\langle \theta_i\theta'_k \rangle$  «не ветвятся», и может быть легко проверено для любой заданной функции; к примеру, для функции, изображенной на рисунке 2.7,  $N_{\theta'} = N_\theta = 1$ ,  $N_0 = 0$ .

(3) Используя условия поперечности полей  $\theta$  и  $v$ , а именно  $\partial_i v_i = \partial_i \theta_i = 0$ , можно перебросить производную в вершине  $-\theta'_k(v_i \partial_i)\theta_k + \mathcal{A}_0 \cdot \theta'_k(\theta_i \partial_i)v_k$  на поле  $\theta'_k$ . Таким образом в любой 1–неприводимой диаграмме всегда можно перенести производную на «внешнее» поле  $\theta'_k$ , уменьшив таким образом индекс расходимости:  $d'_\Gamma = d_\Gamma - N_{\theta'}$ . Поле  $\theta'_k$  при этом будет входить в контрчлен только в виде производных  $\partial_i \theta'_k$ .

Стоит отметить, что при отсутствии второго члена в вершине (как в случае скалярного поля, так и в случае  $\mathcal{A}$ -модели при  $\mathcal{A} = 0$ ) под производной могут находиться как поле  $\theta$ , так и поле  $\theta'$ , поэтому в этом случае  $d'_\Gamma = d_\Gamma - N_{\theta'} - N_\theta$ .

Из таблицы 2.2 и (2.20) следует, что формальный индекс расходимости

$$d_\Gamma = d + 2 - (d + 1)N_{\theta'} + N_\theta - N_v, \quad (2.21)$$

реальный индекс расходимости

$$d'_\Gamma = (d + 2)(1 - N_{\theta'}) + N_\theta - N_v. \quad (2.22)$$

Таким образом, для любой размерности пространства  $d$  поверхностные расходимости могут присутствовать только в 1-неприводимых функциях 2 типов:

- $\langle \theta' \theta \dots \theta \rangle_{1\text{-непр}}$ , для которых  $N_{\theta'} = 1$ , а  $N_\theta$  является произвольным; для таких диаграмм  $d_\Gamma = 2$ ,  $d'_\Gamma = 0$ . При этом из пункта 2 следует, что для любой функции верно неравенство  $N_{\theta'} \geq N_\theta$ , поэтому существует только одна поверхностно расходящаяся функция, а именно  $\langle \theta'_\alpha \theta_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$ .
- $\langle \theta' \theta \dots \theta v \dots v \rangle_{1\text{-непр}}$ , для которых  $N_{\theta'} = 1$ ,  $N_\theta = N_v = A$ , где  $A$  — любое произвольное число; для данных диаграмм  $d_\Gamma = 1$ ,  $d'_\Gamma = 0$ . Учитывая условие  $N_{\theta'} \geq N_\theta$ , получаем, что существует только одна поверхностно расходящаяся функция, а именно  $\langle \theta'_\alpha \theta_\beta v_\gamma \rangle_{1\text{-непр}}$ . При этом из (2.7) и (2.16а) следует, что диаграммы, отвечающие данному контрчлену, тождественно равны нулю из-за замкнутого цикла запаздывающих пропагаторов.

### 2.2.4. Уравнение Дайсона

Введем обозначение  $\Gamma_2^{\alpha\beta} \equiv \langle \theta'_\alpha \theta_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$ . Данная функция удовлетворяет стандартному уравнению Дайсона, которое в импульсно-частотном представлении имеет вид

$$\Gamma_2^{\alpha\beta} = -i\omega \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0 \mathbf{p}_\perp^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0 f_0 \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} - \Sigma_{\alpha\beta}, \quad (2.23)$$

где  $\Sigma_{\alpha\beta}$  является оператором собственной энергии, диаграммное представление для которого показано на рисунке (2.5).

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{\text{a}}{\alpha} \left| \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \text{b} \quad \text{d} \\ \text{c} \\ \beta \end{array} \right. + \dots$$

Рис. 2.5. Диаграммное представление оператора собственной энергии  $\Sigma_{\alpha\beta}$ .

Многоточием обозначены 2-, 3-, и прочие N-петлевые диаграммы. При этом, благодаря  $\delta$ -корреляции по времени (см. (2.7)) и наличию запаздывающего пропагатора (2.16а), все многопетлевые диаграммы содержат замкнутые циклы таких пропагаторов и тождественно равны нулю. Например, для диаграмм, изображенных на рисунках 2.6а и 2.6б, аналитические выражения равны

$$I_1 \propto \theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3)\theta(t_3 - t_4)\delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4) \cong \theta(t_3 - t_2)\theta(t_2 - t_3), \quad (2.24)$$

$$I_2 \propto \theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3)\theta(t_3 - t_4)\delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3) \cong \theta(t_4 - t_2)\theta(t_2 - t_4). \quad (2.25)$$

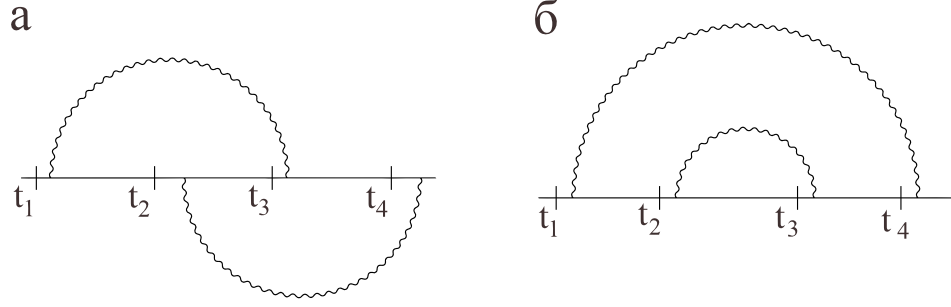


Рис. 2.6. Некоторые многопетлевые диаграммы оператора собственной энергии  $\Sigma_{\alpha\beta}$ .

Поэтому оператор собственной энергии  $\Sigma_{\alpha\beta}$  в (2.23) целиком представим в виде однопетлевого приближения

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{p}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{D_v(k)}{-i\omega + \nu_0 \left[ (\mathbf{p} + \mathbf{k})_{\perp}^2 + f_0 (p + k)_{\parallel}^2 \right]} \times J_{\alpha\beta}, \quad (2.26)$$

где индексная структура  $J_{\alpha\beta}$  равна

$$J_{\alpha\beta} = V_{\alpha ab}(\mathbf{p}) V_{dc\beta}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) P_{bd}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) n_a n_c. \quad (2.27)$$

Здесь  $V_{cab}(\mathbf{p})$  — вершина (2.12),  $D_v(k)$  определено в (2.8); греческие буквы  $\alpha, \beta$  и римские буквы  $a - d$  являются векторными индексами пропагаторов (2.6), (2.15a) и (2.15b) (суммирование по повторяющимся индексам подразумевается). Поскольку для процедуры ренормировки необходимо вычислить только расходящуюся часть (а индекс расходимости данной диаграммы  $d_{\Gamma} = 2$ ), необходимо вычислить только член, пропорциональный  $\mathbf{p}^2$ . При вычислениях необходимо учитывать, что

(1) Т. к. множитель  $D_v$  в корреляторе скорости (2.8) пропорционален  $\delta(k_{\parallel})$ , все члены, пропорциональные  $k_{\parallel}$ , окажутся равными нулю после интегрирования по импульсу  $\mathbf{k}$ .

(2) Как основное поле  $\boldsymbol{\theta}$ , так и вспомогательное поле  $\boldsymbol{\theta}'$  являются поперечными:  $\partial_\beta \theta_\beta = p_\beta \theta_\beta = 0$ ;  $\partial_\alpha \theta'_\alpha = p_\alpha \theta'_\alpha = 0$ . Поэтому все члены, пропорциональные  $p_\alpha$  или  $p_\beta$  окажутся равны нулю после свертки с внешними полями  $\boldsymbol{\theta}$  или  $\boldsymbol{\theta}'$  (см. рисунок 2.5).

Это дает следующее выражение для индексной структуры диаграммы  $\Sigma_{\alpha\beta}$ :

$$\Sigma_{\alpha\beta} \propto J_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \cdot (\mathbf{pn})^2 + (\mathcal{A} - 1) \cdot (\mathbf{pn})^2 \cdot \frac{k_\alpha^\perp k_\beta^\perp}{k^2} - \mathcal{A}(\mathcal{A} - 1) \cdot (\mathbf{pk}) \cdot \frac{(\mathbf{pn}) k_\beta n_\alpha}{k^2}. \quad (2.28)$$

Теперь необходимо проинтегрировать выражение (2.26) по  $d$ -мерному импульсу  $\mathbf{k}$  и частоте  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta} = i^2 \cdot \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{-i\omega + \nu_0 \left[ (\mathbf{p} + \mathbf{k})_\perp^2 + f_0 (p + k)_\parallel^2 \right]} \times \\ \times 2\pi \delta(k_\parallel) D_0 \cdot J_{\alpha\beta} / k_\perp^{d-1+\xi}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Интегрирование по частоте является тривиальным: благодаря доопределению  $\Theta$ -функции при совпадающих аргументах (см. приложение В.1)

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + \nu_0 \left[ (\mathbf{p} + \mathbf{k})_\perp^2 + f_0 (p + k)_\parallel^2 \right]} = \frac{1}{2}. \quad (2.30)$$

Для интегрирования по вектору  $\mathbf{k}$  необходимо усреднить данное выражение по углам, а затем выполнить интегрирование по модулю  $k \equiv |\mathbf{k}|$ :

$$\int d\mathbf{k} \cdot f(\mathbf{k}) = S_d \cdot \int_m^\infty dk \cdot \langle f(\mathbf{k}) \rangle, \quad (2.31)$$

где  $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$  является площадью поверхности единичной сферы в  $d$ -мерном пространстве; см. [21].

Таким образом необходимо усреднить по направлениям выражения  $k_\alpha^\perp k_\beta^\perp / k^2$  и  $(\mathbf{pk})k_\beta / k^2$ . Начнем с первого из них. Поскольку  $k_i$  и  $k_j$  являются независимыми компонентами вектора  $\mathbf{k}$ , их среднее значение

$$\left\langle \frac{k_i k_j}{k^2} \right\rangle \propto \delta_{ij}. \quad (2.32)$$

Это означает, что среднее значение  $\langle k_i^\perp k_j^\perp \rangle$  пропорционально той же матрице с единственным отличием – среднее значение отсутствующих элементов  $\langle k_\parallel k_\parallel \rangle$  равно нулю. Поэтому

$$\left\langle \frac{k_i^\perp k_j^\perp}{k_\perp^2} \right\rangle \propto P_{ij}(\mathbf{n}), \quad (2.33)$$

где  $P_{ij}(\mathbf{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j$  – поперечный проектор на единичный вектор  $\mathbf{n}$ .

Для того чтобы найти коэффициент пропорциональности, необходимо рассмотреть поперечный проектор на вектор  $\mathbf{k}_\perp$  и его среднее значение:

$$\langle P_{ij}(\mathbf{k}_\perp) \rangle = P_{ii}(\mathbf{k}_\perp) = d - 1. \quad (2.34)$$

С другой стороны из (2.33) следует, что

$$\langle P_{ij}(\mathbf{k}_\perp) \rangle = d - \left\langle \frac{k_i^\perp k_j^\perp}{k_\perp^2} \right\rangle = d - C \cdot (d - 1). \quad (2.35)$$

Таким образом из выражений (2.34) и (2.35) находим константу  $C$ :  $C = 1/(d - 1)$ , т. е.

$$\left\langle \frac{k_i^\perp k_j^\perp}{k_\perp^2} \right\rangle = \frac{P_{ij}(\mathbf{n})}{d - 1}. \quad (2.36)$$

Записывая выражение (2.36) через индексы  $\alpha, \beta$ , сворачивая правую и левую части с импульсом  $p_\alpha$  и учитывая поперечность поля  $\boldsymbol{\theta}'$  (см. пункт 2),



находим, что среднее значение  $(\mathbf{pk})k_\beta/k^2$  равно

$$\left\langle \frac{(\mathbf{pk})k_\beta}{k^2} \right\rangle = \mathbf{p}_\alpha \cdot P_{\beta\alpha}(\mathbf{n}) \cdot \frac{1}{d-1} = -\frac{(\mathbf{pn})}{d-1} \cdot n_\beta. \quad (2.37)$$

Таким образом, воспользовавшись (2.28), (2.31), (2.36) и (2.37), можно выполнить интегрирование выражения (2.29), в результате

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} D_0 \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} \cdot \int_m^\infty dk_\perp / k_\perp^{1+\xi} \times \\ &\times \left[ \delta_{\alpha\beta} \cdot (\mathbf{pn})^2 + (\mathcal{A} - 1) \cdot (\mathbf{pn})^2 \cdot \frac{P_{\alpha\beta}(\mathbf{n})}{d-1} + \mathcal{A}(\mathcal{A} - 1) \cdot (\mathbf{pn})^2 \cdot \frac{n_\alpha n_\beta}{d-1} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot D_0 \cdot C_{d-1} \cdot \left[ \frac{d-2+\mathcal{A}}{d-1} \cdot \delta_{\alpha\beta} + \frac{(\mathcal{A}-1)^2}{d-1} \cdot n_\alpha n_\beta \right] \cdot (\mathbf{pn})^2 \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}, \quad (2.38) \end{aligned}$$

где  $C_{d-1} \equiv S_{d-1}/(2\pi)^{d-1}$ , а  $D_0$  определено в (1.15).

## 2.3. МГД модель Крейчана (модель №2)

### 2.3.1. Постановка задачи. Функционал, диаграммная техника

Рассмотрим задачу магнитной гидродинамики, описываемую уравнениями (1.5) и (1.9), а именно

$$\partial_t \theta_i + \partial_k (v_k \theta_i - v_i \theta_k) = \nu_0 \partial^2 \theta_i + f_i, \quad (2.39)$$

где  $\nu_0$  — коэффициент диффузии, а  $f_i$  — поперечная гауссова случайная сила с нулевым средним и заданной парной корреляционной функцией:

$$\langle f_i(t, \mathbf{x}) f_k(t', \mathbf{x}') \rangle = \delta(t - t') C_{ik}(\mathbf{r}/L). \quad (2.40)$$

Здесь  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , параметр  $L \equiv M^{-1}$  является внешним масштабом турбулентности, связанным со сторонней силой, а  $C_{ik}$  — безразмерные функции, конечные при  $r/L \rightarrow 0$  и убывающие при  $r/L \rightarrow \infty$ .

Поле скорости  $\mathbf{v}(x)$  выбирается гауссовым, с нулевым временем корреляции, статистически изотропным и несжимаемым, с парной корреляционной функцией (1.3):

$$\langle v_i(x)v_j(x') \rangle = \delta(t-t') \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} P_{ij}(\mathbf{k}) D_0 \frac{1}{k^{d+\xi}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \quad (2.41)$$

В соответствии с разделом 2.1, данная стохастическая задача эквивалентна квантовополевой модели для набора из 3 полей  $\Phi = \{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}', \mathbf{v}\}$  с функционалом действия

$$\begin{aligned} S(\Phi) = & \theta'_i \left[ -\partial_t \theta_i + \nu_0 \partial^2 \theta_i - \partial_k (v_k \theta_i - v_i \theta_k) \right] + \\ & + \theta'_i D_\theta \theta'_k / 2 + -v_i D_v^{-1} v_k / 2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где первые 4 члена представляют собой действие (2.2) для стохастической задачи (2.39), (2.40) при фиксированной  $\mathbf{v}$ , а последний член есть гауссово усреднение по  $\mathbf{v}$ .

Такой модели соответствует тройная вершина

$$V_{cab} = (\partial_a \theta'_c) (v_a \theta_c - v_c \theta_a), \quad (2.43)$$

а также три затравочных пропагатора:  $\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0$ ,  $\langle \theta_i \theta_k \rangle_0$  и  $\langle v_i v_k \rangle_0$ , диаграммное представление для которых совпадает с моделью №1 и представлено на рисунках (2.1) — (2.4).

В импульсно-частотном представлении вершине соответствует множитель

$$V_{cab} = i\delta_{bc} p_a^{\theta'} - i\delta_{ac} p_b^{\theta'}, \quad (2.44)$$

где  $p^{\theta'}$  — импульс поля  $\boldsymbol{\theta}'$ .

Из действия (2.42) следует, что в импульсно-частотном представлении пропагаторам отвечают выражения

$$\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0 = \frac{P_{ik}(\mathbf{k})}{-i\omega + \nu_0 \mathbf{k}^2}, \quad (2.45a)$$

$$\langle \theta_i \theta_k \rangle_0 = \frac{C_{ik}(\mathbf{k})}{\omega^2 + \nu_0^2 \mathbf{k}^4}, \quad (2.45b)$$

$$\langle v_i v_k \rangle_0 = D_0 \cdot \frac{P_{ik}(\mathbf{k})}{k^{d+\xi}}, \quad (2.45c)$$

где  $C_{ik}(\mathbf{k})$  является фурье-образом функции  $C_{ik}(\mathbf{r}/L)$  из (2.40).

В импульсно-временном представлении пропагаторам (2.45a) и (2.45b) отвечают выражения

$$\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0 = P_{ik}(\mathbf{k}) \cdot \Theta(t - t') \exp \{ -(t - t') \epsilon_{\mathbf{k}} \}, \quad (2.46a)$$

$$\langle \theta_i \theta_k \rangle_0 = \{ C_{ik}(\mathbf{k}) / 2\epsilon_{\mathbf{k}} \} \cdot \exp \{ -|t - t'| \epsilon_{\mathbf{k}} \}, \quad (2.46b)$$

где  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \nu_0 \mathbf{k}^2$ . Это означает, что также, как и в модели №1, пропагатор полей  $\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0$  является запаздывающим.

### 2.3.2. Канонические размерности

Канонические размерности полей и параметров модели (2.42) представлены в таблице 2.2, включая ренормированные аналоги, которые будут введены позже. Также как и в модели №1, любая величина имеет две независимых размерности — частотную и импульсную, т. е.

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L]^{-d_F^k}, \quad (2.47)$$

где  $T$  и  $L$  являются временным и пространственным масштабами.

Таблица 2.2. Канонические размерности полей и параметров в модели (2.42).

$F$	$\theta'$	$\theta$	$\mathbf{v}$	$M, m, \mu, \Lambda$	$\nu, \nu_0$	$\hat{g}_0, g_0$	$\hat{g}, g$
$d_F^\omega$	1/2	-1/2	1	0	1	0	0
$d_F^k$	$d$	0	-1	1	-2	$\xi$	0
$d_F$	$d + 1$	-1	1	1	0	$\xi$	0

Из таблицы 2.2 следует, что данная модель является логарифмической (константа взаимодействия  $g_0 \sim [L]^{-\xi}$  безразмерная) при  $\xi = 0$ , т. о. УФ-расходимости функций Грина проявляются в виде полюсов по  $\xi$ .

Как и в модели №1, верны три утверждения раздела 2.2.3, а также формулы (2.21) и (2.22).

Таким образом для любой размерности пространства  $d$  существует только одна нетривиальная поверхностно расходящаяся функция —  $\langle \theta'_\alpha \theta_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$ .

### 2.3.3. Уравнение Дайсона

Как и в разделе 2.2.4, введем обозначение  $\Gamma_2^{\alpha\beta} \equiv \langle \theta'_\alpha \theta_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$ . Данная функция удовлетворяет стандартному уравнению Дайсона, которое, учитывая поперечность полей  $\boldsymbol{\theta}$  и  $\boldsymbol{\theta}'$ , в импульсно-частотном представлении имеет вид

$$\Gamma_2^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = [-i\omega + \nu_0 p^2] \cdot P_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) - \Sigma_{\alpha\beta}, \quad (2.48)$$

где  $\Sigma_{\alpha\beta}$  является оператором собственной энергии, диаграммное представление для которого показано на рисунке (2.7).

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \text{diagram with vertices } \alpha, b, d, \beta \text{ and a wavy loop between } b \text{ and } d.$$

Рис. 2.7. Диаграммное представление оператора собственной энергии  $\Sigma_{\alpha\beta}$ .

Как и в разделе 2.2.4, благодаря  $\delta$ -корреляции по времени и наличию за-  
паздывающего пропагатора (2.46а), все многопетлевые диаграммы тожде-  
ственно равны нулю. Поэтому оператор собственной энергии дается своим  
однопетлевым приближением *точно*.

В однопетлевом приближении оператор собственной энергии  $\Sigma_{\alpha\beta}$  име-  
ет вид

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{p}) = D_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{P_{ac}(\mathbf{k})}{k^{d+\xi}} \frac{P_{bd}(\mathbf{p} + \mathbf{k})}{-i\omega + \nu_0(\mathbf{p} + \mathbf{k})^2} \cdot V_{\alpha ab}(\mathbf{p}) \cdot V_{dc\beta}(\mathbf{p} + \mathbf{k}), \quad (2.49)$$

где  $V_{cab}$  — вершина (2.44); греческие буквы  $\alpha, \beta$  и римские буквы  $a - d$   
являются векторными индексами пропагаторов (2.45а) — (2.45с).

Интеграл по частоте

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + \nu(\mathbf{p} + \mathbf{k})^2} = \frac{1}{2} \quad (2.50)$$

в силу доопределения  $\Theta$ -функции при совпадающих аргументах (см. при-  
ложение В.1).

Взяв след от (2.48), получаем скалярное уравнение

$$\Gamma_2(\omega, \mathbf{p}) = -i\omega + \nu_0 k^2 - \Sigma(\omega, \mathbf{p}), \quad (2.51)$$

где

$$\Sigma(\omega, \mathbf{p}) \equiv \Sigma_{\alpha\alpha}(\omega, \mathbf{p}) / (d - 1) \quad (2.52)$$

(след поперечного проектора  $P_{ii}(\mathbf{k}) = (d - 1)$ ).

Обозначим за  $J_{\alpha\alpha}$  индексную структуру оператора  $\Sigma_{\alpha\alpha}$ :

$$J_{\alpha\alpha} = V_{\alpha ab}(\mathbf{p})V_{dc\alpha}(\mathbf{p} + \mathbf{k})P_{bd}(\mathbf{p} + \mathbf{k})P_{ac}(\mathbf{k}). \quad (2.53)$$

Необходимо отметить, что поперечность вершины  $V(\Phi)$  сильно упрощает вычисления:

$$p_c V_{cab}(\mathbf{p}) = p_c(p_a \delta_{bc} - p_b \delta_{ac}) = 0. \quad (2.54)$$

Учитывая, что

$$P_{bd}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \cdot V_{dc\alpha}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) = \left( \delta_{bd} - \frac{(p+k)_b(p+k)_d}{(p+k)^2} \right) \cdot V_{dc\alpha}(\mathbf{p} + \mathbf{k}), \quad (2.55)$$

получаем, что действие поперечного проектора сводится с  $\delta$ -символу:

$$P_{bd}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \cdot V_{dc\alpha}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) = \delta_{bd} \cdot V_{dc\alpha}(\mathbf{p} + \mathbf{k}). \quad (2.56)$$

Таким образом выражение для  $J_{\alpha\alpha}$  сильно упрощается:

$$J_{\alpha\alpha} = V_{\alpha ab}(\mathbf{p})V_{bc\alpha}(\mathbf{p})P_{ac}(\mathbf{k}). \quad (2.57)$$

Теперь необходимо проинтегрировать данное выражение по импульсу  $\mathbf{k}$  с учетом множителей  $D_0/(2\pi)^d$ ,  $1/(d-1)$ ,  $1/2$  и  $1/k^{d+\xi}$ :

$$\Sigma = \Sigma_{\alpha\alpha}/(d-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{D_0}{d-1} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{k^{d+\xi}} \times J_{\alpha\alpha}. \quad (2.58)$$

Для этого необходимо воспользоваться способом, описанным в разделе 2.2.4 (формула (2.31)) — необходимо усреднить подинтегральное выражение по углам, а затем выполнить интегрирование по модулю  $k \equiv |\mathbf{k}|$ .

Вычислим среднее значение поперечного проектора  $P_{ac}(\mathbf{k})$  по направлениям в  $d$ -мерном пространстве. Для этого рассмотрим усреднение по направлениям единичного вектора  $\mathbf{n}$ :

$$\langle n_{i_1} \rangle_{\mathbf{n}} = 0, \quad (2.59a)$$

$$\langle n_{i_1} n_{i_2} n_{i_3} \rangle_{\mathbf{n}} = 0, \quad (2.59b)$$

аналогично среднее от произведения любого нечетного числа сомножителей равно нулю;

$$\langle n_{i_1} n_{i_2} \rangle_{\mathbf{n}} = C \delta_{i_1 i_2}. \quad (2.60)$$

Взяв след от обеих частей равенства, находим константу  $C$ :

$$C = \frac{1}{d}, \quad (2.61)$$

т. о.

$$\langle n_{i_1} n_{i_2} \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{\delta_{i_1 i_2}}{d}. \quad (2.62)$$

Рассмотрим произвольные вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\langle a_i b_j \rangle_{\mathbf{n}} = \delta_{ij} \cdot \tilde{C}. \quad (2.63)$$

Взяв след от обеих частей равенства (2.63), получаем, что

$$\langle a_i b_j \rangle_{\mathbf{n}} = \delta_{ij} \cdot \frac{\langle (\mathbf{a}\mathbf{b}) \rangle}{d}. \quad (2.64)$$

При  $a = b$  из (2.64) следует, что

$$\langle (\mathbf{p}\mathbf{a})^2 \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{p^2 a^2}{d}. \quad (2.65)$$

С другой стороны,

$$\langle (\mathbf{p}\mathbf{a})^2 \rangle_{\mathbf{n}} = p^2 a^2 \langle \cos^2 \theta \rangle_{\mathbf{n}}, \quad (2.66)$$

т. е.

$$\langle \cos^2 \theta \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{1}{d}. \quad (2.67)$$

Рассмотрим поперечный проектор  $P_{ij}(\mathbf{k})$ . Из (2.67) следует, что

$$\langle P_{ij}(\mathbf{k})p_ip_j \rangle_{\mathbf{n}} = \langle p^2 (1 - \cos^2 \theta) \rangle_{\mathbf{n}} = p^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{d}\right) = p^2 \cdot \frac{d-1}{d}, \quad (2.68)$$

т. о.

$$\langle P_{ij}(\mathbf{k}) \rangle = \delta_{ij} \cdot \frac{(d-1)}{d}. \quad (2.69)$$

Возвращаясь к выражению (2.58), находим, что

$$\begin{aligned} \Sigma &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{D_0}{d-1} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \cdot \delta_{ac} \cdot \frac{(d-1)}{d} \cdot V_{\alpha ab}(\mathbf{p})V_{bc\alpha}(\mathbf{p}) \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\xi}} = \\ &= -\frac{D_0}{2d} \cdot \frac{S_d}{(2\pi)^d} \cdot V_{\alpha ab}(\mathbf{p})V_{ba\alpha}(\mathbf{p}) \cdot \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\xi}}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Из явных вычислений следует, что

$$V_{\alpha ab}(\mathbf{p})V_{ba\alpha}(\mathbf{p}) = p^2 \cdot (d-1), \quad (2.71)$$

т. о. в результате получаем следующий ответ:

$$\Sigma = -p^2 \cdot D_0 \frac{(d-1)}{2d} \cdot C_d \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}, \quad (2.72)$$

где  $C_d \equiv S_d/(2\pi)^d$ , а  $D_0$  определено в (1.4).



## 2.4. Перенос пассивного векторного поля полем скорости, подчиняющимся стохастическому уравнению Навье–Стокса (модель №3)

### 2.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение конвекции–диффузии, аналогичное модели №1 (см. (1.7) и (2.3)), а именно

$$\partial_t \theta_i + \partial_k (v_k \theta_i - \mathcal{A}_0 v_i \theta_k) + \partial_i \mathcal{P} = \kappa_0 \partial^2 \theta_i + f_i, \quad (2.73)$$

где  $\kappa_0$  — коэффициент диффузии,  $f_i$  — поперечная гауссова случайная сила с нулевым средним и заданной парной корреляционной функцией:

$$\langle f_i(x) f_k(x') \rangle = \delta(t - t') C_{ik}(\mathbf{r}/L), \quad (2.74)$$

а поле скорости  $\mathbf{v}$  подчиняется стохастическому уравнению Навье–Стокса (1.16), а именно

$$\partial_t v_i + (v_k \partial_k) v_i = \nu_0 \partial^2 v_i - \partial_i \varphi + \eta_i. \quad (2.75)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\eta_i$  — удельные по массе давление и поперечная случайная сила. Для  $\boldsymbol{\eta}$  предполагается гауссово распределение с нулевым средним и корреляционной функцией:

$$\langle \eta_i(x) \eta_j(x') \rangle = \frac{\delta(t - t')}{(2\pi)^d} \int_{k \geq m} d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) d_\eta(k) \exp[\mathbf{i}\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')], \quad (2.76)$$

где  $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$  — поперечный проектор, а функция  $d_\eta(k)$  определена в (1.18). Величина  $m = 1/\tilde{L}$ , обратная внешнему масштабу турбулентности  $\tilde{L}$ , обеспечивает ИК–регуляризацию. Для простоты мы будем

отождествлять данный внешний масштаб  $\tilde{L}$ , связанный с полем скорости, с внешним масштабом случайной силы  $L$ , введенным в (2.74).

Как пассивное поле  $\boldsymbol{\theta}$ , так и перемешивающее поле  $\mathbf{v}$  являются поперечными,  $\partial_i \theta_i = \partial_i v_i = 0$ , а члены  $\partial \mathcal{P}$  и  $\partial \mathcal{Q}$  необходимы для согласования данных условий поперечности с динамикой, подробнее см. приложение А.3.

## 2.4.2. Квантово–полевая формулировка

В соответствии с разделом 2.1, данная стохастическая задача эквивалентна квантовополевой модели для набора из 4 полей  $\Phi = \{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}', \mathbf{v}, \mathbf{v}'\}$  с функционалом действия

$$S(\Phi) = S_v(\mathbf{v}, \mathbf{v}') + \theta'_i D_\theta \theta'_k / 2 + \theta'_k \left[ -\partial_t \theta_k - (v_i \partial_i) \theta_k + \mathcal{A}_0 (\theta_i \partial_i) v_k + \kappa_0 \partial^2 \theta_k \right], \quad (2.77)$$

где  $D_\theta$  — корреляционная функция (2.74), а  $S_v$  — функционал действия для задачи (2.75) — (2.76):

$$S_v(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = v'_i D_v v'_k / 2 + v'_k \left[ -\partial_t v_k - (v_i \partial_i) v_k + \nu_0 \partial^2 v_k \right]. \quad (2.78)$$

В действии (2.78)  $D_v$  — корреляционная функция (2.76) случайной силы  $\eta_i$ .

Данной модели соответствует 2 тройных вершины:

$$V_{cab}^\theta = (\partial_a \theta'_c) (v_a \theta_c - \mathcal{A}_0 v_c \theta_a) \quad (2.79)$$

и

$$V_{cab}^v = (\partial_a v'_c) (v_a v_c + v_c v_a), \quad (2.80)$$

а также четыре затравочных пропагатора:  $\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0$ ,  $\langle \theta_i \theta_k \rangle_0$ ,  $\langle v_i v'_k \rangle_0$  и  $\langle v_i v_k \rangle_0$  (линии  $\langle \theta'_i \theta'_k \rangle_0$  и  $\langle v'_i v'_k \rangle_0$  тождественно равны нулю), диаграммное представление для которых представлено на рисунках (2.8) — (2.13):

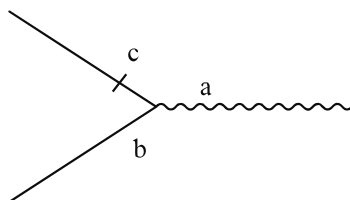


Рис. 2.8. Диаграммное представление тройной вершины  $V_{cab}^{\theta}$ .

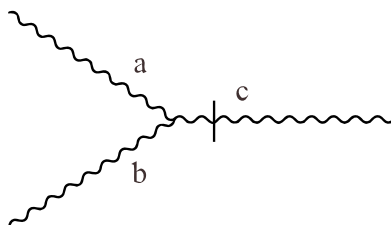


Рис. 2.9. Диаграммное представление тройной вершины  $V_{cab}^v$ .

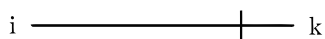


Рис. 2.10. Диаграммное представление пропагатора  $\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0$ .

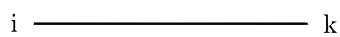


Рис. 2.11. Диаграммное представление пропагатора  $\langle \theta_i \theta_k \rangle_0$ .

Рис. 2.12. Диаграммное представление пропагатора  $\langle v_i v'_k \rangle_0$ .Рис. 2.13. Диаграммное представление пропагатора  $\langle v_i v_k \rangle_0$ .

Здесь и далее перечеркнутый конец соответствует полю  $\boldsymbol{\theta}'$ , конец без черты — полю  $\boldsymbol{\theta}$ .

В импульсно–частотном представлении вершинам соответствуют множители

$$V_{cab}^{\theta} = i\delta_{bc} p_a^{\theta'} - i\mathcal{A}_0 \delta_{ac} p_b^{\theta'}, \quad (2.81)$$

$$V_{cab}^v = i\delta_{bc} p_a^{v'} + i\delta_{ac} p_b^{v'}, \quad (2.82)$$

где  $p^{\theta'}$  — импульс поля  $\boldsymbol{\theta}'$ , а  $p^{v'}$  — импульс поля  $\mathbf{v}'$ .

Пропагаторам в импульсно–частотном представлении отвечают выражения

$$\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0 = \frac{P_{ik}(\mathbf{k})}{-i\omega + \kappa_0 \mathbf{k}^2}, \quad (2.83a)$$

$$\langle \theta_i \theta_k \rangle_0 = \frac{C_{ik}(\mathbf{k})}{\omega^2 + \kappa_0^2 \mathbf{k}^4}, \quad (2.83b)$$

$$\langle v_i v'_k \rangle_0 = \frac{P_{ik}(\mathbf{k})}{-i\omega + \nu_0 \mathbf{k}^2}, \quad (2.83c)$$

$$\langle v_i v_k \rangle_0 = \frac{P_{ik}(\mathbf{k}) d_{\eta}(k)}{\omega^2 + \nu_0^2 \mathbf{k}^4}, \quad (2.83d)$$

где  $C_{ik}(\mathbf{k})$  является фурье-образом функции  $C_{ik}(\mathbf{r}/L)$  из (2.74), а  $d_\eta(k)$  определено в (1.18).

В импульсно-временном представлении пропагаторам (2.83а) и (2.83с) отвечают выражения

$$\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0 = P_{ik}(\mathbf{k}) \cdot \Theta(t - t') \exp \{ -(t - t') \epsilon_{\mathbf{k}}^\theta \}, \quad (2.84a)$$

$$\langle v_i v'_k \rangle_0 = P_{ik}(\mathbf{k}) \cdot \Theta(t - t') \exp \{ -(t - t') \epsilon_{\mathbf{k}}^v \}, \quad (2.84b)$$

где  $\epsilon_{\mathbf{k}}^\theta = \kappa_0 \mathbf{k}^2$ , а  $\epsilon_{\mathbf{k}}^v = \nu_0 \mathbf{k}^2$ . Выражения (2.84) означают, что пропагаторы  $\langle \theta_i \theta'_k \rangle_0$  и  $\langle v_i v'_k \rangle_0$  являются запаздывающими.

### 2.4.3. Канонические размерности

Канонические размерности полей и параметров модели (2.77) представлены в таблице 2.3, включая ренормированные аналоги, которые будут введены позже. Вычисления основываются на том, что каждый член функционала действия должен быть безразмерным, и для данной задачи находятся в приложении В.3.

Роль констант связи играют три параметра:  $g_0 \equiv D_0/\nu_0^3$ ,  $\mathcal{A}_0$  и безразмерная величина  $u_0 = \kappa_0/\nu_0$ , являющаяся аналогом обратного числа Прандтля в скалярном случае. Как и в моделях №1 и №2, любая величина имеет две независимых размерности — частотную и импульсную, т. е.

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L]^{-d_F^k}, \quad (2.85)$$

где  $T$  и  $L$  являются временным и пространственным масштабами.

Таблица 2.3. Канонические размерности полей и параметров в модели (2.77).

$F$	$\theta'$	$\theta$	$\mathbf{v}'$	$\mathbf{v}$	$M, m, \mu, \Lambda$	$\nu, \nu_0, \kappa, \kappa_0$	$\mathcal{A}, \mathcal{A}_0$	$u, u_0$	$\hat{g}_0, g_0$	$\hat{g}, g$
$d_F^\omega$	1/2	-1/2	-1	1	0	1	0	0	0	0
$d_F^k$	$d$	0	$d+1$	-1	1	-2	0	0	$\xi$	0
$d_F$	$d+1$	-1	$d-1$	1	1	0	0	0	$\xi$	0

Из таблицы 2.3 следует, что данная модель является логарифмической (константа взаимодействия  $g_0 \sim [L]^{-\xi}$  является безразмерной) при  $\xi = 0$ ; константы взаимодействия  $\mathcal{A}_0$  и  $u_0$  являются безразмерными при любых  $d$  и  $\xi$ . Таким образом УФ–расходимости функций Грина проявляются в виде полюсов по  $\xi$ .

Аналогично разделу 2.2.3, канонические размерности произвольных 1–неприводимых функций Грина  $\Gamma = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1\text{-непр}}$  даются соотношением

$$d_\Gamma = d + 2 - \sum_{\Phi} N_\Phi d_\Phi = d + 2 - N_{\theta'} d_{\theta'} - N_\theta d_\theta - N_v d_v - N_{v'} d_{v'}, \quad (2.86)$$

где  $N_\Phi = \{N_\theta, N_{\theta'}, N_v, N_{v'}\}$  является числом полей, входящих в данную функцию Грина.

Поверхностные УФ–расходимости, для устранения которых необходимо введение контрчленов, присутствуют только в тех функциях  $\Gamma$ , для которых «формальный индекс расходимости»  $d_\Gamma$  является целым неотрицательным числом. Кроме того, как и в разделе 2.2.3, необходимо учитывать следующие замечания:

(1) Для любой динамической модели вида (2.77), 1–неприводимые функции Грина, не содержащие дополнительных полей  $\theta'$  или  $\mathbf{v}'$  (т. е. те,

для которых  $N_{\theta'} = N_{v'} = 0$ ), содержат замкнутые циклы запаздывающих пропагаторов (2.84a) либо (2.84b), и таким образом обращаются в нуль.

(2) Для любой 1-неприводимой функции Грина  $N_{\theta'} - N_{\theta} = 2N_0$ , где  $N_0 \geq 0$  является числом затравочных пропагаторов  $\langle \theta\theta \rangle_0$ , входящих в любую из ее диаграмм. Поскольку вершина  $V_{cab}^v$  (2.80) содержит два поля  $v$ , линии  $\langle vv' \rangle$  «ветвятся» и для полей  $v$  и  $v'$  подобное соотношение не верно.

(3) Используя условия поперечности полей  $\theta$  и  $\mathbf{v}$ , а именно  $\partial_i v_i = \partial_i \theta_i = 0$ , можно перебросить производную в вершине  $-\theta'_k (v_i \partial_i) \theta_k + \mathcal{A}_0 \theta'_k (\theta_i \partial_i) v_k$  на поле  $\theta'_k$ . Таким образом в любой 1-неприводимой диаграмме всегда можно перенести производную на «внешнее» поле  $\theta'_k$ , уменьшив таким образом индекс расходимости на величину  $N_{\theta'}$ ; в свою очередь в вершине  $v'_k (v_i \partial_i) v_k$  можно перебросить производную на поле  $v'$ , что приводит к уменьшению индекса расходимости на величину  $N_{v'}$ ; поля  $\theta$  и  $\mathbf{v}$  целиком поместить под производную не удастся. Таким образом  $d'_\Gamma = d_\Gamma - N_{\theta'} - N_{v'}$ . Поля  $\theta'_k$  и  $v'_k$  при этом будут входить в контрчлен только в виде производных  $\partial_i \theta'_k, \partial_i v'_k$ .

Из таблицы 2.3 и (2.86) следует, что формальный индекс расходимости

$$d_\Gamma = d + 2 - (d + 1)N_{\theta'} + N_{\theta} - N_v - (d - 1)N_{v'}, \quad (2.87)$$

а реальный индекс расходимости

$$d'_\Gamma = (d + 2)(1 - N_{\theta'}) + N_{\theta} - N_v - dN_{v'}. \quad (2.88)$$

Таким образом, для любой размерности пространства  $d$  поверхностные расходимости могут присутствовать в 1-неприводимых функциях 3 типов:

- $\langle \theta' \theta \dots \theta \rangle_{1\text{-непр}}$ , для которых  $N_{\theta'} = 1, N_{v'} = N_v = 0$ , а  $N_{\theta}$  является про-

извольным; для таких диаграмм  $d_\Gamma = 2$ ,  $d'_\Gamma = 0$ . При этом из пункта 2 следует, что для любой функции верно неравенство  $N_{\theta'} \geq N_\theta$ , т. о. существует только одна поверхностно расходящаяся функция, а именно  $\langle \theta'_\alpha \theta_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$ ;

- $\langle v'_\alpha v_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$ , для которой  $N_{v'} = N_v = 1$ ,  $N_{\theta'} = N_\theta = 0$ ; для данной диаграммы  $d_\Gamma = 2$ ,  $d'_\Gamma = 1$ ;
- $\langle v'_\alpha v_\beta v_\gamma \rangle_{1\text{-непр}}$ , для которой  $N_{v'} = 1$ ,  $N_v = 2$ ,  $N_{\theta'} = N_\theta = 0$ ; для данной диаграммы  $d_\Gamma = 1$ ,  $d'_\Gamma = 0$ . Поскольку индекс расходимости  $d_\Gamma = 1$ , контрчлен должен быть пропорционален  $\partial_i v_k$ , при этом в силу пункта 3 любой контрчлен должен иметь по одной пространственной производной на каждое вспомогательное поле. Это требование исключает контрчлен  $v' \partial_t v$ , вследствие чего исключается также и структура  $v'(v \partial)v$ , поскольку в силу галилеевой симметрии они должны входить в контрчлены только в галилеево-инвариантных комбинациях  $v' \nabla_t v$  (подробнее см. приложение А.1.1).
- $\langle \theta' \theta \dots \theta v \dots v \rangle_{1\text{-непр}}$ , для которых  $N_{\theta'} = 1$ ,  $N_\theta = N_v = A$ , где  $A$  — любое произвольное число; для данных диаграмм  $d_\Gamma = 1$ ,  $d'_\Gamma = 0$ . При этом в силу условия  $N_{\theta'} \geq N_\theta$  оказывается, что существует только одна поверхностно расходящаяся функция, а именно  $\langle \theta'_\alpha \theta_\beta v_\gamma \rangle_{1\text{-непр}}$ .

#### 2.4.4. Уравнение Дайсона для функции $\langle v'_\alpha v_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$

Введем обозначение  $\Gamma_{2,v}^{\alpha\beta} \equiv \langle v'_\alpha v_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$ . Данная функция удовлетворяет стандартному уравнению Дайсона, которое в импульсно-частотном представлении имеет вид



$$\Gamma_{2,v}^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = [-i\omega + \nu_0 p^2] P_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) - \Sigma_{\alpha\beta}^v, \quad (2.89)$$

где  $\Sigma_{\alpha\beta}^v$  является оператором собственной энергии, диаграммное представление для которого показано на рисунке (2.14).

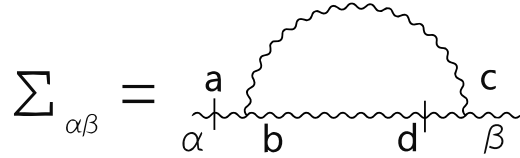


Рис. 2.14. Диаграммное представление оператора собственной энергии  $\Sigma_{\alpha\beta}^v$ .

Как и в разделах 2.2.4 и 2.3.3, благодаря  $\delta$ -корреляции по времени и наличию запаздывающего пропагатора (2.84b), все многопетлевые диаграммы тождественно равны нулю. Поэтому оператор собственной энергии дается своим однопетлевым приближением *точно*.

Взяв след от (2.89), получаем скалярное уравнение

$$\Gamma_{2,v}(\omega, \mathbf{p}) = -i\omega + \nu_0 p^2 - \Sigma^v(\omega, \mathbf{p}), \quad (2.90)$$

где

$$\Sigma^v(\omega, \mathbf{p}) \equiv \Sigma_{\alpha\alpha}^v(\omega, \mathbf{p}) / (d - 1). \quad (2.91)$$

Обозначим за  $J_{\alpha\alpha}^v$  индексную структуру оператора  $\Sigma_{\alpha\alpha}^v$ :

$$J_{\alpha\alpha}^v = V_{\alpha ab}^v(\mathbf{p}) V_{d c\alpha}^v(\mathbf{p} + \mathbf{k}) P_{bd}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) P_{ac}(\mathbf{k}), \quad (2.92)$$

тогда

$$\Sigma_{\alpha\alpha}^v = i^2 \cdot \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(-i\omega + \nu_0 [\mathbf{p} + \mathbf{k}]^2)} \cdot \frac{d_\eta(k)}{(\omega^2 + \nu_0^2 \mathbf{k}^4)} \times J_{\alpha\alpha}^v, \quad (2.93)$$

где  $d_\eta(k) = D_0/k^{4-d-\xi}$ , а  $D_0 = \hat{g}_0 \nu_0^3$  (см. раздел 1.5). В отличие от раздела 2.3.3, вершина (2.80) не является поперечной, что делает вычисления более громоздкими.

Как и в разделах 2.2.4 и 2.3.3, индекс расходимости данной диаграммы  $d_\Gamma = 2$ , поэтому необходимо вычислить только члены, пропорциональные  $p^2$ .

Из явных вычислений следует, что

$$J_{\alpha\alpha}^v = -p \cdot \{2k \cos \phi \cdot \sin^2 \phi\} + p^2 \cdot \{\sin^2 \phi \cdot (d - 2 + \cos^2 \phi) + 2 \sin^2 \phi \cdot \cos^2 \phi - \sin^4 \phi\} + O(p^3), \quad (2.94)$$

где  $\phi$  — угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$ ,  $p$  и  $k$  — модули векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$ ; в силу того, что  $d_\Gamma = 2$ , члены порядка  $p^3$  и выше не требуются.

Интегрируя (2.93) по частоте, получаем

$$\Sigma_{\alpha\alpha}^v = \frac{i^2}{2\nu_0^2} \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{d_\eta(k)}{k^2 [k^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{k})^2]} \times J_{\alpha\alpha}^v. \quad (2.95)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{k^2 + (\mathbf{p} + \mathbf{k})^2} \simeq \frac{1}{2k^2} - \frac{\cos \phi}{2k^3} \cdot p + O(p^2) \quad (2.96)$$

получаем, что

$$\Sigma_{\alpha\alpha}^v = -\frac{1}{4\nu_0^2} \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{d_\eta(k)}{k^4} \times \tilde{J}_{\alpha\alpha}^v, \quad (2.97)$$

где

$$\tilde{J}_{\alpha\alpha}^v = p^2 \cdot \{\sin^2 \phi \cdot (d - 2 + \cos^2 \phi) + 4 \sin^2 \phi \cdot \cos^2 \phi - \sin^4 \phi\} + O(p^3). \quad (2.98)$$

Для усреднения выражения (2.98) по направлениям воспользуемся формулами, аналогичными разделу 2.3.3, а именно

$$\langle n_{i_1} n_{i_2} \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{\delta_{i_1 i_2}}{d}, \quad (2.99a)$$

$$\langle n_{i_1} n_{i_2} n_{i_3} n_{i_4} \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}}{d(d+2)}, \quad (2.99b)$$

и их следствиями:

$$\langle \cos^2 \phi \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{1}{d}, \quad (2.100a)$$

$$\langle \cos^4 \phi \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{3}{d(d+2)}. \quad (2.100b)$$

Усредняя по направлениям выражение для  $\tilde{J}_{\alpha\alpha}^v$ , выполняя в (2.97) интегрирование по  $k = |\mathbf{k}|$  и учитывая, что  $\Sigma^v = \Sigma_{\alpha\alpha}^v / (d-1)$  получаем, что

$$\begin{aligned} \Sigma^v &= -\frac{1}{4\nu_0^2} \cdot D_0 \cdot p^2 \cdot \frac{1}{d-1} \cdot \int_m^\infty \frac{dk}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{k^{1+\xi}} \cdot \frac{(d-1)^2}{d+2} = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \hat{g}_0 \nu_0 \cdot p^2 \cdot C_d \cdot \frac{d-1}{d+2} \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

#### 2.4.5. Уравнение Дайсона для функции $\langle \theta'_\alpha \theta_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$

Введем обозначение  $\Gamma_2^{\alpha\beta} \equiv \langle \theta'_\alpha \theta_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$ . Как и в разделе 2.4.4, данная функция удовлетворяет стандартному уравнению Дайсона, которое в импульсно-частотном представлении имеет вид

$$\Gamma_2^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = [-i\omega + \kappa_0 p^2] P_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) - \Sigma_{\alpha\beta}, \quad (2.102)$$

где  $\Sigma_{\alpha\beta}$  является оператором собственной энергии, диаграммное представление для которого показано на рисунке (2.15).

Также как и в разделах 2.2.4, 2.3.3 и 2.4.4, благодаря  $\delta$ -корреляции по времени и наличию запаздывающего пропагатора (2.84а), все многопетлевые диаграммы тождественно равны нулю. Поэтому оператор собственной энергии дается своим однопетлевым приближением *точно*.

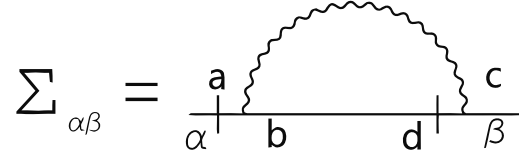


Рис. 2.15. Диаграммное представление оператора собственной энергии  $\Sigma_{\alpha\beta}$ .

Взяв след от (2.102), получаем скалярное уравнение

$$\Gamma_2(\omega, \mathbf{p}) = -i\omega + \kappa_0 p^2 - \Sigma(\omega, \mathbf{p}), \quad (2.103)$$

где

$$\Sigma(\omega, \mathbf{p}) \equiv \Sigma_{\alpha\alpha}(\omega, \mathbf{p})/(d-1). \quad (2.104)$$

Обозначим за  $J_{\alpha\alpha}$  индексную структуру оператора  $\Sigma_{\alpha\alpha}$ :

$$J_{\alpha\alpha} = V_{\alpha ab}^\theta(\mathbf{p}) V_{d c \alpha}^\theta(\mathbf{p} + \mathbf{k}) P_{bd}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) P_{ac}(\mathbf{k}), \quad (2.105)$$

тогда

$$\Sigma_{\alpha\alpha} = i^2 \cdot \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(-i\omega + \kappa_0 [\mathbf{p} + \mathbf{k}]^2)} \cdot \frac{d_\eta(k)}{(\omega^2 + \nu_0^2 \mathbf{k}^4)} \times J_{\alpha\alpha}, \quad (2.106)$$

где  $d_\eta(k)$  и  $D_0$  определены в разделе 1.5.

Интегрируя (2.106) по частоте, получаем

$$\Sigma_{\alpha\alpha} = \frac{i^2}{2\nu_0^2} \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{d_\eta(k)}{k^2 [k^2 + u_0(\mathbf{p} + \mathbf{k})^2]} \times J_{\alpha\alpha}, \quad (2.107)$$

где  $u_0 = \kappa_0/\nu_0$ . Благодаря наличию множителя  $\mathcal{A}_0$  вершина (2.79) не является поперечной; учитывая, что индекс расходимости данной диаграммы  $d_\Gamma = 2$ , для вычисления расходящейся части необходимо вычислить только члены, пропорциональные  $p^2$ .

Из явных вычислений следует, что

$$J_{\alpha\alpha} = \{p^2 \cdot (d-1) \cdot \sin^2 \phi + (\mathcal{A} - 1) \cdot (-pk \cos \phi \cdot \sin^2 \phi + p^2 \sin \phi^2) +$$

$$+ (\mathcal{A} - 1)^2 \cdot (-pk \cos \phi \sin^2 \phi + p^2 \cos^2 \phi \sin^2 \phi) \} + O(p^3), \quad (2.108)$$

где  $\phi$  — угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$ ,  $p$  и  $k$  — модули векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$ .

Учитывая, что

$$\frac{1}{k^2 + u_0(\mathbf{p} + \mathbf{k})^2} \simeq \frac{1}{(1 + u_0)k^2} \cdot \left( 1 - 2 \cdot \frac{u_0}{1 + u_0} \frac{\cos \phi}{k} \cdot p \right) + O(p^2) \quad (2.109)$$

получаем

$$\Sigma_{\alpha\alpha}^\theta = -\frac{1}{2\nu_0^2} \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{d_f(k)}{k^4} \times \tilde{J}_{\alpha\alpha}^\theta, \quad (2.110)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\alpha\alpha}^\theta = p^2 \cdot \left\{ (d-1) \sin^2 \phi + (\mathcal{A} - 1) \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{u_0}{1 + u_0} \cos^2 \phi \right) \sin^2 \phi + \right. \\ \left. + (\mathcal{A} - 1)^2 \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{u_0}{1 + u_0} \right) \cos^2 \phi \cdot \sin^2 \phi \right\} + O(p^3). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Для усреднения выражения (2.111) по направлениям воспользуемся формулами (2.100a) и (2.100b); выполняя после этого интегрирование выражения (2.110) по  $k = |\mathbf{k}|$  и учитывая, что  $\Sigma^\theta = \Sigma_{\alpha\alpha}^\theta / (d-1)$ , получаем

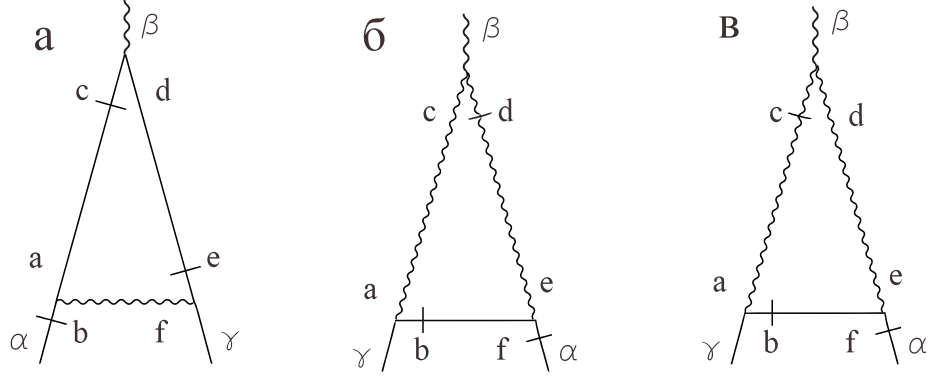
$$\begin{aligned} \Sigma^\theta = -\frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \hat{g}_0 \nu_0 \cdot C_d \cdot \frac{1}{1 + u_0} \cdot \left\{ \frac{d-1}{d} + (\mathcal{A} - 1) \left( \frac{1}{d} + 2 \cdot \frac{u_0}{u_0 + 1} \frac{1}{d(d+2)} \right) + \right. \\ \left. + (\mathcal{A} - 1)^2 \left( 1 + 2 \cdot \frac{u_0}{u_0 + 1} \right) \frac{1}{d(d+2)} \right\} \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

#### 2.4.6. Вычисление расходящейся части диаграммы $\langle \theta'_\alpha \theta_\gamma v_\beta \rangle$

Однопетлевое разложение для функции  $\langle \theta'_\alpha \theta_\gamma v_\beta \rangle_{1\text{-непр}}$  имеет вид

$$\langle \theta'_\alpha \theta_\gamma v_\beta \rangle_{1\text{-непр}} = V_{\alpha\beta\gamma} + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3), \quad (2.113)$$

где  $V_{\alpha\beta\gamma}$  — вершина (2.79), а  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  изображены на рисунках 2.16а — 2.16в.

Рис. 2.16. Диаграммы  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$ .

В подробной записи

$$\Delta_1 = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{d_\eta(k)}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} \frac{1}{i\omega + \kappa_0(\mathbf{q} + \mathbf{k})^2} \frac{1}{i\omega + \kappa_0(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2} \times J_1, \quad (2.114)$$

где

$$J_1 = P_{bf}(\mathbf{k}) \cdot P_{ac}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \cdot P_{de}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot V_{\alpha ba}^\theta(\mathbf{q}) \cdot V_{c\beta d}^\theta(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \cdot V_{ef\gamma}^\theta(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (2.115)$$

а  $V_{cab}^\theta$  — вершина (2.79).

Поскольку индекс расходимости для данной функции  $d_\Gamma = 1$ , для вычисления расходящейся части необходимо вычислить только члены  $O(p)$ .

Поскольку  $J_1 \propto V_{\alpha ba}^\theta(\mathbf{q}) \propto q$ , во всех прочих множителях можем положить  $p = q = 0$ . Таким образом

$$\Delta_1 \cong \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{d_\eta(k)}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} \cdot \frac{1}{(i\omega + \kappa_0 k^2)^2} \times \tilde{J}_1, \quad (2.116)$$

где

$$\tilde{J}_1 = P_{bf}(\mathbf{k}) \cdot P_{ac}(\mathbf{k}) \cdot P_{de}(\mathbf{k}) \cdot V_{\alpha ba}^\theta(\mathbf{q}) \cdot V_{c\beta d}^\theta(\mathbf{k}) \cdot V_{ef\gamma}^\theta(\mathbf{k}). \quad (2.117)$$

Интегрируя выражение (2.116) по частоте, получаем

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} \frac{1}{(i\omega + \kappa_0 k^2)^2} = \frac{1}{2\nu_0^3 (1 + u_0)^2 k^6}, \quad (2.118)$$

где, как и раньше,  $u_0 = \kappa_0/\nu_0$ .

Из явных вычислений следует, что

$$\tilde{J}_1 = \mathcal{A}_0 \cdot P_{ab}(\mathbf{k}) \cdot V_{\alpha ba}^\theta(\mathbf{q}) \cdot k_\beta \cdot k_\gamma. \quad (2.119)$$

Воспользовавшись формулами (2.99) для усреднения по углам и выполняя затем свертки с  $\delta$ -символами, получаем

$$\Delta_1 = \frac{i}{2} \frac{\hat{g}_0}{(1 + u_0)^2} \cdot \mathcal{A} (1 - \mathcal{A}) \cdot \frac{(d + 1) \cdot q_\alpha \delta_{\beta\gamma} - q_\beta \delta_{\alpha\gamma} - q_\gamma \delta_{\beta\alpha}}{d(d + 2)} \cdot C_d \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}. \quad (2.120)$$

Рассматривая аналогичным образом  $\Delta_2$ , получаем

$$\Delta_2 = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{d_\eta(q + k)}{\omega^2 + \nu_0^2(\mathbf{q} + \mathbf{k})^4} \frac{1}{i\omega + \kappa_0 k^2} \frac{1}{-i\omega + \nu_0(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2} \times J_2, \quad (2.121)$$

где

$$J_2 = P_{bf}(\mathbf{k}) \cdot P_{ac}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \cdot P_{de}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot V_{ba\gamma}^\theta(\mathbf{k}) \cdot V_{dc\beta}^v(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot V_{\alpha ef}^\theta(\mathbf{p}), \quad (2.122)$$

$V_{cab}^\theta$  — вершина (2.79), а  $V_{cab}^v$  — вершина (2.80). Поскольку импульс сразу выделяется наружу в виде множителя  $V_{\alpha ef}^\theta(\mathbf{p})$ , то выражение для  $\Delta_2$  можно упростить:

$$\Delta_2 \cong \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{d_\eta(k)}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} \cdot \frac{1}{i\omega + \kappa_0 k^2} \cdot \frac{1}{-i\omega + \nu_0 k^2} \times \tilde{J}_2, \quad (2.123)$$

где

$$\tilde{J}_2 = P_{bf}(\mathbf{k}) \cdot P_{ac}(\mathbf{k}) \cdot P_{de}(\mathbf{k}) \cdot V_{ba\gamma}^\theta(\mathbf{k}) \cdot V_{cd\beta}^v(-\mathbf{k}) \cdot V_{\alpha ef}^\theta(\mathbf{p}). \quad (2.124)$$

Интеграл по частоте дает

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} \frac{1}{(i\omega + \kappa_0 k^2)} \frac{1}{(-i\omega + \nu_0 k^2)} = \frac{3 + u_0}{4\nu_0^3 (1 + u_0)^2 k^6}; \quad (2.125)$$

выполняя свертку по значкам в  $\tilde{J}_2$  и переобозначая вектор  $\mathbf{p}$  как  $\mathbf{q}$ , получаем

$$\tilde{J}_2 = -\mathcal{A}_0 \cdot P_{ef}(\mathbf{k}) \cdot V_{\alpha ef}^\theta(\mathbf{q}) \cdot k_\beta \cdot k_\gamma. \quad (2.126)$$

Усредняя полученное выражение по углам и интегрируя по  $k = |\mathbf{k}|$ , аналогично диаграмме  $\Delta_1$  имеем

$$\Delta_2 = -\frac{i}{4} \hat{g}_0 \frac{(3 + u_0)}{(1 + u_0)^2} \cdot \mathcal{A} (1 - \mathcal{A}) \cdot \frac{(d + 1) \cdot q_\alpha \delta_{\beta\gamma} - q_\beta \delta_{\alpha\gamma} - q_\gamma \delta_{\alpha\beta}}{d(d + 2)} \cdot C_d \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}. \quad (2.127)$$

Аналогично аналитическое выражение для  $\Delta_3$  имеет вид

$$\Delta_3 = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{d_\eta(q + k)}{\omega^2 + \nu_0^2(\mathbf{p} - \mathbf{k})^4} \cdot \frac{1}{-i\omega + \kappa_0 k^2} \cdot \frac{1}{-i\omega + \nu_0(\mathbf{q} + \mathbf{k})^2} \times J_3, \quad (2.128)$$

где

$$J_3 = P_{bf}(\mathbf{k}) \cdot P_{ac}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot P_{de}(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot V_{ba\gamma}^\theta(-\mathbf{k}) \cdot V_{cd\beta}^v(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot V_{\alpha ef}^\theta(\mathbf{p}). \quad (2.129)$$

Как и в случае с предыдущей диаграммой, импульс сразу выделяется наружу в виде множителя  $V_{\alpha ef}^\theta(\mathbf{p})$ , и выражение можно упростить:

$$\Delta_3 \cong \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{d_\eta(k)}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} \cdot \frac{1}{-i\omega + \kappa_0 k^2} \cdot \frac{1}{-i\omega + \nu_0 k^2} \times \tilde{J}_3, \quad (2.130)$$

где

$$\tilde{J}_3 = P_{bf}(\mathbf{k}) \cdot P_{ac}(\mathbf{k}) \cdot P_{de}(\mathbf{k}) \cdot V_{ba\gamma}^\theta(-\mathbf{k}) \cdot V_{cd\beta}^v(-\mathbf{k}) \cdot V_{\alpha ef}^\theta(\mathbf{p}). \quad (2.131)$$

Интеграл по частоте дает

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} \frac{1}{(-i\omega + \kappa_0 k^2)} \frac{1}{(-i\omega + \nu_0 k^2)} = \frac{1}{4\nu_0^3 (1 + u_0) k^6}; \quad (2.132)$$



выполняя свертку по значкам в  $\tilde{J}_3$  и переобозначая  $\mathbf{p}$  как  $\mathbf{q}$ , получаем

$$\tilde{J}_3 = \mathcal{A}_0 \cdot P_{ef}(\mathbf{k}) \cdot V_{\alpha ef}^\theta(\mathbf{q}) \cdot k_\beta \cdot k_\alpha. \quad (2.133)$$

Усредняя полученное выражение по углам и интегрируя по  $k = |\mathbf{k}|$ , аналогично диаграммам  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  получаем

$$\Delta_3 = \frac{i}{4} \frac{\hat{g}_0}{(1 + u_0)} \cdot \mathcal{A} (1 - \mathcal{A}) \cdot \frac{(d + 1) \cdot q_\alpha \delta_{\beta\gamma} - q_\beta \delta_{\alpha\gamma} - q_\gamma \delta_{\alpha\beta}}{d(d + 2)} \cdot C_d \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}. \quad (2.134)$$

### 3. Ренормировка моделей

#### 3.1. Модель №1

##### 3.1.1. Уравнение РГ. $\beta$ - и $\gamma$ -функции.

Из раздела 2.2.4 следует, что уравнение Дайсона для парной корреляционной функции имеет вид

$$\Gamma_2^{\alpha\beta} = -i\omega \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0 \mathbf{p}_\perp^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0 f_0 \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} - \Sigma_{\alpha\beta}. \quad (3.1)$$

Подставляя  $\Sigma_{\alpha\beta}$  из (2.38), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{\alpha\beta} = & -i\omega \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0 \mathbf{p}_\perp^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0 f_0 \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} + \\ & + D_0 \cdot \left[ \frac{d-2+\mathcal{A}}{2(d-1)} \cdot \delta_{\alpha\beta} + \frac{(\mathcal{A}-1)^2}{2(d-1)} \cdot n_\alpha n_\beta \right] \cdot C_{d-1} \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из уравнения Дайсона (3.2) следует, что

(1) Нет контрчленов, которые отвечали бы ренормировке параметров  $\nu_0$  и  $\mathcal{A}_0$ , т. е.

$$Z_\nu = 1, \quad Z_{\mathcal{A}} = 1. \quad (3.3)$$

(2) В результате вычислений оказывается, что структуры  $\delta_{\alpha\beta}$  и  $n_\alpha n_\beta$  входят в уравнение (3.2) с различными коэффициентами. Это означает, что невозможно устранить расходимости ренормировкой единственного параметра  $f_0$ , поэтому требуется ввести *новый* безразмерный параметр  $u_0$ . Таким образом *настоящее* уравнение Дайсона имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{\alpha\beta} = & -i\omega + \nu_0 \mathbf{p}_\perp^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0 f_0 \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0 f_0 u_0 \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot n_\alpha n_\beta + \\ & + D_0 \cdot \left[ \frac{d-2+\mathcal{A}}{2(d-1)} \cdot \delta_{\alpha\beta} + \frac{(\mathcal{A}-1)^2}{2(d-1)} \cdot n_\alpha n_\beta \right] \cdot C_{d-1} \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Учитывая (1.15) и (3.3), а также вводя  $g \equiv \hat{g} \cdot C_{d-1}$ , для остальных параметров получаем, что

$$f_0 = f Z_f, \quad u_0 = u Z_u, \quad g_0 = g \mu^\xi Z_g, \quad Z_g = Z_f^{-1}. \quad (3.5)$$

Здесь  $\mu$  является ренормировочной массой,  $g$ ,  $u$  и  $f$  являются ренормированными аналогами затравочных параметров  $g_0$ ,  $u_0$  и  $f_0$ ,  $Z_i = Z_i(g, \xi, d)$  — константы ренормировки. Всюду в дальнейшем будет использоваться схема минимальных вычитаний (MS). Последнее соотношение в (3.5) следует из условия отсутствия ренормировки вклада с  $D_v^{-1}$  в действие (2.10), т. о.  $D_0 = g_0 \nu_0 f_0 = g \mu^\xi \nu f$ . «Масса»  $m$  и поля  $\Phi$  в данной модели не ренормируются, т. е.  $Z_\Phi = 1$  для всех  $\Phi$  и  $m_0 = m$ . Ренормированный функционал действия имеет вид

$$\begin{aligned} S_R(\Phi) = & \theta'_i D_\theta \theta'_k / 2 - v_i D_v^{-1} v_k / 2 + \\ & + \theta'_k \left[ -\partial_t \theta_k - (v_i \partial_i) \theta_k + \mathcal{A}(\theta_i \partial_i) v_k + \nu (\partial_\perp^2 + f Z_f \cdot \partial_\parallel^2) \theta_k \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

где функция  $D_v$  (1.14) выражена через ренормированные параметры (3.5).

Введем  $\beta$ -функцию и аномальную размерность  $\gamma$  — РГ-функции, которые определяют искомое асимптотическое поведение рассматриваемых величин. Базовое уравнение РГ для любой мультипликативно ренормируемой величины (корреляционной функции, составного оператора и т. д.) является следствием действия оператора  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  на правую и левую части уравнения  $F = Z_F F_R$ , где  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  обозначает оператор  $\mu \partial_\mu$  при фиксированных

затравочных параметрах  $e_0 = \{g_0, \nu_0, f_0, u_0, \mathcal{A}_0\}$ . Как следствие, уравнение РГ имеет вид

$$[\mathcal{D}_{RG} + \gamma_F] F_R = 0, \quad (3.7)$$

где  $\gamma_F$  является аномальной размерностью  $F$ , а

$$\mathcal{D}_{RG} = \mathcal{D}_\mu + \beta \partial_g - \gamma_f \mathcal{D}_f - \gamma_u \mathcal{D}_u, \quad (3.8)$$

подробнее см. приложение (С.1). Здесь и далее  $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$  для любой переменной  $x$ , а РГ-функции, в конечном итоге определяющие искомую асимптотику, определяются как

$$\beta_g \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = g \cdot [-\xi - \gamma_g(g)], \quad (3.9a)$$

$$\beta_u \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu u = -u \gamma_u(g, u), \quad (3.9b)$$

$$\gamma_F \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F = \beta_g \partial_g \ln Z_F \quad \text{для всех } Z_F. \quad (3.9c)$$

Соотношение между  $\beta$  и  $\gamma$  в (3.9a) и (3.9b) следует из определений и второго и третьего соотношения (3.5), подробнее см. приложение С.2.

Из уравнения Дайсона (3.4) следует, что константа ренормировки  $Z_f$  ( $f_0 = f \cdot Z_f$ ) и аномальная размерность  $\gamma_f$  для параметра  $f_0$ , нарушающего  $O_d$ -симметрию лапласиана, равны

$$Z_f = 1 - \frac{d-2+\mathcal{A}}{2(d-1)} \cdot \frac{g}{\xi} + O(g^2), \quad (3.10)$$

$$\gamma_f = \frac{d-2+\mathcal{A}}{2(d-1)} \cdot g. \quad (3.11)$$

Для ренормировки *нового* параметра  $u_0$  необходимо потребовать, чтобы выражение

$$f_0 u_0 \cdot \left[ 1 + g_0 \cdot \frac{(\mathcal{A} - 1)^2}{2(d - 1)} \cdot \frac{1}{u_0} \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi} \right] \cdot n_\alpha n_\beta \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \quad (3.12)$$

было УФ-конечно в первом порядке по  $g$ . Таким образом,

$$Z_u \cdot Z_f = 1 - \frac{(\mathcal{A} - 1)^2}{2(d - 1)} \cdot \frac{g}{u} \cdot \frac{1}{\xi} + O(g^2); \quad (3.13)$$

$$\gamma_u + \gamma_f = \frac{(\mathcal{A} - 1)^2}{2(d - 1)} \cdot \frac{1}{u} \cdot g, \quad (3.14)$$

где аномальная размерность  $\gamma_f$  известна ранее (см. 3.11).

Из соотношения (3.5) для константы  $g$  следует, что

$$Z_g \cdot Z_f = 1, \quad (3.15)$$

поэтому

$$\gamma_g = -\gamma_f = -\frac{d - 2 + \mathcal{A}}{2(d - 1)} \cdot g. \quad (3.16)$$

### 3.1.2. ИК-притягивающая неподвижная точка

Как известно (см. приложение С.3), главный член ИК-асимптотики дается подстановкой  $g = g^*$ ,  $u = u^*$ , где  $g^*$  и  $u^*$  определяются из условий на  $\beta$ -функцию:

$$\beta_g(g^*, u^*) = 0, \quad \beta_u(g^*, u^*) = 0, \quad (3.17)$$

при этом тип неподвижной точки определяется матрицей  $\Omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial g_k|_{g=g^*}$ : для ИК-притягивающих неподвижных точек данная матри-

ца положительно определена, т. е. вещественная часть всех ее собственных значений больше нуля.

Учитывая (3.16), для константы взаимодействия  $g$  получаем условие

$$\beta_g = g(-\xi + \gamma_f) = 0, \quad (3.18)$$

т. о. неподвижная точка дается выражением

$$g^* = \frac{2(d-1)}{d-2+\mathcal{A}} \cdot \xi, \quad \partial_g \beta_g(g^*) = \xi > 0. \quad (3.19)$$

Для параметра  $u$   $\beta$ -функция равна

$$\beta_u = -u\gamma_u = g \cdot \frac{1}{2(d-1)} [(d-2+\mathcal{A}) \cdot u - (\mathcal{A}-1)^2], \quad (3.20)$$

поэтому для неподвижной точки получаем

$$u^* = \frac{(\mathcal{A}-1)^2}{d-2+\mathcal{A}}, \quad \partial_u \beta_u(u^*) = \frac{d-2+\mathcal{A}}{2(d-1)} \cdot g^*. \quad (3.21)$$

Поскольку  $\partial \beta_g / \partial u = 0$ , собственные значения матрицы  $\Omega$  равны ее диагональным элементам, поэтому требование положительной определенности матрицы  $\Omega$  сводится к требованию  $\partial \beta_u / \partial u > 0$ . Таким образом система обладает ИК-притягивающей неподвижной точкой  $u^*$ ,  $g^*$  только при условии  $u^* > 0$ , т. е.

$$d-2+\mathcal{A} > 0. \quad (3.22)$$

### 3.1.3. Критические размерности

Ведущий член ИК-асимптотики функций Грина удовлетворяет уравнению РГ (3.7), (3.8) с заменой  $g \rightarrow g_*$ ,  $u \rightarrow u_*$ , т. е.

$$[\mathcal{D}_\mu - \gamma_f^* \mathcal{D}_f - \gamma_u^* \mathcal{D}_u + \gamma_G^*] G^R(e, \mu, \dots) = 0. \quad (3.23)$$

Каноническая масштабная инвариантность выражается уравнениями

$$\left[ \sum_{\alpha} d_{\alpha}^k \mathcal{D}_{\alpha} - d_G^k \right] G^R = 0, \quad \left[ \sum_{\alpha} d_{\alpha}^{\omega} \mathcal{D}_{\alpha} - d_G^{\omega} \right] G^R = 0, \quad (3.24)$$

где  $\alpha \equiv \{t, \mathbf{x}, \mu, \nu, m, M, u, f, \mathcal{A}, g\}$  является полным набором аргументов функции  $G^R$  ( $t, \mathbf{x}$  обозначают время и координаты), а  $d^k$  и  $d^{\omega}$  являются каноническими размерностями  $G^R$  и  $\alpha$ . Подставляя размерности из таблицы 2.1 в (3.24), находим, что

$$[\mathcal{D}_{\mu} + \mathcal{D}_m + \mathcal{D}_M - 2\mathcal{D}_{\nu} - \mathcal{D}_{\mathbf{x}} - d_G^k] G^R = 0, \quad (3.25a)$$

$$[\mathcal{D}_{\nu} - \mathcal{D}_t - d_G^{\omega}] G^R = 0. \quad (3.25b)$$

Уравнения вида (3.23) и (3.25) описывают скейлинговое поведение функции  $G^R$  при растяжении некоторых ее параметров. Параметр подлежит растяжению, если соответствующая производная входит в уравнение. Нашей задачей является ИК–асимптотика, поэтому необходимо, чтобы все ИК–существенные параметры (координаты  $\mathbf{x}$ , время  $t$ , масштабы  $M$  и  $m$ ) были масштабируемы, в то время как ИК–несущественные параметры, связанные с УФ–масштабом — коэффициент диффузии  $\nu$  и ренормировочная масса  $\mu$  — оставались фиксированными. Таким образом необходимо исключить из уравнений (3.23) и (3.25) производные по ИК–несущественным параметрам  $\mu$  и  $\nu$ , в результате чего получается искомое уравнение критического скейлинга:

$$[-\mathcal{D}_{\mathbf{x}} + \Delta_t \mathcal{D}_t + \Delta_m \mathcal{D}_m + \Delta_M \mathcal{D}_M + \Delta_f \mathcal{D}_f + \Delta_u \mathcal{D}_u - \Delta_G] G^R = 0, \quad (3.26)$$

где

$$\Delta_t = -\Delta_{\omega} = -2, \quad \Delta_m = \Delta_M = 1, \quad \Delta_f = \gamma_f^*, \quad \Delta_u = \gamma_u^*. \quad (3.27)$$

Здесь

$$\Delta[G] \equiv \Delta_G = d_G^k + 2d_G^\omega + \gamma_G^* \quad (3.28)$$

является критической размерностью величины  $G$ .

В частности, для любой корреляционной функции  $G^R = \langle \Phi \dots \Phi \rangle$  полей  $\Phi$  получаем, что  $\Delta_G = N_\Phi \Delta_\Phi$  с суммированием по всем полям  $\Phi$ , входящим в  $G^R$ , а именно

$$\Delta_G = \sum_{\Phi} N_\Phi d_\Phi = N_{\theta'} d_{\theta'} + N_\theta d_\theta + N_\nu d_\nu. \quad (3.29)$$

Т. к. в модели (2.10) поля не ренормируются, т. е.  $\gamma_\Phi = 0$  для всех  $\Phi$  (см. раздел 3.1.1), из (3.28) следует, что критические размерности полей  $\Phi = \{\mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}'\}$  совпадают с их каноническими размерностями, представленными в таблице 2.1, а именно

$$\Delta_{\mathbf{v}} = 1, \quad \Delta_\theta = -1, \quad \Delta_{\theta'} = d + 1. \quad (3.30)$$

Данное свойство является специфической чертой конкретной модели, отличающее ее как от изотропной векторной модели Крейчнана (модели №2), в которой  $\gamma_\nu \neq 0$ , так и от скалярной анизотропной модели Крейчнана [59], в которой параметр  $f$ , нарушающей  $O_d$ -симметрию лапласиана, не является безразмерным.

#### 3.1.4. Уравнение Дайсона и точные выражения для пропагаторов

В разделе 3.1.1 был введен новый параметр  $u_0$ , необходимый для обеспечения мультипликативной ренормировки данной модели. Как следствие, уравнение Дайсона приобретает вид (см. (3.4))



$$\begin{aligned} \Gamma_2^{\alpha\beta} = & -i\omega\delta_{\alpha\beta} + \nu_0\mathbf{p}_\perp^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0f_0 \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} + \\ & + \nu_0f_0u_0 \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot n_\alpha n_\beta - \Sigma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Данный факт означает, что *новая* структура  $\nu_0f_0u_0 \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2$ , которая при таком способе рассмотрения наводится из ренормировки, должна быть включена в функционал действия (2.10). Что, в свою очередь, означает, что пропагаторы (2.15a), (2.15b) изменят свой вид.

Обозначим индексную структуру выражения (3.31) как  $M_{\alpha\beta}$ , т. е.

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} = & -i\omega\delta_{\alpha\beta} + \nu_0\mathbf{p}_\perp^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} + \\ & + \nu_0f_0 \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0f_0u_0 \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot n_\alpha n_\beta. \end{aligned} \quad (3.32)$$

В соответствии с общими правилами (см. раздел 2.1) для того, чтобы вычислить пропагатор  $\langle\theta\theta'\rangle_0$ , необходимо вычислить обратную матрицу  $M_{\alpha\beta}^{-1}$ .

При этом необходимо учитывать, что:

(1) Поскольку поля  $\boldsymbol{\theta}$  и  $\boldsymbol{\theta}'$  являются поперечными, на самом деле вместо матрицы  $M_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{p})$  необходимо найти матрицу  $N_{ij}^{-1}(\mathbf{p}) = [P_{i\alpha}(\mathbf{p})M_{\alpha\beta}(\mathbf{p})P_{\beta j}(\mathbf{p})]^{-1}$ .

(2) Единичным оператором на поперечном подпространстве является поперечный проектор, поэтому матрица  $N_{ij}^{-1}(\mathbf{p})$  ищется из условия

$$N_{ij}(\mathbf{p}) \cdot N_{jk}^{-1}(\mathbf{p}) = P_{ik}(\mathbf{p}). \quad (3.33)$$

Вычислим матрицу  $N_{ij}$ , т. е. свертку матрицы  $M_{ij}$  с поперечными проекторами:

$$\begin{aligned}
N_{ij}(\mathbf{p}) &= P_{i\alpha}(\mathbf{p})M_{\alpha\beta}(\mathbf{p})P_{\beta j}(\mathbf{p}) = \\
&= -i\omega P_{ij}(\mathbf{p}) + \nu_0 \mathbf{p}_\perp^2 P_{ij}(\mathbf{p}) + \\
&+ \nu_0 f_0(\mathbf{p}\mathbf{n})^2 P_{ij}(\mathbf{p}) + \nu_0 f_0 u_0(\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \hat{n}_i \hat{n}_j \equiv \\
&\equiv \mathcal{X} \cdot P_{ij}(\mathbf{p}) + \mathcal{Y} \cdot \hat{n}_i \hat{n}_j,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

где  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  являются коэффициентами при индексных структурах  $P_{ij}(\mathbf{p})$  и  $\hat{n}_1 \hat{n}_2$ , а единичный вектор  $\hat{n}_k$  равен

$$\hat{n}_k = P_{mk}(\mathbf{p})n_m = n_k - p_{\parallel} p_k / p^2. \tag{3.35}$$

Учитывая (3.34), найдем матрицу  $N_{jk}^{-1}$ , удовлетворяющую условию (3.33). Она обладает той же индексной структурой, что и  $N_{jk}$ , но с другими коэффициентами. Обозначим их как  $x$  и  $y$ , тогда

$$(\mathcal{X} \cdot P_{ij}(\mathbf{p}) + \mathcal{Y} \cdot \hat{n}_i \hat{n}_j) \cdot (x \cdot P_{jk}(\mathbf{p}) + y \cdot \hat{n}_j \hat{n}_k) = P_{ik}(\mathbf{p}). \tag{3.36}$$

Из (3.36) следует, что

$$x = 1/\mathcal{X}, \tag{3.37a}$$

$$y = -\mathcal{Y}/\mathcal{X}(\mathcal{X} + \mathcal{Y} \sin^2 \kappa), \tag{3.37b}$$

где  $\kappa$  является углом между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{p}$ . Таким образом *настоящий* пропагатор  $\langle \theta_j \theta'_k \rangle_0$  равен

$$\langle \theta_j \theta'_k \rangle_0 = x \cdot P_{jk}(\mathbf{p}) + y \cdot \hat{n}_j \hat{n}_k, \tag{3.38}$$

где коэффициенты  $x$  и  $y$  определены в (3.37).

Для вычисления аномальных размерностей необходимо вычислить расходящиеся части диаграмм, изображенных на рисунках 2.5 и 4.1, т. е. выражения (2.29) и (4.7).

Из (3.34) и (3.37b) следует, что  $y$  как функция  $\omega$  имеет вид

$$y = -\mathcal{Y}/\mathcal{X}(\mathcal{X} + \mathcal{Y} \sin^2 \kappa) \propto \frac{(\mathbf{p}\mathbf{n})^2}{(-i\omega + \eta_1)(-i\omega + \eta_2)}. \quad (3.39)$$

Это означает, что интеграл по частоте от выражения (3.39) сходится и не требует каких-либо доопределений, в отличие, например, от ситуации, описанной в приложении В.1. Учитывая, что выражения (2.29) и (4.7) пропорциональны  $\delta(p_{\parallel})$ , получаем, что после интегрирования по частоте  $\omega$  и импульсу  $\mathbf{p}$ , выражение (3.39) не дает вклада в расходящиеся части данных диаграмм.

Это означает, что единственный ненулевой вклад дает член  $x \cdot P_{jk}(\mathbf{p})$ , т. е.

$$\langle \theta_j \theta'_k \rangle_0 = \frac{P_{jk}(\mathbf{p})}{-i\omega + \nu_0 \mathbf{p}_{\perp}^2 + \nu_0 f_0 p_{\parallel}^2}, \quad (3.40)$$

что совпадает с (2.15a). При этом необходимо иметь в виду, что при вычислении *конечных* частей диаграмм (что в данной работе не требуется) член с  $y$  также будет давать ненулевой вклад.

## 3.2. Модель №2

### 3.2.1. Уравнение РГ. $\beta$ - и $\gamma$ -функции

Ренормировка модели №2 осуществляется схемой, аналогичной модели №1 и описанной в разделах 3.1.1 — 3.1.3. Уравнение Дайсона для парной корреляционной функции (см. (2.51)) имеет вид

$$\Gamma_2(\omega, \mathbf{k}) = -i\omega + \nu_0 k^2 - \Sigma(\omega, \mathbf{k}). \quad (3.41)$$

Подставляя  $\Sigma$  из (2.72), получаем

$$\Gamma_2 = -i\omega + \nu_0 k^2 \left( 1 + g_0 \frac{d-1}{2d} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{m^{-\xi}}{\xi} \right). \quad (3.42)$$

Из уравнения Дайсона следует, что

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad g_0 = g \mu^\xi Z_g, \quad Z_g = Z_\nu^{-1}. \quad (3.43)$$

Как и в разделе 3.1.1, здесь  $g \equiv \hat{g} \cdot C_{d-1}$ ,  $\mu$  является ренормировочной массой,  $\nu$  и  $g$  являются ренормированными аналогами затравочных параметров  $\nu_0$  и  $g_0$ ,  $Z_i = Z_i(g, \xi, d)$  — константы ренормировки; всюду в дальнейшем будет использоваться схема минимальных вычитаний (MS).

Уравнения (3.43) следуют из условия отсутствия ренормировки вклада с  $D_v^{-1}$  в действие (2.42), т. о.  $D_0 \equiv g_0 \nu_0 = g \mu^\xi \nu$ . Как и в случае анизотропной модели (2.10), «масса»  $m$  и поля  $\Phi$  не ренормируются, т. е.  $m_0 = m$  и  $Z_\Phi = 1$  для всех  $\Phi$ . Ренормированный функционал действия имеет вид

$$S_R(\Phi) = \theta'_i D_\theta \theta'_k / 2 - v_i D_v^{-1} v_k / 2 + \theta'_k \left[ -\partial_i \theta_k - (v_i \partial_i) \theta_k + (\theta_i \partial_i) v_k + \nu Z_\nu \partial^2 \theta_k \right], \quad (3.44)$$

где функция  $D_v$  (2.41) выражена через ренормированные параметры (3.43).

Действуя оператором  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  на правую и левую части равенства  $F = Z \cdot F^R$ , получаем уравнение РГ в виде

$$[\mathcal{D}_{RG} + \gamma_F] F_R = 0, \quad (3.45)$$

где  $\gamma_F$  является аномальной размерностью  $F$ , а РГ-оператор  $\mathcal{D}_{RG}$  равен

$$\mathcal{D}_{RG} = \mathcal{D}_\mu + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu. \quad (3.46)$$

Здесь и далее  $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$  для любой переменной  $x$ . РГ-функции  $\beta$  и  $\gamma$  определяются как

$$\beta_g \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = g \cdot [-\xi - \gamma_g(g)], \quad (3.47a)$$

$$\gamma_F \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F = \beta_g \partial_g \ln Z_F \quad \text{для всех } Z_F. \quad (3.47b)$$

(см. приложение С.1).

Из уравнения Дайсона (3.42) следует, что константа ренормировки  $Z_\nu$  и аномальная размерность  $\gamma_\nu$  равны

$$Z_\nu = 1 - \frac{d-1}{2d} \cdot \frac{g}{\xi} + O(g^2), \quad (3.48)$$

$$\gamma_\nu = \frac{d-1}{2d} \cdot g. \quad (3.49)$$

Из соотношения (3.43) для константы  $g$  следует, что

$$Z_g \cdot Z_\nu = 1, \quad (3.50)$$

поэтому

$$\gamma_g = -\gamma_\nu = -\frac{d-1}{2d} \cdot g. \quad (3.51)$$

### 3.2.2. ИК–притягивающая неподвижная точка

В соответствии с приложением С.3, главный член ИК–асимптотики дается подстановкой  $g = g^*$ , где  $g^*$  определяется из условия на  $\beta$ –функцию:

$$\beta_g = 0, \quad \partial_g \beta_g > 0. \quad (3.52)$$

Учитывая (3.51), для константы взаимодействия  $g$  получаем условие

$$\beta_g = g(-\xi + \gamma_\nu) = 0, \quad (3.53)$$

откуда следует, что неподвижная точка дается выражением

$$g^* = \frac{2d}{d-1} \cdot \xi, \quad \partial_g \beta_g(g^*) = \xi > 0. \quad (3.54)$$

Это означает, что система обладает ИК–притягивающей неподвижной точкой  $g^*$  при любом  $\xi > 0$ ; в инерционном интервале  $\Lambda r \gg 1$ ,  $mr \sim 1$  корреляционные функции показывают аномальный скейлинг, а соответствующие критические размерности  $\Delta[F] \equiv \Delta_F$  могут быть вычислены как ряд по  $\xi$ .

### 3.2.3. Критические размерности

Для любой мультипликативно ренормируемой величины  $G^R$  главный член ИК–асимптотики уравнения РГ (3.45), (3.46) удовлетворяет этому же уравнению в неподвижной точке  $g^*$ , т. е.

$$[\mathcal{D}_\mu - \gamma_\nu^* \mathcal{D}_\nu + \gamma_G^*] G^R(e, \mu, \dots) = 0. \quad (3.55)$$

Каноническая масштабная инвариантность выражается уравнениями

$$\left[ \sum_\alpha d_\alpha^k \mathcal{D}_\alpha - d_G^k \right] G^R = 0, \quad \left[ \sum_\alpha d_\alpha^\omega \mathcal{D}_\alpha - d_G^\omega \right] G^R = 0, \quad (3.56)$$

где  $\alpha \equiv \{t, \mathbf{x}, \mu, \nu, m, M, g\}$  является полным набором аргументов функции  $G^R$ , а  $d^k$  и  $d^\omega$  — каноническими размерностями  $G^R$  и  $\alpha$ . Подставляя размерности из таблицы 2.2 в (3.56), находим, что

$$[\mathcal{D}_\mu + \mathcal{D}_m + \mathcal{D}_M - 2\mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\mathbf{x} - d_G^k] G^R = 0, \quad (3.57a)$$

$$[\mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_t - d_G^\omega] G^R = 0. \quad (3.57b)$$

Исключая из уравнений (3.55) и (3.57) производные по ИК-несущественным параметрам  $\mu$  и  $\nu$ , получаем уравнение критического скейлинга задачи (2.42):

$$[-\mathcal{D}_x + \Delta_t \mathcal{D}_t + \Delta_m \mathcal{D}_m + \Delta_M \mathcal{D}_M - \Delta_G] G^R = 0, \quad (3.58)$$

где

$$\Delta_t = -\Delta_\omega = -2 + \gamma_\nu^*, \quad \Delta_m = \Delta_M = 1, \quad (3.59)$$

а

$$\Delta[G] \equiv \Delta_G = d_G^k + \Delta_\omega d_G^\omega + \gamma_G^* \quad (3.60)$$

является соответствующей критической размерностью.

Учитывая точное равенство  $\gamma_\nu^* = \xi$ , а также то, что в данной модели поля не ренормируются, т. е.  $\gamma_\Phi = 0$  для всех  $\Phi$ , критические размерности исходных полей равны

$$\Delta_v = 1 - \xi, \quad \Delta_\theta = -1 + \xi/2, \quad \Delta_{\theta'} = d + 1 - \xi/2. \quad (3.61)$$

В силу точного равенства  $\gamma_\nu^* = \gamma_\nu(g_*) = \xi$  вклады порядков  $\xi^2$  и выше в выражения (3.61) отсутствуют.

### 3.3. Модель №3

#### 3.3.1. Стохастическое уравнение Навье–Стокса. Ренормировка параметра $\nu_0$

##### 3.3.1.1. Уравнение РГ. $\beta$ - и $\gamma$ -функции

В случае поля скорости, подчиняющегося стохастическому уравнению Навье–Стокса (2.75), уравнение Дайсона для парной корреляционной

функции (см. (2.90)) имеет вид

$$\Gamma_{2,v}(\omega, \mathbf{p}) = -i\omega + \nu_0 p^2 - \Sigma^v(\omega, \mathbf{p}). \quad (3.62)$$

Подставляя  $\Sigma^v$  из (2.101), получаем

$$\Gamma_{2,v} = -i\omega + \nu_0 p^2 \left( 1 + g_0 \frac{d-1}{4(d+2)} \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{m^{-\xi}}{\xi} \right). \quad (3.63)$$

Из уравнения Дайсона следует, что

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad g_0 = g \mu^\xi Z_g, \quad Z_g = Z_\nu^{-3}. \quad (3.64)$$

Также как и в разделах 3.1.1 и 3.2.1,  $g \equiv \hat{g} \cdot C_{d-1}$ ,  $\mu$  является ренормировочной массой,  $\nu$  и  $g$  являются ренормированными аналогами затравочных параметров  $\nu_0$  и  $g_0$ ,  $Z_i = Z_i(g, \xi, d)$  — константы ренормировки. Уравнения (3.64) следуют из условия отсутствия ренормировки вклада с  $D_v^{-1}$  в действие (2.78), т. о.  $D_0 \equiv g_0 \nu_0^3 = g \mu^\xi \nu^3$ . Как и в случае моделей (2.10) и (2.42), «масса»  $m$  и поля  $\Phi$  не ренормируются, т. е.  $m_0 = m$  и  $Z_\Phi = 1$  для всех  $\Phi$ . Ренормированный функционал действия имеет вид

$$S_R^v(\Phi) = v'_i D_v v'_k / 2 + v'_k \left[ -\partial_t v_k - (v_i \partial_i) v_k + \nu Z_\nu \partial^2 v_k \right], \quad (3.65)$$

где функция  $D_v$  (2.76) выражена через ренормированные параметры (3.64).

В соответствии с приложением С.1, базовое уравнение РГ имеет вид

$$[\mathcal{D}_{RG} + \gamma_F] F_R = 0, \quad (3.66)$$

где  $\gamma_F$  является аномальной размерностью  $F$ , а РГ-оператор  $\mathcal{D}_{RG}$  равен

$$\mathcal{D}_{RG} = \mathcal{D}_\mu + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu; \quad (3.67)$$

РГ-функции определяются как



$$\beta_g \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = g \cdot [-\xi - \gamma_g(g)], \quad (3.68a)$$

$$\gamma_F \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F = \beta_g \partial_g \ln Z_F \quad \text{для всех } Z_F. \quad (3.68b)$$

Из уравнения Дайсона (3.42) следует, что константа ренормировки  $Z_\nu$  и аномальная размерность  $\gamma_\nu$  равны

$$Z_\nu = 1 - \frac{d-1}{4(d+2)} \cdot \frac{g}{\xi} + O(g^2), \quad (3.69)$$

$$\gamma_\nu = \frac{d-1}{4(d+2)} \cdot g. \quad (3.70)$$

Из соотношения (3.64) для константы  $g$  следует, что

$$Z_g \cdot Z_\nu^3 = 1, \quad (3.71)$$

поэтому

$$\gamma_g = -3\gamma_\nu = -\frac{3(d-1)}{4(d+2)} \cdot g. \quad (3.72)$$

### 3.3.1.2. ИК–притягивающая неподвижная точка

В соответствии с приложением С.3, главный член ИК–асимптотики дается подстановкой  $g \rightarrow g^*$ , где  $g^*$  определяется из условия на  $\beta$ –функцию:

$$\beta_g = 0, \quad \partial_g \beta_g > 0. \quad (3.73)$$

Учитывая (3.72), для константы взаимодействия  $g$  получаем условие

$$\beta_g = g(-\xi + 3\gamma_\nu) = 0, \quad (3.74)$$

т. о. неподвижная точка дается выражением

$$g^* = \frac{4(d+2)}{3(d-1)} \cdot \xi, \quad \partial_g \beta_g(g^*) = \xi > 0. \quad (3.75)$$

Это означает, что система обладает ИК–притягивающей неподвижной точкой  $g^*$  при любом  $\xi > 0$ ; в инерционном интервале  $\Lambda r \gg 1$ ,  $mr \sim 1$  корреляционные функции показывают аномальный скейлинг, а соответствующие критические размерности  $\Delta[F] \equiv \Delta_F$  могут быть вычислены как ряд по  $\xi$ .

### 3.3.1.3. Критические размерности

Для любой мультипликативно ренормируемой величины  $G^R$  главный член ИК–асимптотики уравнения РГ (3.66), (3.67) удовлетворяет этому же уравнению в неподвижной точке  $g^*$ , т. е.

$$[\mathcal{D}_\mu - \gamma_\nu^* \mathcal{D}_\nu + \gamma_G^*] G^R(e, \mu, \dots) = 0. \quad (3.76)$$

Учитывая уравнения масштабной инвариантности (3.56) и размерности полей и параметров из таблицы 2.3, получаем уравнение критического скейлинга задачи (2.78):

$$[-\mathcal{D}_x + \Delta_t \mathcal{D}_t + \Delta_m \mathcal{D}_m - \Delta_G] G^R = 0, \quad (3.77)$$

где

$$\Delta_t = -\Delta_\omega = -2 + \gamma_\nu^*, \quad \Delta_m = 1, \quad (3.78)$$

а

$$\Delta[G] \equiv \Delta_G = d_G^k + \Delta_\omega d_G^\omega + \gamma_G^* \quad (3.79)$$

является соответствующей критической размерностью.

Учитывая точное равенство  $\gamma_\nu^* = \xi/3$ , а также то, что в данной модели поля не ренормируются, получаем, что критические размерности исходных

полей равны

$$\Delta_{\mathbf{v}} = 1 - \xi/3, \quad \Delta_{\mathbf{v}'} = d - 1 + \xi/3. \quad (3.80)$$

В силу точного равенства  $\gamma_{\nu}(g_*) = \xi/3$  вклады порядков  $\xi^2$  и выше в выражения (3.80) отсутствуют.

### 3.3.2. Ренормировка параметра $\mathcal{A}_0$

Как следует из раздела 2.4.6, однопетлевое разложение для функции  $\langle \theta'_{\alpha} \theta_{\gamma} v_{\beta} \rangle_{1\text{-непр}}$  имеет вид

$$\langle \theta'_{\alpha} \theta_{\gamma} v_{\beta} \rangle_{1\text{-непр}} = V_{\alpha\beta\gamma} + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3), \quad (3.81)$$

где  $V_{\alpha\beta\gamma}$  — вершина (2.79), а  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  изображены на рисунках 2.16а — 2.16в.

Данный контрчлен может быть воспроизведен мультипликативной ренормировкой параметра  $\mathcal{A}_0$ :

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cdot Z_{\mathcal{A}}. \quad (3.82)$$

При этом из (2.120), (2.127) и (2.134) следует, что

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0. \quad (3.83)$$

Это означает, что

$$Z_{\mathcal{A}} = 1 + O(g^2), \quad \beta_{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{D}}_{\mu} \mathcal{A} = -\mathcal{A} \gamma_{\mathcal{A}} = 0. \quad (3.84)$$

В работе [33] рассматривалась  $\mathcal{A}$ -модель (2.73), при этом перемещающее поле скорости описывалось моделью Крейчнана с нулевым временем корреляции. При этом все нетривиальные фейнмановские диаграммы 1-неприводимой функции Грина  $\langle \theta' \theta v \rangle$  оказывались равными нулю из-за

замкнутых циклов запаздывающих пропагаторов. Как следствие,  $Z_{\mathcal{A}} = 1$  и  $\gamma_{\mathcal{A}} = 0$ . В данной задаче  $Z_{\mathcal{A}} = 1 + O(g^2)$  по причине сокращения нетривиальных вкладов трех однопетлевых диаграмм  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$ . Для контрчлена  $\theta'(v\partial)\theta$  такое сокращение гарантировано во всех порядках по  $g$  галилеевской симметрией, в то время как для контрчлена  $\theta'(\theta\partial)v$  данный факт выглядит случайным и может быть всего лишь следствием простой структуры однопетлевых диаграмм. Нет оснований полагать, что этот механизм будет работать и для многопетлевых диаграмм, поэтому  $Z_{\mathcal{A}}$  и  $\gamma_{\mathcal{A}}$  могут содержать члены порядка  $g^2$  или выше.

### 3.3.3. Стохастическое уравнение конвекции–диффузии. Ренормировка параметра $\kappa_0$

#### 3.3.3.1. Уравнение РГ. $\beta$ - и $\gamma$ -функции

Уравнение Дайсона для парной корреляционной функции пассивных полей  $\theta$ ,  $\theta'$  (см. (2.103)) имеет вид

$$\Gamma_{2,\theta}(\omega, \mathbf{p}) = -i\omega + \kappa_0 p^2 - \Sigma^\theta(\omega, \mathbf{p}). \quad (3.85)$$

Подставляя  $\Sigma^\theta$  из (2.112), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,\theta} = & -i\omega + \nu_0 u_0 p^2 \left[ 1 + \frac{g_0}{u_0(u_0 + 1)} \cdot \left\{ \frac{d-1}{2d} + \right. \right. \\ & + (\mathcal{A} - 1) \left( \frac{1}{2d} + \frac{u_0}{u_0 + 1} \frac{1}{d(d+2)} \right) + \\ & \left. \left. + (\mathcal{A} - 1)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{u_0}{u_0 + 1} \right) \frac{1}{d(d+2)} \right\} \right] \cdot \frac{S_d}{(2\pi)^d} \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Из уравнения Дайсона следует, что

$$\kappa_0 = \nu_0 u_0 = \nu u Z_\kappa. \quad (3.87)$$

Поскольку поле  $\theta$  является *пассивным*, константы ренормировки  $Z_\nu$  и  $Z_g$ , найденные в разделе 3.3.1.1, не зависят от параметров  $\mathcal{A}$  и  $u$ , являющихся характеристиками *пассивного* поля. Поэтому, учитывая (3.64) и (3.69), получаем, что в первом порядке по  $g$

$$\Gamma_{2,\theta} = -i\omega + \nu u \cdot Z_2 \cdot p^2 (1 - g\mu^\xi \cdot C) \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}, \quad (3.88)$$

где

$$C = -\frac{1}{u(u+1)} \cdot \left\{ \frac{d-1}{2d} + (\mathcal{A}-1) \left( \frac{1}{2d} + \frac{u}{u+1} \cdot \frac{1}{d(d+2)} \right) + \right. \\ \left. + (\mathcal{A}-1)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{u}{u+1} \right) \cdot \frac{1}{d(d+2)} \right\} \cdot \frac{S_d}{(2\pi)^d}. \quad (3.89)$$

Ренормированный функционал действия имеет вид

$$S_R(\Phi) = S_R^v(\mathbf{v}, \mathbf{v}') + \theta'_i D_\theta \theta'_k / 2 + \\ + \theta'_k \left[ -\partial_t \theta_k - (v_i \partial_i) \theta_k + \mathcal{A} Z_{\mathcal{A}} (\theta_i \partial_i) v_k + \kappa Z_\kappa \partial^2 \theta_k \right], \quad (3.90)$$

где  $S_R^v(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  — функционал действия (3.65).

Учитывая явный вид оператора  $\mathcal{D}_{RG} = \{\mathcal{D}_\mu - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu + \beta_g \partial_g + \beta_u \partial_u + \beta_{\mathcal{A}} \partial_{\mathcal{A}}\}$ , находим, что

$$\gamma_\kappa = -g \cdot C, \quad (3.91)$$

где  $C$  определено в (3.89). Из (3.87) следует, что  $Z_\kappa = Z_\nu \cdot Z_u$ , поэтому

$$\gamma_\kappa = \gamma_\nu + \gamma_u. \quad (3.92)$$

Учитывая, что  $\beta_u = -u\gamma_u$ , из (3.92) получаем, что

$$\beta_u = u(\gamma_\nu - \gamma_\kappa). \quad (3.93)$$

### 3.3.3.2. ИК–притягивающая неподвижная точка

В соответствии с приложением С.3, главный член ИК–асимптотики дается подстановкой  $g \rightarrow g^*$ ,  $u \rightarrow u^*$ , где  $g^*$ ,  $u^*$  определяются из условий на  $\beta$ –функцию:

$$\beta_g(g^*) = 0, \quad \beta_u(u^*) = 0, \quad (3.94)$$

при этом тип неподвижной точки определяется матрицей  $\Omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial g_k|_{g=g^*}$ .

Из раздела 3.3.3.1, а также выражений (3.91) и (3.93) следует, что при  $\xi > 0$  модель имеет нетривиальную ИК–притягивающую неподвижную точку  $\{g^*, u^*\}$ , где

$$g^* = \frac{4}{3} \frac{(d+2)}{(d-1)} \cdot \xi, \quad (3.95)$$

а  $u^*$  является корнем кубического уравнения

$$\frac{4}{d-1} \left\{ (u+1) \cdot \frac{\mathcal{A}^2 + \mathcal{A}d + d^2 - 3}{2d} + u \cdot \frac{1}{d} \cdot \mathcal{A}(\mathcal{A} - 1) \right\} = u(u+1)^2. \quad (3.96)$$

Третьим уравнением (на точку  $\mathcal{A}^*$ ) является условие  $\beta_{\mathcal{A}} = 0$ . Из (3.84) следует, что в первом порядке по  $g$  данное условие удовлетворяется автоматически. При этом в однопетлевом приближении невозможно установить, верно ли подобное равенство и в старших порядках тоже.

Если данное равенство верно во всех порядках по  $g$  (как, например, в  $\mathcal{A}$ –модели с нулевым временем корреляции, см. [33]), то уравнение  $\beta_{\mathcal{A}} = 0$  в действительности является тождеством и не налагает дополнительных условий на координаты неподвижных точек, а уравнение (3.96) определяет точку  $u_*$  как функцию свободного параметра  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ .

Анализ уравнения (3.96) показывает, что в наиболее интересном с физической точки зрения случае  $d = 3$  положительное решение  $u_*$  существует

и единственно при всех  $\mathcal{A}$ . Как функция от  $\mathcal{A}$  оно обладает минимумом при  $\mathcal{A} \simeq -0.5$ , при этом  $u_* \simeq 0.94$ , и возрастает как  $u_* = |\mathcal{A}| + O(1)$  при  $\mathcal{A} \rightarrow \pm\infty$ . В случае магнитной гидродинамики, при  $\mathcal{A} = 1$ , неподвижная точка  $u_* \simeq 1.393$  и согласуется с результатами работы [66, 67]. При  $\mathcal{A} = 0$  неподвижная точка  $u_* = 1$  и согласуется с [68]; при  $\mathcal{A} = -1$  неподвижная точка  $u_* = 1$ . Кроме того, данная неподвижная точка является ИК–притягивающей:  $\partial_u \beta_u > 0$ ,  $\partial_{\mathcal{A}} \beta_{\mathcal{A}} = \partial_u \beta_{\mathcal{A}} = 0$ .

Подобное поведение функции  $u_*(\mathcal{A})$  наблюдается при всех  $d > 2$ . Как функция  $d$ , данное решение монотонно убывает и стремится к единице при  $d \rightarrow \infty$ . Для  $d \leq 2$  полученные результаты неприменимы, т. к. сама процедура ренормировки действия (2.78) для стохастического уравнения Навье–Стокса должна быть иной (см. [65]).

Если  $Z_{\mathcal{A}} = 1 + O(g^2)$  и имеет неисчезающие вклады порядка  $g^2$  либо старших порядков, то уравнения  $\beta_u = 0$ ,  $\beta_{\mathcal{A}} = 0$  определяют набор неподвижных точек  $u_*$  и  $\mathcal{A}_*$ . При этом точки  $\mathcal{A}_* = 0$  и  $\mathcal{A}_* = 1$  удовлетворяют данным уравнениям во всех порядках по  $g$ : в первом случае существует дополнительная симметрия по отношению к сдвигу  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \text{const}_i$  (в стохастическое уравнение (2.73) входят только производные поля  $\theta$ ), во втором — нелинейный член  $V_i = (v_k \partial_k) \theta_i - (\theta_k \partial_k) v_i = \partial_k (v_k \theta_i - \theta_k v_i)$  в (2.73) является поперечным ( $\partial_i V_i = 0$ ), т. о. нелокальный член  $\partial_i \mathcal{P}$ , отвечающий давлению, исчезает. Оба этих свойства сохраняются процедурой ренормировки.

Существование других неподвижных точек нельзя определить без явного двухпетлевого расчета; при этом такие точки существуют для пассивного векторного поля, переносимого сжимаемым крейчнановым полем

скорости, см. [69].

### 3.3.3.3. Критические размерности

Для любой мультипликативно ренормируемой величины  $G^R$  главный член ИК-асимптотики уравнения РГ (3.45), (3.46) удовлетворяет этому же уравнению в неподвижной точке  $g^*$ ,  $u^*$ , т. е.

$$[\mathcal{D}_\mu - \gamma_\nu^* \mathcal{D}_\nu + \gamma_G^*] G^R(e, \mu, \dots) = 0. \quad (3.97)$$

Учитывая уравнения масштабной инвариантности (3.56) и размерности полей и параметров из таблицы 2.3, получаем уравнение критического скейлинга задачи (2.77):

$$[-\mathcal{D}_x + \Delta_t \mathcal{D}_t + \Delta_m \mathcal{D}_m + \Delta_M \mathcal{D}_M - \Delta_G] G^R = 0, \quad (3.98)$$

где

$$\Delta_t = -\Delta_\omega = -2 + \gamma_\nu^*, \quad \Delta_m = \Delta_M = 1, \quad (3.99)$$

а

$$\Delta[G] \equiv \Delta_G = d_G^k + \Delta_\omega d_G^\omega + \gamma_G^* \quad (3.100)$$

является соответствующей критической размерностью.

Учитывая точное равенство  $\gamma_\nu^* = \xi/3$ , а также то, что в данной модели поля не ренормируются, получаем, что критические размерности исходных полей равны

$$\Delta_{\mathbf{v}} = 1 - \xi/3, \quad \Delta_{\mathbf{v}'} = d - 1 + \xi/3, \quad \Delta_\theta = -1 + \xi/6, \quad \Delta_{\theta'} = d + 1 - \xi/6. \quad (3.101)$$

В силу точного равенства  $\gamma_\nu(g_*) = \xi/3$  вклады порядков  $\xi^2$  и выше в выражения (3.101) отсутствуют.



## 4. Ренормировка составных операторов. Модель №1

### 4.1. Критические размерности составных операторов

#### 4.1.1. Общая схема

При вычислении аномальных показателей ключевую роль играют критические размерности  $\Delta_F$  неприводимых тензорных полей («локальных составных операторов» в квантово-полевой терминологии), построенных целиком из самих полей  $\theta$ , взятых в одной и той же точке пространства-времени  $x = (t, \mathbf{x})$ . Будем рассматривать скалярные операторы

$$F_{N,p,m} = (\theta_i \theta_i)^p (n_s \theta_s)^{2m}, \quad N = 2(p + m). \quad (4.1)$$

Они ренормируются мультипликативно,  $F_{Np} = Z_{Np} F_{Np}^R$ , и константы ренормировки  $Z_{Np} = Z_{Np}(g, \xi, d)$  находятся из условия конечности 1-неприводимых функций

$$\begin{aligned} & \langle F_{Np}^R(x) \theta(x_1) \dots \theta(x_n) \rangle_{1\text{-непр}} = \\ & = Z_{Np}^{-1} \langle F_{Np}(x) \theta(x_1) \dots \theta(x_n) \rangle_{1\text{-непр}} \equiv Z_{Np}^{-1} \Gamma_{Np}(x; x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (4.2)$$

т. е. отсутствия в них полюсов по  $\xi$ , будучи выраженными через ренормированные параметры (3.5). Данное требование эквивалентно конечности произведения  $Z_{Np}^{-1} \cdot \Gamma_{Np}(x; \theta)$ , где

$$\Gamma_{Np}(x; \theta) = \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n \Gamma_{Np}(x; x_1, \dots, x_n) \times \\ \times \theta(x_1) \dots \theta(x_n) \quad (4.3)$$

является функционалом от поля  $\theta(x)$  и определяет  $Z_{Nl}$  с точностью до произвольной сходящейся части, выбор которой диктуется выбранной схемой вычитаний. Наиболее удобной для вычислений является схема минимальных вычитаний (MS), в которой константы ренормировки имеют вид  $1 +$  полюса по  $\xi$ .

Вклад отдельной диаграммы в функционал  $\Gamma_{Np}$  (4.3) для любого оператора  $F_{Np}$  представим в виде

$$\Gamma_{Np} = V_{\alpha\beta\dots} I_{\alpha\beta\dots}^{ab\dots} \theta_a \theta_b \dots, \quad (4.4)$$

где  $V_{\alpha\beta\dots}$  является вершинным множителем,  $I_{\alpha\beta\dots}^{ab\dots}$  — «внутренний блок», вычисляемый непосредственно по диаграмме, а произведение  $\theta_a \theta_b \dots$  отвечает внешним полям.

В соответствии с правилами универсальной диаграммной техники (см. [26]), для любого оператора  $F(x)$ , построенного из полей  $\theta$ , вершине  $V_{\alpha\beta\dots}$  с  $k \geq 0$  выходящими линиями отвечает выражение

$$V_{Np}^k(x; x_1, \dots, x_k) \equiv \delta^k F_{Np}(x) / \delta\theta(x_1) \dots \delta\theta(x_k). \quad (4.5)$$

Аргументы  $x_1 \dots x_k$  в выражении (4.5) сворачиваются с аргументами линий  $\theta\theta'$ , присоединяющихся к вершине.

#### 4.1.2. Однопетлевая диаграмма

Однопетлевая диаграмма со вставкой составного оператора (черная точка в вершине диаграммы), дающая в обозначениях (4.4) ответ для внут-

ренней структуры  $I_{\alpha\beta\dots}^{ab\dots}$ , показана на рисунке (4.1).

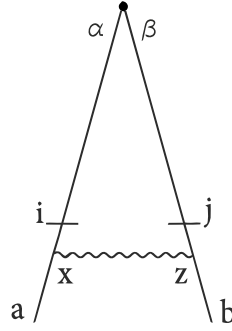


Рис. 4.1. Однопетлевой вклад в функционал  $\Gamma_{Np}$ .

Индексная структура диаграммы  $Y_{\alpha\beta}^{ab}$  равна

$$\begin{aligned} Y_{\alpha\beta}^{ab} &= V_{xai}(\mathbf{k}) V_{zjb}(-\mathbf{k}) \cdot P_{\alpha i}(\mathbf{k}) P_{\beta j}(\mathbf{k}) \cdot n_x n_z = \\ &= -\mathcal{A}^2 \cdot n_x P_{x\alpha}(\mathbf{k}) \cdot n_z P_{z\beta}(\mathbf{k}) \cdot k_a k_b, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где буквами  $i, j, x$  и  $z$  обозначены внутренние индексы диаграммы. Данную структуру  $Y_{\alpha\beta}^{ab}$  необходимо проинтегрировать по частоте и по импульсу с учетом множителей вида (2.6) и (2.15a):

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}^{ab} &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \cdot \frac{1}{-i\omega + \nu \mathbf{k}_{\perp}^2 + \nu f k_{\parallel}^2} \cdot \frac{1}{i\omega + \nu \mathbf{k}_{\perp}^2 + \nu f k_{\parallel}^2} \times \\ &\quad \times \frac{\delta(k_{\parallel})}{k_{\perp}^{d-1+\xi}} \cdot D_0 \cdot Y_{\alpha\beta}^{ab}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Усредняя по углам с помощью (2.36), получаем следующий ответ:

$$I_{\alpha\beta}^{ab} = \frac{\mathcal{A}^2}{2\nu} \cdot D_0 \cdot \int \frac{d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k_{\perp}^{d-1+\xi}} \cdot \frac{k_a^{\perp} k_b^{\perp}}{k_{\perp}^2} \cdot n_{\alpha} n_{\beta} =$$

$$= \frac{\mathcal{A}^2 \cdot f}{2(d-1)} \cdot P_{ab}(\mathbf{n}) \cdot n_\alpha n_\beta \cdot g \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}. \quad (4.8)$$

### 4.1.3. Многопетлевые диаграммы

Любая многопетлевая диаграмма содержит как часть структуру, изображенную на рисунке (4.2).

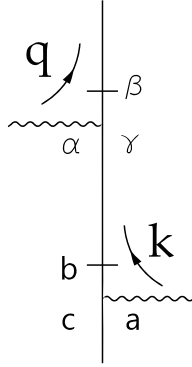


Рис. 4.2. Фрагмент произвольной многопетлевой диаграммы.

Как следствие интеграл, соответствующий расходящейся части произвольной многопетлевой диаграммы, содержит в качестве множителя следующее выражение:

$$I_0 = \delta(k_{\parallel})\delta(q_{\parallel})n_a V_{bac}(\mathbf{k})n_\alpha V_{\beta\alpha\gamma}(\mathbf{k} + \mathbf{q})P_{\gamma b}(\mathbf{k}), \quad (4.9)$$

где  $V_{cab}$  является вершиной (2.12), а  $\delta$ -функции появляются из коррелятора скорости (2.7). Поскольку  $I_0$  пропорционально сумме  $k_{\parallel}$  и  $q_{\parallel}$  с некоторыми коэффициентами, после интегрирования с  $\delta$ -функциями все данные диаграммы оказываются равными нулю.

Единственным исключением являются диаграммы типа «песочные часы», являющиеся произведением более простых диаграмм. Но они содержат только полюса более высоких порядков по  $\xi$  и в схеме MS вклада

в аномальную размерность не дают (см. раздел 5.3).

Таким образом однопетлевое приближение (4.8) дает *точный* ответ.

#### 4.1.4. Аномальные размерности

Объектами изучения являются корреляционные функции  $G_{F_i F_j} = \langle F_i F_j \rangle$ , построенные из операторов  $F_{Np}$  вида (4.1). Таким образом для вычисления асимптотики инерционного интервала функции  $G$  необходимо знать асимптотическое поведение средних значений самих операторов  $F_i$ . Рассмотрим оператор

$$F_{N,p,m} = (\theta_i \theta_i)^p (n_s \theta_s)^{2m}, \quad (4.10)$$

где  $N = 2(p + m)$  — полное число полей  $\theta$ , входящих в оператор.

В соответствии с (4.4), (4.5) и точным ответом для диаграмм (4.8), свертка по значкам в функционале  $\Gamma$  равна

$$\begin{aligned} \Gamma &\propto \frac{\delta^2}{\delta\theta_\alpha \cdot \delta\theta_\beta} [F_{N,p,m}] \cdot n_\alpha n_\beta \cdot P_{ab}(\mathbf{n}) \theta_a \theta_b = \\ &= 2m(2m - 1) \cdot F_{N,p+1,m-1} + (2p + 8pm - 2m(2m - 1)) \cdot F_{N,p,m} + \\ &+ (4p(p - 1) - 2p - 8pm) \cdot F_{N,p-1,m+1} - 4p(p - 1) \cdot F_{N,p-2,m+2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) означает, что составные операторы смешиваются при ренормировке. Таким образом УФ-конечный оператор  $F^R$  имеет вид  $F^R = F +$  контрчлены, где контрчлены являются линейной комбинацией самого оператора  $F$  и прочих операторов с тем же полным числом полей  $N$ , примешивающихся к  $F$  при ренормировке.

Обозначим символом  $F \equiv \{F_i\}$  замкнутый набор операторов с одним и тем же числом полей  $\theta$ , т. е. одним и тем же числом  $N$ , смешивающихся при ренормировке только между собой. Тогда матрица констант ренормировки  $\hat{Z}_F \equiv \{Z_{ik}\}$  и матрица аномальных размерностей  $\hat{\gamma}_F \equiv \{\gamma_{ik}\}$  имеют вид

$$F_i = \sum_k Z_{ik} F_k^R, \quad \hat{\gamma}_F = \hat{Z}_F^{-1} \mathcal{D}_\mu \hat{Z}_F. \quad (4.12)$$

Уравнения масштабной инвариантности (3.24) и уравнение РГ (3.7), примененные к оператору  $F_{N,p}$ , дают матрицу критических размерностей  $\Delta_F \equiv \{\Delta_{ik}\}$  в форме, аналогичной выражению (3.28). При этом  $d_F^k$ ,  $d_F^\omega$  и  $d_F$  понимаются как диагональные матрицы канонических размерностей (диагональные элементы которых являются суммой соответствующих размерностей полей и производных, составляющих оператор  $F$ ), а  $\hat{\gamma}^* = \hat{\gamma}(g^*, u^*)$  является матрицей (4.12) в неподвижной точке.

В схеме MS матрица ренормировки  $\hat{Z}$  имеет вид

$$\hat{Z} = \hat{E} + \hat{A}, \quad (4.13)$$

где  $\hat{E}$  является диагональной матрицей канонических размерностей, а любой элемент матрицы  $\hat{A}$  имеет вид

$$A_{ik} = a_{ik} \cdot \frac{g}{\xi}. \quad (4.14)$$

Для решения уравнений РГ необходимо диагонализировать матрицу  $\hat{\gamma}$ , т. о. критическими размерностями операторов  $F \equiv \{F_i\}$  являются собственные числа матрицы  $\Delta_{ik}$ . Это означает, что мы переходим от набора операторов  $\{F^R\}$  к набору «базисных» операторов  $\{\tilde{F}^R\}$ , обладающих

определенными критическими размерностями и имеющих форму

$$F_l^R = U_{lp} \tilde{F}_p^R, \quad (4.15)$$

где матрица  $U_{lp}$  является диагонализующей для матрицы  $\Delta_{ik}$  — матрица

$$\tilde{\Delta}_F = U_F^{-1} \Delta_F U_F \quad (4.16)$$

является диагональной либо жордановой.

Т. к. матрица констант ренормировки  $\hat{Z}$  имеет вид (4.13), матрица аномальных размерностей  $\hat{\gamma}$  равна

$$\gamma_{ik} = -a_{ik} \cdot g, \quad (4.17)$$

где коэффициенты  $a_{ik}$  определены в (4.14). Собирая вместе (4.11) — (4.17) и учитывая скалярный множитель, опущенный в (4.11), но представленный в (4.8), а также то, что симметричный коэффициент для данной диаграммы равен  $1/2$ , получаем следующий ответ для матричных элементов матрицы аномальных размерностей  $\hat{\gamma}$ :

$$\gamma_{N, p+1} = - \frac{\mathcal{A}^2 \cdot f}{4(d-1)} \cdot 2m(2m-1) \cdot g; \quad (4.18a)$$

$$\gamma_{N, p} = - \frac{\mathcal{A}^2 \cdot f}{4(d-1)} \cdot (2p + 8pm - 2m(2m-1)) \cdot g; \quad (4.18b)$$

$$\gamma_{N, p-1} = - \frac{\mathcal{A}^2 \cdot f}{4(d-1)} \cdot (4p(p-1) - 2p - 8pm) \cdot g; \quad (4.18c)$$

$$\gamma_{N, p-2} = - \frac{\mathcal{A}^2 \cdot f}{4(d-1)} \cdot (-4p(p-1)) \cdot g. \quad (4.18d)$$

Подставляя значение неподвижной точки  $g^* = \frac{2(d-1)}{d-2+\mathcal{A}} \cdot \xi$  (см. (3.19)), полу-

чаем

$$\gamma_{N,p+1}^* = -\frac{\mathcal{A}^2 \cdot f}{2(d-2+\mathcal{A})} \cdot 2m(2m-1) \cdot \xi; \quad (4.19a)$$

$$\gamma_{N,p}^* = -\frac{\mathcal{A}^2 \cdot f}{2(d-2+\mathcal{A})} \cdot (2p+8pm-2m(2m-1)) \cdot \xi; \quad (4.19b)$$

$$\gamma_{N,p-1}^* = -\frac{\mathcal{A}^2 \cdot f}{2(d-2+\mathcal{A})} \cdot (4p(p-1)-2p-8pm) \cdot \xi; \quad (4.19c)$$

$$\gamma_{N,p-2}^* = -\frac{\mathcal{A}^2 \cdot f}{2(d-2+\mathcal{A})} \cdot (-4p(p-1)) \cdot \xi. \quad (4.19d)$$

Таким образом матрица критических размерностей оператора  $F_{N,p}$  имеет вид

$$\Delta_{Np,Np'} = -2(p+m) \cdot \delta_{pp'} + \hat{\gamma}_{Np,Np'}^*, \quad (4.20)$$

где  $-2(p+m)$  является его канонической размерностью,  $\delta_{pp'}$  — дельта-символ Кронеккера, а  $\hat{\gamma}_{Np,Np'}^*$  является матрицей аномальных размерностей в критической точке.

#### 4.1.5. Матрица критических размерностей и ее собственные значения

На данном этапе нашей задачей является диагонализация матрицы  $\Delta_{Np,Np'}$ . В соответствии с (4.18), она является 4-диагональной для любого  $N$ ; кроме того, поскольку из данных 4 диагоналей одна находится ниже главной диагонали, а две другие — выше, обращение такой матрицы нетривиально.

В соответствии с (4.11), замкнутый набор операторов  $F \equiv \{F_i\}$ , которые смешиваются при ренормировке только между собой, состоит из операторов, построенных из одного и того же числа полей  $\theta$ , т. е. обладающих одинаковым числом  $N$ . Поэтому для дальнейшего рассмотрения будет



удобно ввести вектор  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} (\theta_i \theta_i)^N \\ (\theta_i \theta_i)^{N-2} \cdot (n_s \theta_s)^2 \\ \vdots \\ (n_s \theta_s)^N \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Учитывая (4.21), связь  $F_i = Z_{ik} F_k^R$  неренормированных операторов  $\{F\}$  с ренормированными операторами  $\{F^R\}$  принимает вид

$$= \begin{pmatrix} (\theta_i \theta_i)^N \\ (\theta_i \theta_i)^{N-2} \cdot (n_s \theta_s)^2 \\ (\theta_i \theta_i)^{N-4} \cdot (n_s \theta_s)^4 \\ \vdots \\ \vdots \\ (\theta_i \theta_i)^2 \cdot (n_s \theta_s)^{N-2} \\ (n_s \theta_s)^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & a_{43} & \ddots & \ddots & a_{n-2n} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \{(\theta_i \theta_i)^N\}^R \\ \{(\theta_i \theta_i)^{N-2} \cdot (n_s \theta_s)^2\}^R \\ \{(\theta_i \theta_i)^{N-4} \cdot (n_s \theta_s)^4\}^R \\ \vdots \\ \vdots \\ \{(\theta_i \theta_i)^2 \cdot (n_s \theta_s)^{N-2}\}^R \\ \{(n_s \theta_s)^N\}^R \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Необходимо отметить, что при данных определениях исходному неренормированному оператору отвечает строка матрицы  $\hat{Z}$ , а степень  $p$  оператора

$F_{N,p}^R$  убывает слева направо.

Обозначим общий множитель в (4.19) как  $y$ ,

$$y = -\frac{\mathcal{A}^2 \cdot f}{2(d-2+\mathcal{A})} \cdot \xi. \quad (4.23)$$

Используя (4.19), (4.20) и (4.22), построим матрицу критических размерностей  $\Delta_{Np, Np'}$  для некоторых конкретных наборов операторов. Для  $N = 2$  имеем:

$$\Delta_{Np, Np'} = \begin{pmatrix} -2 + 2y & -2y \\ 2y & -2 - 2y \end{pmatrix}; \quad (4.24)$$

собственные значения данной матрицы равны  $\lambda = \{-2; -2\}$ .

Для  $N = 8$

$$\Delta_{Np, Np'} = \begin{pmatrix} -8 + 8y & 40y & -48y & 0 & 0 \\ 2y & -8 + 28y & -6y & -24y & 0 \\ 0 & 12y & -8 + 24y & -28y & -8y \\ 0 & 0 & 30y & -8 - 4y & -26y \\ 0 & 0 & 0 & 56y & -8 - 56y \end{pmatrix}; \quad (4.25)$$

собственные значения матрицы (4.25) равны  $\lambda = \{-8; -8; -8; -8; -8\}$ .

Данный факт оказывается справедливым для *любого* набора операторов с *произвольным*  $N$ . Доказательство вышеприведенного утверждения находится в разделе 4.4.

Таким образом, для *любого*  $N$  матрица аномальных размерностей (4.19) является нильпотентной, а матрица критических размерностей (4.20) вырождена, т. к. все ее собственные значения равны  $N$ :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{N/2+1} = -2(p+m) = -N. \quad (4.26)$$

Из (4.26) следует, что матрица критических размерностей (4.20) не является диагонализуемой, а приводится к жордановой форме, т. е. матрица  $\tilde{\Delta}_F$  в (4.16) имеет вид

$$\tilde{\Delta}_F = \begin{pmatrix} -2(p+m) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2(p+m) & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -2(p+m) & \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Диагонализирующая матрица  $U_F$  при этом является верхнетреугольной,

$$U_F = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & \dots & u_{1n-1} & 0 \\ u_{31} & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ u_{n-1\ 1} & u_{n-1\ 2} & & & & \vdots \\ u_{n1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

причем все элементы  $u_{ik} \neq 0$  для любых  $i, k$  (см. раздел 4.4).

#### 4.1.6. Асимптотика среднего значения оператора $F_{N,p}$

Поскольку объектами изучения являются одновременные корреляционные функции  $G = \langle F_1 F_2 \rangle$ , в результате операторного разложения будут появляться средние значения самих операторов  $\langle F^R \rangle$ .

Из соображений размерности

$$\langle \tilde{\mathbf{F}}^R \rangle \propto \nu^{d_F^\omega} \mu^{d_F} \cdot \widehat{\Phi} \left( \frac{M}{\mu}, f \right) \cdot \widehat{\mathbf{C}}_0. \quad (4.29)$$

Т. к. оператор  $F$  ренормируется мультипликативно, его ИК-асимптотика удовлетворяет уравнениям (3.26) — (3.27), описывающим ИК-скейлинг. Поскольку среднее значение не зависит от времени  $t$  и координат  $\mathbf{x}$ , решение данного уравнения имеет вид

$$\langle \tilde{\mathbf{F}}^R \rangle \propto M^{\tilde{\Delta}_F} \cdot \Phi \left( \frac{f}{M^{\gamma_f^*}} \right) \cdot \mathbf{C}_0. \quad (4.30)$$

Учитывая размерное представление (4.29), получаем

$$\langle \tilde{\mathbf{F}}^R \rangle \propto \nu^{d_F^\omega} \mu^{d_F} \cdot (M/\mu)^{\tilde{\Delta}_F} \cdot \Phi \left( \frac{f}{(M/\mu)^\xi} \right) \cdot \mathbf{C}_0, \quad (4.31)$$

где  $\Phi$  является некоторой неизвестной функцией безразмерного аргумента,  $\gamma_f^* = \xi$  (см. (3.11) и (3.19)),  $\tilde{\mathbf{F}}^R$  — вектор, построенный из «базисных» операторов (4.15), обладающих определенными размерностями,  $\mathbf{C}_0$  — некоторый постоянный вектор («начальные данные»),  $\mu$  — ренормировочная масса, а  $\tilde{\Delta}_F$  — матрица критических размерностей (4.27).

Поскольку матрица  $\tilde{\Delta}_F$  в выражении (4.31) является жордановой матрицей с единственным собственным значением  $\lambda_0 = -2(p + m)$ , значение произвольной скалярной функции  $\mathcal{F}$  на матричном аргументе  $\tilde{\Delta}_F$  дается матрицей  $\mathcal{F}(\tilde{\Delta}_F)$ :

$$\mathcal{F}(\tilde{\Delta}_F) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(\lambda_0) & \frac{\mathcal{F}'(\lambda_0)}{1!} & \cdots & \frac{\mathcal{F}^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!} \\ 0 & \mathcal{F}(\lambda_0) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{\mathcal{F}'(\lambda_0)}{1!} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{F}(\lambda_0) \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Благодаря тому, что функция  $\mathcal{F}$  является степенной функцией  $(M/\mu)^{\tilde{\Delta}_F}$ , в искомой асимптотике появляется логарифмическая зависимость:

$$(M/\mu)^{\tilde{\Delta}_F} = \begin{pmatrix} (M/\mu)^\lambda & (M/\mu)^\lambda \cdot \ln(M/\mu) & \cdots & \frac{(M/\mu)^\lambda \cdot (\ln(M/\mu))^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & (M/\mu)^\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & (M/\mu)^\lambda \cdot \ln(M/\mu) \\ 0 & \cdots & 0 & (M/\mu)^\lambda \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Поэтому после свертки с вектором  $\mathbf{C}_0$ , с точностью до размерного множителя получаем асимптотику операторов  $\tilde{F}^R$  в виде

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1^R &\propto (M/\mu)^\lambda \cdot P_{N/2}(\ln M/\mu), \\ \tilde{F}_2^R &\propto (M/\mu)^\lambda \cdot P_{N/2-1}(\ln M/\mu), \\ &\vdots \\ \tilde{F}_{N/2+1}^R &\propto (M/\mu)^\lambda. \end{aligned} \quad (4.34)$$

При этом необходимо иметь в виду, что индексы  $1, \dots, N/2 + 1$  в (4.34) не являются произвольными, а строго связаны с индексами вектора  $\mathbf{F}$ , введенного в (4.21).

## 4.2. Асимптотика корреляционной функции $G = \langle F_1 F_2 \rangle$

Основной задачей является изучение асимптотики парных корреляционных функций операторов  $F_{N,p}$  вида (4.10) с произвольными значениями  $N$  и  $p$ :

$$G = \langle F_{N_1, p_1} F_{N_2, p_2} \rangle. \quad (4.35)$$

Данные корреляционные функции  $G$  удовлетворяют уравнению РГ (3.26) — (3.27), описывающему ИК–скейлинг. При этом, благодаря смешиванию операторов  $F_{N,p}$  и жордановой форме матрицы (4.27), решение данного уравнения для  $G$  является нетривиальным и требует отдельного рассмотрения.

Поскольку коррелятор  $G$  является функцией  $\mathbf{x} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\mu$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $\nu$  и  $f$ , размерное представление для него имеет вид

$$G \propto \nu^{d_G^*} \mu^{d_G} \cdot \widehat{\Phi}(\mu r, m r, M r, f), \quad (4.36)$$

где  $\widehat{\Phi}(\mu r, m r, M r, f)$  — некоторая функция безразмерных аргументов, а РГ–оператор  $\mathcal{D}_{RG}$  равен

$$\mathcal{D}_{RG} = -\mathcal{D}_{\mathbf{r}} + \mathcal{D}_m + \mathcal{D}_M + \gamma_f^* \mathcal{D}_f. \quad (4.37)$$

Применяя данный оператор к коррелятору  $G$  и обозначая  $F_{N_1, p_1}$  как  $F_i$ , а  $F_{N_2, p_2}$  как  $F_k$  (при этом  $N_1$  и  $N_2$  могут принимать разные значения, т. е. операторы  $F_i$  и  $F_k$  могут принадлежать разным РГ–семействам), получаем дифференциальное уравнение

$$\mathcal{D}_{RG} G_{ik} = \Delta_{is} G_{sk} + \Delta_{ks} G_{is}, \quad (4.38)$$

где  $G_{ij} = \langle F_i F_j \rangle$ , а  $\Delta_{ij}$  является критической размерностью оператора  $G_{ij}$ ; суммирование по повторяющимся индексам подразумевается. Поскольку числа  $N_1$  и  $N_2$  исходных операторов  $F_{N,p}$  в (4.35) могут не совпадать, матрицы  $\Delta_{is}$  и  $\Delta_{ks}$  в (4.38) могут иметь разные размерности.

Для решения данного уравнения необходимо перейти от корреляторов  $G_{ik}$  к корреляторам  $\tilde{G}_{ik}$ , построенным из операторов  $\tilde{F}$  (см. (4.15)), обладающих определенными критическими размерностями:

$$\tilde{G}_{ik} = \langle \tilde{F}_i \tilde{F}_k \rangle. \quad (4.39)$$

При этом индексы  $i$  и  $k$  в определении (4.39) не являются произвольными, а определяются следующими правилами:

(1) Исходный оператор  $F$  определен в (4.10), а именно

$$F_{N,p,m} = (\theta_a \theta_a)^p (n_s \theta_s)^{2m}. \quad (4.40)$$

(2) Поскольку при ренормировке смешиваются только операторы, обладающие одним и тем же полным числом полей  $N$  (см. (4.11)), для любого фиксированного  $N$  можно ввести вектор  $\mathbf{F}$  (4.21), а именно

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N/2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta_a \theta_a)^N \\ (\theta_a \theta_a)^{N-2} \cdot (n_s \theta_s)^2 \\ \vdots \\ (n_s \theta_s)^N \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

(3) Определим вектор  $\tilde{\mathbf{F}}$  способом, описанным в (4.15), а именно

$$F_l^R = U_{lp} \tilde{F}_p^R, \quad (4.42)$$

где матрица  $U_{lp}$  имеет вид (4.28) и приводит матрицу критических размерностей к жордановой форме:  $\tilde{\Delta}_F = U_F^{-1} \Delta_F U_F$  (см. раздел 4.1.5).

Таким образом оператор  $\tilde{F}_i$  в определении корреляционной функции (4.39) не является произвольным — он построен с помощью (4.42) как линейная комбинация операторов  $F_i$ , чья нумерация строго определена в (4.41).

Корреляционная функция  $\tilde{G}_{ik}$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.38) с тем отличием, что матрицы  $\tilde{\Delta}_{ik}$  имеют жорданову форму:

$$\mathcal{D}_{RG} \tilde{G}_{ik}^R = \tilde{\Delta}_{is} \tilde{G}_{sk}^R + \tilde{\Delta}_{ks} \tilde{G}_{is}^R. \quad (4.43)$$

Поскольку оператор  $\tilde{F}_i$ , входящий в коррелятор  $\tilde{G}_{ik}$ , принадлежит семейству с индексом  $N_1$ , а оператор  $\tilde{F}_k$  принадлежит семейству с индексом  $N_2$ , уравнение (4.43) на самом деле представляет из себя систему  $(N_1/2 + 1) \times (N_2/2 + 1)$  «зацепленных» (благодаря невозможности диагонализировать матрицы  $\tilde{\Delta}_{ik}$ ) дифференциальных уравнений.

Матрицы  $\tilde{\Delta}_{is}$  и  $\tilde{\Delta}_{ks}$  в (4.43) имеют вид

$$\tilde{\Delta}_F = \begin{pmatrix} \lambda_{1(2)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{1(2)} & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{1(2)} & \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

где  $\lambda_1 = -N_1$  и  $\lambda_2 = -N_2$  (см. раздел 4.4).

Из явного вида матрицы (4.44) следует, что если операторы  $\tilde{F}_i$  и  $\tilde{F}_k$  не являются «последними», т. е. если  $i \neq N_1/2 + 1$  и  $k \neq N_2/2 + 1$ , то



каждый из двух членов в (4.43) имеет два вклада — функцию  $\tilde{G}_{ik}^R$  с коэффициентом  $\lambda_{1(2)}$  и либо функцию  $\tilde{G}_{i+1,k}^R$  для первого члена, либо функцию  $\tilde{G}_{i,k+1}^R$  для второго члена, оба с коэффициентами 1. Если один из операторов,  $\tilde{F}_i$  или  $\tilde{F}_k$ , является «последним», т. е. если либо  $i$ , либо  $k$  равно  $N_{1(2)}/2 + 1$ , то вклад такого оператора состоит только из одного члена  $\tilde{G}_{ik}^R$  с коэффициентом  $\lambda_{1(2)}$ .

Как следствие, существует только одно уравнение с одним членом в правой части, а именно при  $i = N_1/2 + 1$ , а  $k = N_2/2 + 1$ :

$$\mathcal{D}_{RG} \tilde{G}_{N_1/2+1, N_2/2+1}^R = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \tilde{G}_{N_1/2+1, N_2/2+1}^R. \quad (4.45)$$

Учитывая (4.36), с точностью до размерного множителя его решение есть функция

$$\tilde{G}_0^R \equiv \tilde{G}_{N_1/2+1, N_2/2+1}^R \propto (\mu r)^{-\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \Phi(1, mr, Mr, \bar{f}), \quad (4.46)$$

где  $\bar{f}$  — инвариантный заряд, см. приложение С.3.3. Из (С.44), (С.49) и (С.51) следует, что при  $s \rightarrow 0$  инвариантный заряд  $\bar{f} \rightarrow fr^\xi$ .

Если  $i = N_1/2 + 1$ , а  $k = N_2/2$ , либо если  $i = N_1/2$ , а  $k = N_2/2 + 1$ , т. е. если  $k + i = (N_1 + N_2)/2 + 1$ , то существуют два уравнения вида

$$\mathcal{D}_{RG} \tilde{G}_1^R = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \tilde{G}_1^R + \tilde{G}_0^R, \quad (4.47)$$

содержащие в правой части уже известную функцию  $\tilde{G}_0^R$ . Их решения содержат как степенной множитель, так и полином первой степени от логарифма, т. е. с точностью до размерных констант есть

$$\tilde{G}_1^R \propto (\mu r)^{-\lambda_1 - \lambda_2} \cdot P_1[\ln \mu r] \cdot \Phi(1, Mr, mr, fr^\xi), \quad (4.48)$$

где  $P_1[\ln \mu r]$  — полином первой степени от  $\ln \mu r$ . Из (4.46) и (4.48) следует, что асимптотическое поведение суммы  $\tilde{G}_0^R + \tilde{G}_1^R$  является таким же, как и

самой функции  $\tilde{G}_1^R$ :

$$\tilde{G}_0^R + \tilde{G}_1^R \cong \tilde{G}_1^R \propto (\mu r)^{-\lambda_1 - \lambda_2} \cdot P_1[\ln \mu r] \cdot \Phi(1, Mr, mr, fr^\xi). \quad (4.49)$$

Если  $k + i = (N_1 + N_2)/2$ , то существуют три уравнения, содержащие в правой части уже известную функцию  $\tilde{G}_1$  (см. (4.48)):

$$\mathcal{D}_{RG} \tilde{G}_2^R = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \tilde{G}_2^R + \tilde{G}_1^R. \quad (4.50)$$

Их решение содержит полином второй степени от  $\ln \mu r$ , т. е. с точностью до размерных констант равно

$$\tilde{G}_2^R \propto (\mu r)^{-\lambda_1 - \lambda_2} \cdot P_2[\ln \mu r] \cdot \Phi(1, Mr, mr, fr^\xi), \quad (4.51)$$

где  $P_2[\ln \mu r]$  — полином второй степени от  $\ln \mu r$ .

Для последующих функций процедура является совершенно аналогичной. Число уравнений, содержащих в правой части функции, уже известные на предыдущем шаге, увеличивается при  $(N_1 + N_2)/2 + 2 \leq i + k \leq (N_1 + N_2)/4 + 1$  и уменьшается при  $(N_1 + N_2)/4 + 1 \leq i + k \leq 2$ . Как следствие, существует только одна функция (при  $i + k = 2$ ), чья асимптотика содержит полином максимальной степени от логарифма:

$$\tilde{G}_{11}^R \propto (\mu r)^{-\lambda_1 - \lambda_2} \cdot P_{(N_1 + N_2)/2}[\ln \mu r] \cdot \Phi(1, Mr, mr, fr^\xi), \quad (4.52)$$

где  $P_{(N_1 + N_2)/2}[\ln \mu r]$  — полином степени  $(N_1 + N_2)/2$  от  $\ln \mu r$ .

Таким образом асимптотическое поведение *любой* из функций  $\tilde{G}_{ik}^R$  находится с помощью вышеописанной процедуры и дается формулами вида (4.46), (4.48), (4.51) и (4.52).

Для того, чтобы получить асимптотическое поведение первоначальных операторов «без тильды», необходимо воспользоваться выражением (4.42). Обратная матрица  $U^{-1}$  имеет вид

$$U_F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \hat{u}_{1n} \\ \vdots & & & & \hat{u}_{2\ n-1} & \hat{u}_{2n} \\ \vdots & & & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \dots & & \vdots & \hat{u}_{n-2\ n} \\ 0 & \hat{u}_{n-1\ 2} & \dots & \dots & \hat{u}_{n-1\ n-1} & \hat{u}_{n-1\ n} \\ \hat{u}_{n1} & \dots & \dots & \hat{u}_{n,n-2} & \hat{u}_{n,n-1} & \hat{u}_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

причем все элементы  $\hat{u}_{ab} \neq 0$ . Необходимо отметить, что два оператора, входящие в коррелятор  $\tilde{G}_{ik}$  (4.39), обладают двумя (возможно разными) матрицами  $U_{F_i}^{-1}$  и  $U_{F_k}^{-1}$ .

Из (4.53) следует, что операторы  $\tilde{F}^R$ , принадлежащие некоторому семейству  $\{\tilde{\mathbf{F}}^R\}$  определенной размерности  $N$ , могут быть выражены через операторы  $F^R$ , принадлежащим другому семейству  $\{\mathbf{F}^R\}$  той же размерности  $N$ , следующим образом:

$$\tilde{F}_1^R \cong F_{N/2+1}^R \quad (4.54)$$

(с точностью до числового коэффициента, а именно  $\hat{u}_{1n}$ );

$$\tilde{F}_2^R \cong F_{N/2}^R + F_{N/2+1}^R \quad (4.55)$$

и т. д. Таким образом, для *любого*  $i$

$$\tilde{F}_i^R \cong \sum_{\alpha} F_{\alpha}^R + F_{N/2+1}^R, \quad (4.56)$$

где  $\alpha \neq N/2 + 1$  и нумерует все остальные операторы.

Обозначим элементы матрицы  $U_{F_i}^{-1}$  оператора  $F_i$ , входящего в коррелятор  $\tilde{G}_{ik} = \langle \tilde{F}_i \tilde{F}_k \rangle$ , как  $\hat{u}_{ab}$ , элементы матрицы  $U_{F_k}^{-1}$  оператора  $F_k$  как  $\check{u}_{ab}$ . Тогда

$$\tilde{G}_{11}^R = \hat{u}_{1,N_1/2+1} \check{u}_{1,N_2/2+1} \cdot G_{N_1/1+1, N_2/1+1}^R; \quad (4.57)$$

$$\tilde{G}_{12}^R = \hat{u}_{1,N_1/2+1} \cdot \left( \check{u}_{2,N_2/2} \cdot G_{N_1/1+1, N_2/1}^R + \check{u}_{2,N_2/2+1} \cdot G_{N_1/1+1, N_2/1+1}^R \right); \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{13}^R = \hat{u}_{1,N_1/2+1} \cdot & \left( \check{u}_{3,N_2/2-1} \cdot G_{N_1/1+1, N_2/1-1}^R + \right. \\ & \left. + \check{u}_{3,N_2/2} \cdot G_{N_1/1+1, N_2/1}^R + \check{u}_{3,N_2/2+1} \cdot G_{N_1/1+1, N_2/1+1}^R \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

и т. д. Формулы (4.57) — (4.59) показывают, что выражение для *любой* функции  $\tilde{G}_{ik}^R$  содержит в правой части функцию  $G_{N_1/1+1, N_2/1+1}^R$  с *разными* коэффициентами ( $\check{u}_{a,b} \neq \check{u}_{a+1,b}$  и  $\hat{u}_{a,b} \neq \hat{u}_{a+1,b}$  для любых  $a, b$ ), поэтому выражение для *любой* функции  $G_{ik}^R$  содержит в правой части функцию  $\tilde{G}_{11}^R$ . Вместе с (4.52) это дает искомую асимптотику парной корреляционной функции первоначальных операторов из семейства  $\{\mathbf{F}\}$ :

$$G_{ik}^R \cong \tilde{G}_{11}^R \propto (\mu r)^{-\lambda_1 - \lambda_2} \cdot P_{(N_1+N_2)/2} [\ln \mu r] \cdot \Phi(1, Mr, mr, fr^\xi) \quad \forall i, k. \quad (4.60)$$

Учитывая, что  $\lambda_1 = -N_1$ , а  $\lambda_2 = -N_2$ , получаем, что с точностью до размерного множителя искомая асимптотика парного коррелятора (4.35) имеет вид

$$G_{ik}^R \cong \tilde{G}_{11}^R \propto (\mu r)^{N_1+N_2} \cdot P_{(N_1+N_2)/2} [\ln \mu r] \cdot \Phi(1, Mr, mr, fr^\xi) \quad \forall i, k, \quad (4.61)$$

где  $P_x$  является полиномом степени  $x$ ,  $\Phi$  — неизвестная функция трех безразмерных аргументов. Ее асимптотическое поведение изучается с помощью операторного разложения.

### 4.3. Операторное разложение и асимптотика инерционного интервала

Представление (4.61) с произвольной скейлинговой функцией  $\Phi(Mr, mr, fr^\xi)$  описывает поведение корреляционных функций при  $s = 1/\mu r \rightarrow 0$ , т. е. при  $\mu r \gg 1$  и любом фиксированном значении  $Mr$ . Инерционный интервал  $l \ll r \ll L$  соответствует дополнительному условию  $Mr \ll 1$ . Вид функции  $\Phi(Mr)$  не определяется с помощью уравнения РГ; по аналогии с теорией критического поведения, ее поведение при  $Mr \rightarrow 0$  изучается с помощью операторного разложения Вильсона; см. [18].

В соответствии с ОР, одновременное произведение  $F_1(x')F_2(x'')$  двух ренормированных операторов при  $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')/2 = \text{const}$  и  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}' - \mathbf{x}'' \rightarrow 0$  представимо в виде

$$F_1(x')F_2(x'') = \sum_{\tilde{F}} C_{\tilde{F}}(\mathbf{r})\tilde{F}(t, \mathbf{x}), \quad (4.62)$$

где коэффициентные функции  $C_{\tilde{F}}$  регулярны по  $M^2$ , а  $\tilde{F}$  — всевозможные ренормированные локальные операторы, разрешенные симметрией задачи. Без потери общности можно считать, что разложение идет по базисным операторам  $\tilde{F}$  вида (4.15), т. е. по операторам, обладающим определенными критическими размерностями  $\tilde{\Delta}_F$ . Ренормированный коррелятор  $\langle F_1(x)F_2(x') \rangle$  получается с помощью усреднения (4.62) с весом  $\exp S_R$ , где  $S_R$  — ренормированное действие (3.6). При этом в правой части будут появляться величины  $\langle \tilde{F} \rangle \propto (Mr)^{\tilde{\Delta}_F}$ . Их асимптотика при  $M \rightarrow 0$  находится с помощью уравнений РГ и имеет вид

$$\langle \tilde{F}_\alpha \rangle \propto (Mr)^{\tilde{\Delta}_{F_\alpha}}, \quad (4.63)$$

где  $\tilde{\Delta}_F$  является жордановой матрицей (4.27), а  $(Mr)^{\tilde{\Delta}_{F\alpha}}$  — матрицей вида (4.33). При этом из размерного представления (4.36) следует, что решение уравнения РГ (4.43) подразумевает подстанову  $s \equiv 1/\mu r = 1$ , см. (4.46), (4.61) и приложение С.3.3. Это означает, что матрица  $(M/\mu)^{\tilde{\Delta}_{F\alpha}}$ , представленная в (4.33), переходит в матрицу  $(Mr)^{\tilde{\Delta}_{F\alpha}}$ . Кроме того, при решении уравнения РГ для  $\langle \tilde{F} \rangle$  РГ-переменная  $s = M/\mu$ , поэтому условие  $s \rightarrow 0$  эквивалентно условию  $Mr \ll 1$  и описывает, таким образом, вторую границу инерционного интервала.

Таким образом из операторного разложения (4.62) следует, что функция  $\Phi(Mr, mr, fr^\xi)$  из представления парного коррелятора (4.61) представляема в виде суммы

$$\hat{\Phi}(Mr) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(Mr)^{\Delta_{F\alpha}}, \quad Mr \ll 1, \quad (4.64)$$

в которой коэффициенты  $A_{\alpha} = A_{\alpha}(Mr)$ , являющиеся коэффициентами Вильсона  $C_{\alpha}$  в формуле (4.62), регулярны по  $(Mr)^2$ . Здесь и далее мы не различаем большие масштабы  $M$  и  $m$ , введенные в (2.4) и (2.7) (считается, что отношение  $M/m$  есть некоторое фиксированное число), и  $\hat{\Phi}(Mr) \equiv \Phi(Mr, fr^\xi) \Big|_{fr^\xi = \text{const}}$ .

В соответствии с общей теоремой, в ОР входят все операторы, возникающие в разложении Тейлора, а также все те, которые примешиваются к ним в результате ренормировки [26, 27]. Из (4.34) следует, что главный вклад в сумму (4.64) дается оператором  $\tilde{F}_1^R$ , обладающим максимальной сингулярностью. Таким образом, подставляя операторное разложение (4.64) в РГ-представление (4.61), получаем искомую асимптотику парной корреляционной функции  $G$  (4.35) в инерционном интервале:

$$\begin{aligned}
G &= \langle F_{N_1, p_1} F_{N_2, p_2} \rangle \propto \\
&\propto (s_{\text{rg}})^{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot (s_{\text{ope}})^{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot P_{(N_1 + N_2)/2} [\ln s_{\text{rg}}] \cdot P_{(N_1 + N_2)/2} [\ln s_{\text{ope}}] \cdot \tilde{\Phi}(fr^\xi) = \\
&= (\mu r)^{N_1 + N_2} \cdot (Mr)^{-N_1 - N_2} \cdot P_{(N_1 + N_2)/2} [\ln(1/\mu r)] \cdot P_{(N_1 + N_2)/2} [\ln Mr] \cdot \tilde{\Phi}(fr^\xi), \tag{4.65}
\end{aligned}$$

где  $s_{\text{rg}} = 1/\mu r$ ,  $s_{\text{ope}} = Mr$ ,  $\lambda_{1(2)} = -N_{1(2)}$ , а  $P_{(N_1 + N_2)/2}$  — полином степени  $(N_1 + N_2)/2$ . Учитывая размерное представление (4.36), а также то, что каноническая размерность  $d_G = -N_1 - N_2$ , восстанавливая размерные множители в (4.65), получаем

$$\begin{aligned}
G &= \langle F_{N_1, p_1} F_{N_2, p_2} \rangle \propto \\
&\propto \nu^{d_G^\omega} \cdot M^{-N_1 - N_2} \cdot P_{(N_1 + N_2)/2} [\ln \mu r] \cdot P_{(N_1 + N_2)/2} [\ln Mr] \cdot \tilde{\Phi}(fr^\xi). \tag{4.66}
\end{aligned}$$

При этом главный член в выражении (4.66) равен

$$G \propto \nu^{d_G^\omega} \cdot M^{-N_1 - N_2} \cdot [\ln \mu r]^{(N_1 + N_2)/2} \cdot [\ln Mr]^{(N_1 + N_2)/2} \cdot \tilde{\Phi}(fr^\xi), \tag{4.67}$$

где  $\tilde{\Phi}(fr^\xi)$  — неизвестная безразмерная скейлинговая функция, ограниченная в интервале  $l \ll r \ll L$ .

#### 4.4. Нильпотентность матрицы аномальных размерностей

В данном разделе будет доказана нильпотентность матрицы аномальных размерностей  $\gamma_F^*$  (4.19). Благодаря этому свойству матрица критиче-

ских размерностей  $\Delta_{Np, Np'}$  (4.20) не является диагонализуемой, а приводится к жордановой форме.

#### 4.4.1. Определения и цели

Приведем еще раз некоторые определения и утверждения из разделов 4.1.4 и 4.1.5.

Введем вектор  $\mathbf{F}$  (см. (4.21)):

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} (\theta_i \theta_i)^N \\ (\theta_i \theta_i)^{N-2} \cdot (n_s \theta_s)^2 \\ \vdots \\ (n_s \theta_s)^N \end{pmatrix}; \quad (4.68)$$

учитывая (4.68), соотношение  $F_i = Z_{ik} F_k^R$  между наборами неренормированных операторов  $\{F\}$  и ренормированных операторов  $\{F^R\}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} (\theta_i \theta_i)^N \\ (\theta_i \theta_i)^{N-2} \cdot (n_s \theta_s)^2 \\ (\theta_i \theta_i)^{N-4} \cdot (n_s \theta_s)^4 \\ \vdots \\ \vdots \\ (\theta_i \theta_i)^2 \cdot (n_s \theta_s)^{N-2} \\ (n_s \theta_s)^N \end{pmatrix} =$$



$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & a_{43} & \ddots & \ddots & a_{n-2n} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \{(\theta_i \theta_i)^N\}^R \\ \{(\theta_i \theta_i)^{N-2} \cdot (n_s \theta_s)^2\}^R \\ \{(\theta_i \theta_i)^{N-4} \cdot (n_s \theta_s)^4\}^R \\ \vdots \\ \vdots \\ \{(\theta_i \theta_i)^2 \cdot (n_s \theta_s)^{N-2}\}^R \\ \{(n_s \theta_s)^N\}^R \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

При данных определениях исходному неренормированному оператору отвечает строка матрицы  $\hat{Z}$ , а степень  $p$  оператора  $F_{N,p}^R$  убывает слева направо.

Обозначим общий множитель в (4.19) как  $y$ ,

$$y = -\frac{\mathcal{A}^2 \cdot f}{2(d-2+\mathcal{A})} \cdot \xi. \quad (4.70)$$

При данных обозначениях элементы матрицы аномальных размерностей  $\hat{\gamma}_F = \hat{Z}_F^{-1} \mathcal{D}_\mu \hat{Z}_F$  в неподвижной точке  $g^*$  равны

$$\gamma_{N,p+1}^* = 2m(2m-1) \cdot y; \quad (4.71a)$$

$$\gamma_{N,p}^* = (2p + 8pm - 2m(2m-1)) \cdot y; \quad (4.71b)$$

$$\gamma_{N,p-1}^* = (4p(p-1) - 2p - 8pm) \cdot y; \quad (4.71c)$$

$$\gamma_{N,p-2}^* = (-4p(p-1)) \cdot y. \quad (4.71d)$$

Матрица критических размерностей оператора  $F_{N,p}$  имеет вид

$$\Delta_{Np, Np'} = -2(p+m) \cdot \delta_{pp'} + \hat{\gamma}_{Np, Np'}^*, \quad (4.72)$$

где  $-2(p+m)$  — его каноническая размерность,  $\delta_{pp'}$  — дельта-символ Кроне-

некера, а  $\hat{\gamma}_{Np, Np'}^*$  — значение матрицы аномальных размерностей в неподвижной точке.

Целью данного раздела является доказательство нильпотентности матрицы аномальных размерностей  $\hat{\gamma}_F^*$  (4.71) и жордановой формы матрицы критических размерностей  $\Delta_{Np, Np'}$  (4.72). Будет представлено явное выражение для диагонализующей матрицы  $U_N$ , которая с помощью преобразования

$$\Delta_F = U_N \tilde{\Delta}_F U_N^{-1}. \quad (4.73)$$

приводит матрицу  $\Delta_F$  к жордановой форме  $\tilde{\Delta}_F$ .

Поскольку параметр  $N$  в определении вектора  $\mathbf{F}$  (4.68) является произвольным, размерности матриц  $\hat{Z}_F$ ,  $\hat{\gamma}_F$  и  $U_N$ , равные  $(N/2 + 1) \times (N/2 + 1)$ , также являются произвольными. Это означает, что выражения (4.71) для матричных элементов матрицы  $\hat{\gamma}_F^*$  дают нам алгоритм построения данной матрицы для набора исходных операторов  $\{F\}$  с *любым*  $N$ . Поэтому сложность данной задачи состоит в том, чтобы найти алгоритм построения диагонализующей матрицы  $U_N$  для *произвольного*  $N$ , т. е. найти явный вид преобразования, приводящего к жордановой форме матрицы  $\Delta_F$  *произвольной* размерности.

Необходимо учитывать, что если бы матрица  $\Delta_F$  была диагонализующей, диагонализующая матрица  $U_N$  была бы единственной для любого конкретного значения  $N$ . Поскольку в нашем случае матрица критических размерностей обладает жордановой формой, матрица  $U_N$ , приводящая ее к жордановой форме, не является единственной. В результате доказательства будет предъявлен только один из возможных вариантов, который приводит матрицу  $\Delta_F$  к жордановой форме и таким образом решает постав-

ленную задачу.

Поскольку каждый из элементов матрицы  $\hat{\gamma}_F^*$  содержит как множитель коэффициент  $y$ , нильпотентность матрицы  $\hat{\gamma}_F^*$  означает нильпотентность матрицы  $\hat{\epsilon}_F^*$ , где  $y \cdot \hat{\epsilon}_F^* = \hat{\gamma}_F^*$ .

#### 4.4.2. Основная идея

Напишем в явном виде  $3 \times 3$  ( $N = 4$ ) матрицу  $\hat{\epsilon}_F^*$ :

$$\hat{\epsilon}_F^*|_{N=4} = A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & -10 \\ 0 & 12 & -12 \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

Данная матрица является вырожденной, ее собственные значения совпадают и равны

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \quad (4.75)$$

Матрица  $U_4$ , приводящая матрицу  $A_4$  к жордановой форме, может быть построена из ее собственных векторов

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/12 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1/24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

При этом каждый из них находится из условия  $(A_4 - \lambda I)V_{i+1} = V_i$ , решение которого единственно с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Таким образом матрица  $U_4$  имеет вид

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/24 \\ 1 & 1/12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_4 = U_4^{-1}A_4U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.77)$$

При этом существует интересное свойство: произведение  $A_4 \cdot U_4$  является матрицей  $U_4$ , все столбцы которой сдвинуты на одну позицию вправо, т. е.

$$A_4 \cdot U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 1 & 1/12 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

Поэтому при умножении матрицы  $U_4^{-1}$  на произведение  $A_4 \cdot U_4$  в ответе возникает жорданова форма:

$$U_4^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/24 \\ 1 & 1/12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

$$U_4^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 1 & 1/12 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.80)$$

Данное свойство является не особенностью матриц конкретного вида, а верно для произвольных невырожденных матриц. Если  $\widehat{M}$  является  $M \times$

$M$  матрицей

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det \widehat{M} \neq 0, \quad (4.81)$$

а  $\widetilde{M}$  является матрицей  $\widehat{M}$ , все столбцы которой сдвинуты на одну позицию вправо, а все элементы первого столбца равны нулю, то произведение матриц  $\widehat{M}^{-1}$  и  $\widetilde{M}$  будет иметь жорданову форму:

$$\widehat{M}^{-1} \cdot \widetilde{M} = \widehat{M}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nn-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.82)$$

где отсутствующие элементы обозначают нули. Действительно, умножение  $\widehat{M}^{-1}$  на первый (пустой) столбец дает пустой столбец в правой части, умножение  $\widehat{M}^{-1}$  на остальные столбцы с номерами 2, ...,  $n$  дает единичную матрицу, но начинающуюся не с элемента с номером 11, а с элемента с номером 12 — т. е. единичную матрицу, элементы которой находятся не на главной диагонали, а на диагонали над ней.

Таким образом идея состоит в том, чтобы найти такую невырожденную матрицу  $U_N$ ,  $\det U_N \neq 0$ , чтобы произведение  $A_N \cdot U_N$  состояло из тех же столбцов, что и сама матрица  $U_N$ , но их положение было бы сдвинуто на одну позицию вправо,  $i \rightarrow i + 1$ , а все элементы первого столбца равнялись бы нулю. Если такая матрица будет найдена, то



В выражении (4.85) римскими цифрами обозначены знаменатели предыдущих столбцов, т. е.  $\text{III} = 73440$ ,  $\text{IV} = 73440 \cdot 182 = 13366080$ , и т. д. Знаменатели всех элементов, находящихся в одном столбце, одинаковы; символом «/» обозначено деление числителя элемента на его знаменатель, написанный явно только для первого элемента столбца.

Из выражения (4.85) видно, что знаменатели элементов матрицы  $U_{18}$  являются произведением элементов нижней диагонали матрицы  $A_{18}$  (см. (4.84)), а числители — элементами треугольника Паскаля, т. е. сочетаниями  $C_n^k = \binom{n}{k}$ , где  $n$  является номером строки (нумерация идет снизу вверх), а  $k$  — номером столбца (нумерация идет слева направо).

Предположение состоит в том, что данные правила являются универсальными, т. е. позволяют строить искомую матрицу  $U_N$  для *любой* исходной матрицы  $A_N$ , т. е. для семейства операторов с *произвольным*  $N$ .

Поскольку в обозначениях (4.69) строка матрицы  $A$  соответствует оператору с некоторым фиксированным номером  $p$  (см. (4.1)), элемент  $\binom{n}{k}$  на самом деле равен  $\binom{p}{\mathcal{C}}$ , где  $\mathcal{C}$  является номером столбца, а нумерация начинается с нуля.

#### 4.4.4. Доказательство

Доказательство данной гипотезы разделено на несколько этапов. Вначале будет доказана ее справедливость для первых двух столбцов, затем — для трех нижних диагоналей, после чего — для всех остальных элементов.

#### 4.4.4.1. Столбец №1 ( $\mathcal{C} = 0$ )

В соответствии с (4.71),

$$\sum_{i=-2}^1 \gamma_{N,p+i}^* = 0. \quad (4.86)$$

Из этого следует, что если первый столбец матрицы  $U_N$  равен  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , то

первый столбец матрицы  $A \cdot U$  равен  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

#### 4.4.4.2. Столбец №2 ( $\mathcal{C} = 1$ )

Последним элементом во втором (первом нетривиальном) столбце, для матрицы  $U_{18}$  он равен  $1/306$  (см. (4.85)), является элемент, определяемый последним элементом нижней диагонали матрицы  $A$  (для матрицы  $A_{18}$  он равен  $-306$ , см. (4.84)). Поскольку данный элемент находится на *нижней* диагонали, он, в свою очередь, определяется выражением (4.71a); поскольку он является *последним*, он отвечает оператору с  $p = 0$  и  $2m = N$ ; т. о. необходимый элемент матрицы  $A_N$  равен  $N(N - 1)$  для *любой* размерности матрицы  $A_N$ .

Из данных утверждений следует, что уравнение, определяющее искомый элемент  $X$  матрицы  $U_N$ , имеет вид



$$N(N - 1) \cdot X = 1. \quad (4.87)$$

Как следствие,

$$X = \frac{1}{N(N - 1)}, \quad (4.88)$$

что согласуется с (4.85): при  $N = 18$  правая часть (4.88) равна  $1/306$ .

Уравнение того же типа, что и (4.87), но отвечающее второму элементу в столбце, имеет вид

$$(N - 2)(N - 3) \cdot X + \frac{2 + (N - 2)(7 - N)}{N(N - 1)} = 1 \quad (4.89)$$

и следует из требования равенства единице суммы двух членов, один из которых отвечает переходу  $\gamma_{N,p+1}^*$  (4.71a), а второй переходу  $\gamma_{N,p}^*$  (4.71b), а также того факта, что данные элементы отвечают оператору с  $p = 1$ . Из уравнения (4.89) следует, что

$$X = \frac{2}{N(N - 1)}. \quad (4.90)$$

Уравнение для третьего элемента в столбце имеет тот же вид, что и уравнения (4.87) и (4.89), но содержит три члена. Поскольку мы поднялись еще на одну позицию вверх, параметры оператора  $F_{N,p} = (\theta_i \theta_i)^p (n_s \theta_s)^{2m}$  стали равны  $p = 2$  и  $2m = N - 4$ . Таким образом

$$\begin{aligned} & (N - 4)(N - 5) \cdot X + \\ & + [4 + 8(N - 4) - (N - 4)(N - 5)] \cdot \frac{2}{N(N - 1)} + \\ & + [8 - 4 - 8(N - 4)] \cdot \frac{1}{N(N - 1)} = 1, \end{aligned} \quad (4.91)$$

следовательно

$$X = \frac{3}{N(N-1)}. \quad (4.92)$$

Выражения (4.87), (4.89) и (4.91) состоят из различного числа членов, поэтому их необходимо рассматривать отдельно от общего уравнения (4.93). Другим выделенным с этой точки зрения элементом является первый элемент в столбце, для матрицы (4.85) он равен  $9/306$ . Для этого элемента необходимо проверить тождество; это будет сделано в (4.95). Уравнение для всех остальных элементов второго столбца всегда содержит четыре члена; учитывая (4.88), (4.90) и (4.92), получаем

$$2m(m-1) \cdot X + [2p + 8pm - 2m(2m-1)] \cdot \frac{k+2}{N(N-1)} + \\ + [4p(p-1) - 2p - 8pm] \cdot \frac{k+1}{N(N-1)} - 4p(p-1) \cdot \frac{k}{N(N-1)} = 1, \quad (4.93)$$

где  $k$  является номером элемента в столбце и начинается с 1. Из (4.93) следует, что

$$X = \frac{k+3}{N(N-1)}. \quad (4.94)$$

Таким образом выражения (4.88), (4.90), (4.92) и (4.94) определяют все элементы второго столбца. Теперь необходимо проверить тождество для первого («самого верхнего») элемента. Данный элемент отвечает оператору с  $m = 0$ ;  $p = N/2$ , поэтому из (4.71) следует, что аналог уравнения (4.93) для него имеет вид

$$[4p(p-1) + 2p] \cdot \frac{1}{N(N-1)} \Big|_{p=N/2} = 1. \quad (4.95)$$

При подстановке  $p = N/2$  правая и левая части (4.95) действительно равны друг другу, т. о. тождество выполняется.

Данное утверждение заканчивает доказательство элементов второго столбца. Из (4.88), (4.90), (4.92) и (4.94) следует, что все элементы данного столбца имеют одинаковые знаменатели, а именно  $N(N - 1)$ , а числитель любого из них равен  $k$ , причем  $k = 1$  отвечает второму элементу с конца. Данные выражения найдены из требования, сформулированного в конце раздела 4.4.2: необходимо найти такую невырожденную матрицу  $U_N$ , чтобы произведение  $A_N \cdot U_N$  состояло из тех же столбцов, что и сама матрица  $U_N$ , но их положение было бы сдвинуто на одну позицию вправо. При этом все элементы предыдущего столбца равны 1, см. раздел 4.4.4.1.

Для дальнейшего нам потребуется объединить формулы (4.88), (4.90), (4.92) и (4.94) с помощью сочетаний: поскольку для данного столбца  $\mathcal{C} = 1$ ,

$$X = \frac{1}{N(N - 1)} \cdot \binom{p}{1}. \quad (4.96)$$

#### 4.4.4.3. Три нижние диагонали

Следующим этапом в доказательстве данной гипотезы являются элементы, находящиеся на трех нижних диагоналях. Данные три диагонали необходимо рассматривать отдельно от всех остальных по той же причине, по которой уравнения (4.87), (4.89) и (4.91) необходимо рассматривать отдельно от общего выражения (4.93) — первые три уравнения, отвечающие операторам с  $p = 0$ ,  $p = 1$  или  $p = 2$ , являются «выделенными» и содержат разное число членов.

Начнем рассмотрение с нижней диагонали. Произведение любого ее элемента с соответствующим элементом матрицы  $A_N$  должно быть равно

элементу матрицы  $U_N$ , находящемуся в той же строке, но в предыдущем столбце. Поскольку элементы первых двух столбцов уже известны, рассмотрим последний (нижний) элемент столбца  $\mathcal{C} = 1$  и построим последовательность всех остальных элементов данной диагонали.

Все элементы, находящиеся на нижней диагонали, связаны между собой условием

$$X \cdot \gamma_{N,p+1}^* = Y, \quad (4.97)$$

где  $X$  и  $Y$  являются элементами рассматриваемой диагонали, причем  $Y$  — уже известный элемент из столбца с номером  $\mathcal{C}_Y = i$ , а  $X$  — искомый элемент, находящийся в столбце с номером  $\mathcal{C}_X = i + 1$ .

В соответствии с (4.71a), коэффициент  $\gamma_{N,p+1}^*$  равен  $2m(2m - 1)$ . Рассматривая элементы двух первых столбцов, для которых  $\mathcal{C}_Y = 0$  (т. е.  $Y = 1$ , см. раздел 4.4.4.1),  $\mathcal{C}_X = 1$ , а  $2m = N$ , имеем:

$$X = \frac{1}{N(N - 1)}. \quad (4.98)$$

Номер строки для каждого последующего элемента данной диагонали возрастает, поэтому число  $2m$ , входящее в выражение (4.71a) для  $\gamma_{N,p+1}^*$ , убывает от  $N$  (столбец  $\mathcal{C} = 1$ ) до 2 (последний столбец). Таким образом из (4.97) следует, что последовательность элементов данной (нижней) диагонали равна

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N(N - 1)}; \quad \frac{1}{N(N - 1)(N - 2)(N - 3)}; \quad \dots \\ & \dots \quad \frac{1}{N(N - 1)(N - 2)(N - 3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Уравнение, аналогичное (4.97) и связывающее между собой элементы, находящиеся на второй снизу диагонали, имеет вид

$$\begin{aligned} X \cdot \gamma_{N,p+1}^* + \frac{1}{N(N-1)\dots(N-2p+2)(N-2p+1)} \cdot \gamma_{N,p}^* = \\ = \frac{p}{N(N-1)\dots(N-2p+4)(N-2p+3)}, \end{aligned} \quad (4.100)$$

где  $X$  является искомым элементом, а  $\gamma_{N,p+1}^*$  и  $\gamma_{N,p}^*$  определены в (4.71a) и (4.71b). Числитель выражения, находящегося в правой части, следует из явного вида данных уравнений: при  $C = 1$  искомым элемент отвечает оператору с  $p = 2$ , причем в соответствии с (4.90) его правая часть равна  $2/N(N-1)$ . Решение данного уравнения (см. (4.101)) пропорционально  $p+1$  и является отправной точкой для следующего элемента диагонали, который соответствует оператору с  $p = 3$ , и т. д. Необходимо иметь в виду, что в уравнении (4.100) правая часть является не искомой, а *известной* величиной. Из (4.100) следует, что

$$X = \frac{p+1}{N(N-1)\dots(N-2p+1)}, \quad (4.101)$$

что находится в согласии с (4.85). Поскольку данные элементы находятся на второй снизу диагонали, числитель (4.101) может быть записан как

$$p+1 = \binom{p+1}{p}. \quad (4.102)$$

Для элементов, находящихся на третьей снизу диагонали, уравнением вида (4.97) и (4.100) является уравнение

$$\begin{aligned}
& X \cdot \gamma_{N,p+1}^* + \frac{p}{N(N-1) \dots (N-2p+4)(N-2p+3)} \cdot \gamma_{N,p}^* + \\
& + \frac{1}{N(N-1) \dots (N-2p+4)(N-2p+3)} \cdot \gamma_{N,p-1}^* = \\
& = \frac{\alpha}{N(N-1) \dots (N-2p+6)(N-2p+5)}, \tag{4.103}
\end{aligned}$$

где  $X$  является искомым элементом, а  $\gamma_{N,p+1}^*$ ,  $\gamma_{N,p}^*$  и  $\gamma_{N,p-1}^*$  определены в (4.71a), (4.71b) и (4.71c). Кроме того,

$$\alpha = 3 + \sum_{n=3}^{p-1} n = \frac{1}{2} p(p-1). \tag{4.104}$$

Из (4.103) и (4.104) следует, что

$$X = \frac{\frac{1}{2} p(p+1)}{N(N-1) \dots (N-2p+3)}, \tag{4.105}$$

что также может быть записано с помощью сочетаний:

$$X = \frac{1}{N(N-1) \dots (N-2p+3)} \cdot \binom{p+1}{p-1}. \tag{4.106}$$

Таким образом, на данном этапе гипотеза, сформулированная в разделе 4.4.2, доказана для элементов, находящихся в двух первых столбцах и трех нижних диагоналях — данные элементы удовлетворяют тому требованию, чтобы произведение матриц  $A_N \cdot U_N$  состояло из тех же столбцов, что и сама матрица  $U_N$ , но их положение было бы сдвинуто на одну позицию вправо.

#### 4.4.4.4. Все остальные элементы

Для завершения доказательства необходимо ввести некоторые обозначения, которые будут использоваться только в текущем разделе. Обо-

значим номер столбца символом  $\mathcal{C}$ , причем первому столбцу сопоставим значение  $\mathcal{C} = 0$ . Символом  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  обозначим элемент, находящийся в столбце с номером  $\mathcal{C}$  и строке с номером  $\mathcal{L}$  (нумерация строк идет снизу вверх и начинается также со значения  $\mathcal{L} = 0$ ). Гипотеза состоит в том, что для любых  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{L}$  числитель элемента  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  является сочетанием  $\binom{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}$ . Для доказательства воспользуемся комбинаторными соотношениями между сочетаниями:

$$\binom{\mathcal{L}}{\mathcal{C}} = \binom{\mathcal{L}}{\mathcal{C}-1} \cdot \frac{\mathcal{L}+1-\mathcal{C}}{\mathcal{C}}; \quad (4.107a)$$

$$\binom{\mathcal{L}+\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = \binom{\mathcal{L}+\mathcal{C}-1}{\mathcal{C}-1} \cdot \frac{\mathcal{L}+\mathcal{C}}{1+\mathcal{C}}; \quad (4.107b)$$

$$\binom{\mathcal{L}}{\mathcal{C}} = \binom{\mathcal{L}-1}{\mathcal{C}} \cdot \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}-\mathcal{C}}. \quad (4.107c)$$

Выражения (4.107a) — (4.107c) позволяют передвигаться в горизонтальном, вертикальном и диагональном направлениях матрицы  $U_N$ .

В общем случае элементы матрицы  $U_N$  связаны между собой уравнением

$$\begin{aligned} (N-2p)(N-2p-1) \cdot X + \frac{2p+4p(N-2p)-(N-2p)(N-2p-1)}{N(N-1)\dots(N-2\mathcal{C}+1)} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{L}+2} + \\ + \frac{4p(p-1)-2p-4p(N-2p)}{N(N-1)\dots(N-2\mathcal{C}+1)} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{L}+1} + \frac{-4p(p-1)}{N(N-1)\dots(N-2\mathcal{C}+1)} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \\ = \frac{(\mathcal{C}-1)_{\mathcal{L}+3}}{N(N-1)\dots(N-2\mathcal{C}+3)}, \end{aligned} \quad (4.108)$$

где  $X$  — искомый элемент. Для доказательства гипотезы раздела 4.4.2 необходимо проверить два утверждения:

(1) Знаменатели элементов  $X$  равны произведению  $N(N-1)\dots(N-2\mathcal{C}+1)$ .

(2) Числители элементов  $X$ , обозначенные как  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}+3}$ , являются соответствующими сочетаниями. При этом необходимо иметь в виду, что элементы трех нижних диагоналей уже известны (см. (4.99), (4.101) и (4.105)), и их числители являются сочетаниями.

Таким образом необходимо проверить, выполняется ли уравнение (4.108), если  $X$  удовлетворяет требованиям (1) и (2), т. е. если

$$X = \frac{\mathcal{C}_{\mathcal{L}+3}}{N(N-1)\dots(N-2\mathcal{C}+1)}, \quad (4.109)$$

а все числители  $\mathcal{C}$  в (4.108) являются сочетаниями.

Подставим  $X$  из (4.109) в уравнение (4.108):

$$\begin{aligned} & \frac{(N-2p)(N-2p-1)}{(N-2\mathcal{C}+2)(N-2\mathcal{C}+1)} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{L}+3} + \\ & + \frac{2p+4p(N-2p)-(N-2p)(N-2p-1)}{(N-2\mathcal{C}+2)(N-2\mathcal{C}+1)} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{L}+2} + \\ & + \frac{4p(p-1)-2p-4p(N-2p)}{(N-2\mathcal{C}+2)(N-2\mathcal{C}+1)} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{L}+1} + \\ & + \frac{[-4p(p-1)]}{(N-2\mathcal{C}+2)(N-2\mathcal{C}+1)} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{L}} = (\mathcal{C}-1)_{\mathcal{L}+3}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Используя (4.107), выразим  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}+3}$ ,  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}+2}$ ,  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}+1}$  и  $(\mathcal{C}-1)_{\mathcal{L}+3}$  через  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ :



$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}+3} = \frac{(\mathcal{L} + 2 + \mathcal{C})(\mathcal{L} + 1 + \mathcal{C})(\mathcal{L} + \mathcal{C})}{(\mathcal{L} + 2)(\mathcal{L} + 1)\mathcal{L}} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{L}}; \quad (4.111a)$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}+2} = \frac{(\mathcal{L} + 1 + \mathcal{C})(\mathcal{L} + \mathcal{C})}{(\mathcal{L} + 1)\mathcal{L}} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{L}}; \quad (4.111b)$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}+1} = \frac{(\mathcal{L} + \mathcal{C})}{\mathcal{L}} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{L}}; \quad (4.111c)$$

$$(\mathcal{C} - 1)_{\mathcal{L}+3} = \frac{\mathcal{C}(\mathcal{L} + 1 + \mathcal{C})(\mathcal{L} + \mathcal{C})}{(\mathcal{L} + 2)(\mathcal{L} + 1)\mathcal{L}} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{L}}. \quad (4.111d)$$

Подставляя (4.111) в (4.110), получаем выражение, не содержащее произвольного параметра  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{(N - 2p)(N - 2p - 1)}{(N - 2\mathcal{C} + 2)(N - 2\mathcal{C} + 1)} \cdot \frac{(\mathcal{L} + 2 + \mathcal{C})(\mathcal{L} + 1 + \mathcal{C})(\mathcal{L} + \mathcal{C})}{(\mathcal{L} + 2)(\mathcal{L} + 1)\mathcal{L}} + \\ & + \frac{2p + 4p(N - 2p) - (N - 2p)(N - 2p - 1)}{(N - 2\mathcal{C} + 2)(N - 2\mathcal{C} + 1)} \cdot \frac{(\mathcal{L} + 1 + \mathcal{C})(\mathcal{L} + \mathcal{C})}{(\mathcal{L} + 1)\mathcal{L}} + \\ & + \frac{4p(p - 1) - 2p - 4p(N - 2p)}{(N - 2\mathcal{C} + 2)(N - 2\mathcal{C} + 1)} \cdot \frac{(\mathcal{L} + \mathcal{C})}{\mathcal{L}} + \frac{[-4p(p - 1)]}{(N - 2\mathcal{C} + 2)(N - 2\mathcal{C} + 1)} = \\ & = \frac{\mathcal{C}(\mathcal{L} + 1 + \mathcal{C})(\mathcal{L} + \mathcal{C})}{(\mathcal{L} + 2)(\mathcal{L} + 1)\mathcal{L}}. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Кроме того, числа  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{C}$  и  $p$  не являются независимыми:

$$1 + \mathcal{L} + \mathcal{C} = p. \quad (4.113)$$

При подстановке связи (4.113) в уравнение (4.112) правая и левая части действительно равны друг другу. Это означает, что предположение (4.109) является верным!

#### 4.4.5. Заключение

В разделах 4.4.4.1 – 4.4.4.4 была доказана гипотеза, что для *любой* размерности  $N$  существует матрица  $U_N$ , приводящая матрицу критических размерностей к жордановой форме.

Как следствие, матрица критических размерностей (4.20) является вырожденной, поэтому решение уравнения РГ, описывающее асимптотическое поведение среднего значения операторов (4.10), содержит не только степенную зависимость, обусловленную канонической размерностью, но и *логарифмические* поправки; см. (4.34).

## 5. Ренормировка составных операторов. Модели №2 и №3

### 5.1. Аномальный скейлинг для корреляционных функций в инерционном интервале, составные операторы и операторное разложение

Для моделей №2 и №3 тензорные составные операторы, построенные целиком из полей  $\theta$ , имеют вид

$$F_{N,l} = \theta_{i_1}(x) \cdots \theta_{i_l}(x) (\theta_i(x)\theta_i(x))^p + \dots, \quad (5.1)$$

где  $l \leq N$  является числом свободных векторных индексов, а  $N = l + 2p$  — полным числом полей, входящих в данный оператор; тензорные индексы и аргумент  $x$  величины  $F_{N,l}$  подразумеваются. Многоточие отвечает вычитанию тензорных структур с дельта-символами Кронекера, обеспечивающее неприводимость данного тензора, т. е. равенство нулю свертки по любой паре значков (например, оператор  $F_{2,2} = \theta_i\theta_j - \delta_{ij} [\theta_k\theta_k/d]$ ).

Стоит отметить, что в случае скалярного поля (либо в  $\mathcal{A}$ -модели при  $\mathcal{A} = 0$ ) вместо члена  $\partial_k(v_k\theta_i - v_i\theta_k)$  в функционале действия (2.42) присутствует член  $\partial_k(v_k\theta)$ , благодаря чему существует симметрия сдвига  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \text{const}_i$ . Поэтому вместо операторов (5.1) необходимо рассматривать операторы вида  $F_n = (\partial_i\theta\partial_i\theta)^n$ , построенные из градиентов поля  $(\partial_i\theta)$ .

Объектами изучения являются одновременные парные корреляционные функции операторов (5.1). В соответствии с разделом 4.2 и приложе-

нием С.3.3, решение уравнения РГ для таких корреляторов имеет вид

$$\langle F_{N,l}(t, \mathbf{x}) F_{K,j}(t, \mathbf{x}') \rangle \simeq (\mu r)^{-\Delta_{N,l} - \Delta_{K,j}} \cdot \zeta_{N,l;K,j}(Mr), \quad (5.2)$$

где  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ , а  $\zeta(Mr)$  — некоторая неизвестная функция.

Данная асимптотика верна при  $\Lambda r \gg 1$  и произвольных значениях  $Mr$ ; вид скейлинговой функции  $\zeta(Mr)$  в инерционном интервале  $l \ll r \ll L$  изучается с помощью операторного разложения. Из раздела 4.3 (см. (4.62) — (4.63)) следует, что искомая асимптотика для скейлинговых функций  $\zeta(Mr)$  РГ-представления (5.2) в области  $Mr \ll 1$  имеет вид

$$\zeta(Mr) \simeq \sum_F A_F (Mr)^{\Delta_F}, \quad (5.3)$$

где коэффициенты  $A_F = A_F(Mr)$  регулярны по  $(Mr)^2$ . Т. к. существует оператор  $F$ , обладающий наименьшей размерностью, главный вклад в разложение (5.3) имеет вид

$$\zeta(Mr) \cong \text{const} \cdot (Mr)^{\Delta_{min}}. \quad (5.4)$$

Поскольку для любой мультипликативно ренормируемой величины  $F = Z_F \cdot F_R$  критическая размерность  $\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*$  (см. (3.79)), учитывая (3.61) и (3.101), находим, что

$$\Delta_{min} = \Delta_{F_{N,l}} = N(-1 + O(\xi)) + \gamma_{F_{N,l}}^*. \quad (5.5)$$

Это означает, что в случае операторов (5.1) — благодаря отрицательным каноническим размерностям — аномальный скейлинг присутствует независимо от знака поправки  $\gamma_{F_{N,l}}^*$ ; в случае операторов  $F_n = (\partial_i \theta \partial_i \theta)^n$  наличие или отсутствие аномального скейлинга определяется знаком  $\gamma_{F_n}^*$ . Поскольку вклады операторов (5.1) в операторное разложение расходятся при  $Mr \rightarrow 0$ , их принято называть «опасными».

Таким образом, асимптотическое поведение коррелятора (5.2) имеет вид

$$\langle F_{N,l}(t, \mathbf{x}) F_{K,j}(t, \mathbf{x}') \rangle \simeq (\mu r)^{-\Delta_{N,l} - \Delta_{K,j}} \cdot (Mr)^{\Delta_{N+K,x}}, \quad (5.6)$$

где  $\Delta_{N+K,x}$  — критическая размерность оператора  $F_{N+K,x}$ , обладающего минимальной размерностью.

## 5.2. Скаляризация диаграмм

Рассмотрим составной тензорный оператор

$$F_{N,l} = \theta_{i_1} \dots \theta_{i_l} (\theta_i \theta_i)^p, \quad N = l + 2p. \quad (5.7)$$

Данный оператор ренормируется мультипликативно,  $F_{Nl} = Z_{Nl} \cdot F_{Nl}^R$ . Как и в разделе 4.1.1 константы ренормировки  $Z_{Nl} = Z_{Nl}(g, \xi, d)$  определяются из требования УФ-конечности 1-неприводимых корреляционных функций

$$\begin{aligned} & \langle F_{Nl}^R(x) \theta(x_1) \dots \theta(x_n) \rangle_{1\text{-непр}} = \\ & = Z_{Nl}^{-1} \langle F_{Nl}(x) \theta(x_1) \dots \theta(x_n) \rangle_{1\text{-непр}} \equiv Z_{Np}^{-1} \Gamma_{Np}(x; x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (5.8)$$

На рисунках 5.1 — 5.5 изображены все необходимые диаграммы для вычисления  $\Gamma_{Nl}$  во втором порядке.

Вклад отдельной диаграммы в функционал  $\Gamma_{Nl}$  имеет вид (4.4). Так как вершина  $V_{\alpha\beta\dots}$  и произведение  $\theta_a \theta_b \dots$  симметричны по индексам  $\alpha\beta\dots$  и  $ab\dots$ , то величина  $I_{\alpha\beta\dots}^{ab\dots}$  автоматически оказывается симметризованной по отношению к любым перестановкам верхних (латинских) и нижних (греческих) индексов.

Обозначим такую симметризацию символом  $Sym$ . Тогда для диаграммы с любым фиксированным числом лучей  $k$  величина  $Sym[I]$  пред-

ставляет собой свертку

$$Sym[I] = \sum_i B_i S_i \quad (5.9)$$

базисных структур  $S_i = (S_i)_{\alpha\beta\dots}^{ab\dots}$  с некоторыми коэффициентами  $B_i$ . Для  $k = 2$  и  $k = 3$  базисные структуры имеют вид

$$S_1 = Sym[\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\beta}], \quad S_2 = Sym[\delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}] \quad \text{для } k = 2, \quad (5.10a)$$

$$S_1 = Sym[\delta_{a\alpha}\delta_{b\beta}\delta_{c\gamma}], \quad S_2 = Sym[\delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}\delta_{c\gamma}] \quad \text{для } k = 3. \quad (5.10b)$$

При этом непосредственно из диаграмм вычисляются не сами величины  $B_i$ , а связанные с ними скалярные величины  $A_i$ :

$$A_i = tr[(S_i)_{\alpha\beta\dots}^{ab\dots} Sym[I_{\alpha\beta\dots}^{ab\dots}]] = tr[S_i \cdot SymI], \quad (5.11)$$

где символ  $tr$  означает свертку по всем повторяющимся индексам. Связь величин  $A_i$  и  $B_i$  чисто комбинаторная и выполнена в работе [21]. В результате

$$B_1 = 2\alpha_2[dA_1 - A_2], \quad (5.12a)$$

$$B_2 = \alpha_2[-2A_1 + (d+1)A_2] \quad (5.12b)$$

для  $k = 2$ ,

$$B_1 = 6\alpha_3[(d+2)A_1 - 3A_2], \quad (5.13a)$$

$$B_2 = 9\alpha_3[-2A_1 + (d+1)A_2] \quad (5.13b)$$

для  $k = 3$ .

В выражениях (5.12) – (5.13)

$$\alpha_2 = [(d-1)d(d+2)]^{-1} \quad \text{для } k = 2, \quad (5.14a)$$

$$\alpha_3 = [(d-1)d(d+2)(d+4)]^{-1} \quad \text{для } k = 3. \quad (5.14b)$$

Следующим шагом является свертка внутреннего блока  $I_{\alpha\beta\dots}^{ab\dots}$  с вершинным множителем (составным оператором)  $V_{\alpha\beta\dots}$  и произведением полей  $\theta_a\theta_b\dots$ . В результате ответ имеет вид (комбинаторный вывод см. в работах [21, 70])

$$\Gamma_{Nl} = F_{Nl}\bar{\Gamma}, \quad \text{где} \quad \bar{\Gamma} = \sum_i k_i B_i, \quad (5.15)$$

а коэффициенты  $k_i$  равны

$$k_1 = N(N-1), \quad k_2 = l_{Nl} \quad (5.16a)$$

для  $k = 2$ ,

$$k_1 = N(N-1)(N-2), \quad k_2 = (N-2)l_{Nl} \quad (5.16b)$$

для  $k = 3$ , а

$$l_{Nl} = (N-l)(d+N+l-2). \quad (5.16c)$$

Окончательно, учитывая (5.12) — (5.13) и (5.16), получаем, что  $\bar{\Gamma}$  равно

$$\bar{\Gamma} = \sum_i p_i A_i, \quad (5.17)$$

где

$$p_1 = 2\alpha_2[N(N-2)(d-1) + \lambda_l], \quad (5.18a)$$

$$p_2 = \alpha_2[N(N+d)(d-1) - (d+1)\lambda_l] \quad (5.18b)$$

для  $k = 2$ ,

$$p_1 = 6\alpha_3(N-2)[N(N-4)(d-1) + 3\lambda_l], \quad (5.19a)$$

$$p_2 = 9\alpha_3(N-2)[N(N+d)(d-1) - (d+1)\lambda_l] \quad (5.19b)$$

для  $k = 3$ , множители  $A_{1,2}$  представлены в (5.11),  $\alpha_{2,3}$  — в (5.14), а

$$\lambda_l = l(l+d-2). \quad (5.20)$$

В работе [21] показано, что при данном выборе коррелятора (2.41) (а именно при жестком обрезании  $k > m$ ) и *точном* ответе для оператора собственной энергии  $\Sigma$  (см. рисунок 2.7) вклады диаграмм со вставками оператора собственной энергии автоматически взаимно сокращаются. Это связано с тем, что для учета таких поправок можно перейти от коэффициента вязкости  $\nu_0$  к эффективной вязкости

$$\nu_{\text{эфф.}} = \nu_0 + g \cdot \frac{d-1}{2d} \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}, \quad (5.21)$$

см. (3.48), и ввести множитель  $Q$ :

$$\bar{\Gamma}_1 = \bar{\Gamma}^{(1)}, \quad \bar{\Gamma}_2 = \bar{\Gamma}^{(2)} - Q \cdot \bar{\Gamma}^{(1)}, \quad (5.22)$$

где

$$Q = g \cdot \frac{d-1}{2d} \cdot \frac{1}{\xi} \left[ (\mu/m)^\xi - 1 \right]. \quad (5.23)$$

При разложении  $Q$  в ряд по  $\xi$  возникают члены вида  $\ln \mu/m$ , при этом благодаря жесткому обрезанию  $k > m$  члена  $O(1)$  в разложении нет; такие же логарифмические члены возникают и при разложении по  $\xi$  выражения  $(\mu/m)^{l\xi}$ , стоящего множителем перед любой  $l$ -петлевой диаграммой. Поскольку в схеме MS константы ренормировки зависят только от заряда и не зависят от массовых параметров  $m$  и  $\mu$ , данные вклады обязаны взаимно сократиться. Это означает, что при вычислениях можно сразу положить  $Q = 0$  (т. е. не учитывать вставки оператора собственной энергии) и  $\mu/m = 1$ ; как следствие,

$$\bar{\Gamma}_2 = \bar{\Gamma}^{(2)}. \quad (5.24)$$



### 5.3. Модель №2

В данном разделе будет представлен двухпетлевой расчет аномальных размерностей  $\gamma_{F_{N,l}}^*$  составных операторов  $F_{N,l}$  для модели (2.42). Данные аномальные размерности входят в критические показатели (5.6), определяя таким образом асимптотическое поведение корреляционных функций составных операторов.

По определению аномальная размерность  $\gamma_F$  равна

$$\gamma_F = \beta_g \partial_g \ln Z_F. \quad (5.25)$$

Поскольку  $\gamma_F$  является одним из слагаемых в уравнении РГ (3.45) для конечных (ренормированных) операторов (5.1), она не может иметь полюсов по  $\xi$ . Раскладывая выражение (5.25) в ряд и учитывая вид констант  $Z_F$  в схеме MS, получаем

$$\begin{aligned} \ln Z_F &= \ln \left[ 1 + \frac{1}{\xi} \cdot C_1(g) + \frac{1}{\xi^2} \cdot C_2(g) + \frac{1}{\xi^3} \cdot C_3(g) + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{\xi} \cdot C_1(g) + \frac{1}{\xi^2} \cdot B_2(g) + \frac{1}{\xi^3} \cdot B_3(g) + O\left(\frac{1}{\xi^4}\right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Поскольку

$$\beta_g(g) = -g \cdot (\xi + \gamma_g), \quad (5.27)$$

из (5.26) следует, что

$$\gamma_F = -g(\xi + \gamma_g) \cdot \left[ \frac{1}{\xi} \cdot C_1(g) + \frac{1}{\xi^2} \cdot B_2(g) + \frac{1}{\xi^3} \cdot B_3(g) + \dots \right]. \quad (5.28)$$

В силу требования конечности  $\gamma_F$  при  $\xi \rightarrow 0$  все члены кроме первого в (5.28) должны взаимно сократиться, в результате чего

$$\gamma_F = -g \cdot C_1(g). \quad (5.29)$$

Таким образом вклад в аномальную размерность дают лишь коэффициенты при полюсе первого порядка по  $\xi$ .

### 5.3.1. Однопетлевая диаграмма

Однопетлевая диаграмма  $\mathcal{D}_1$  представлена на рисунке (5.1).

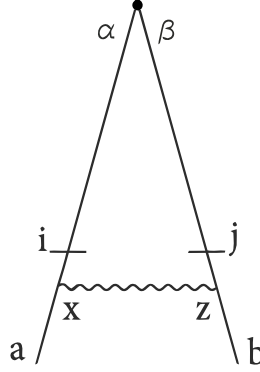


Рис. 5.1. Однопетлевая диаграмма  $\mathcal{D}_1$ .

Аналитическое выражение для данной диаграммы имеет вид

$$I = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{-i\omega + \nu k^2} \cdot \frac{1}{i\omega + \nu k^2} \cdot \frac{D_0}{k^{d+\xi}} \times J_1, \quad (5.30)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= P_{\alpha i}(\mathbf{k}) \cdot P_{\beta j}(\mathbf{k}) \cdot P_{xz}(\mathbf{k}) \cdot V_{i,xa}(\mathbf{k}) \cdot V_{j,zb}(-\mathbf{k}) = \\ &= P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) k_a k_b. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Здесь  $V_{c,ab}(\mathbf{k}) \equiv V_{cab}(\mathbf{k}) = i(k_a \delta_{bc} - k_b \delta_{ac})$  — вершина (2.44). Интеграл по частоте равен

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + \nu k^2} \frac{1}{i\omega + \nu k^2} = \frac{1}{2\nu k^2}, \quad (5.32)$$

симметризирующие структуры  $S_1$  и  $S_2$  для двухлучевой диаграммы представлены в (5.10а).

Таким образом,

$$A'_1 = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\beta} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\alpha}) \cdot J_1 = 0; \quad (5.33a)$$

$$A'_2 = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ab} \cdot J_1 = (d-1)k^2. \quad (5.33b)$$

Учитывая (1.4) получаем, что

$$A_1 = 0; \quad (5.34a)$$

$$A_2|_{d=3} = \frac{d-1}{2} \cdot g \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^{d+\xi}} = \frac{d-1}{2} \cdot g \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi} \Big|_{d=3} = g \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}, \quad (5.34b)$$

где  $g \equiv \hat{g} \cdot C_d$ . Учитывая, что симметричный коэффициент для данной диаграммы равен  $1/2$ , окончательно получаем, что

$$A_2|_{d=3} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}. \quad (5.35)$$

Здесь и далее все интегралы для модели №2 вычислены для физически наиболее интересного случая трехмерного пространства ( $d = 3$ ).

В обозначениях последующих разделов 5.3.2 и 5.3.3 ответ для диаграммы  $\mathcal{D}_1$  имеет вид

$$A_1 = 0; \quad (5.36a)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}. \quad (5.36b)$$

### 5.3.2. Двухпетлевые диаграммы

Двухпетлевая диаграмма  $\mathcal{D}_{22}$  представлена на рисунке (5.2).

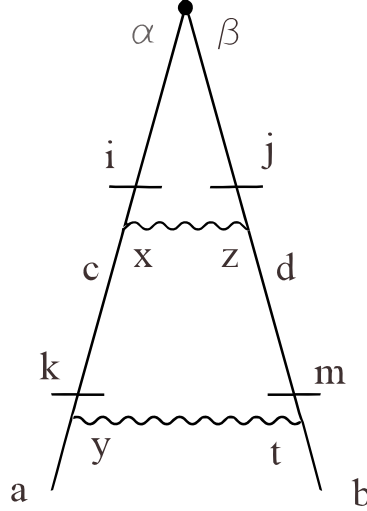


Рис. 5.2. Двухпетлевая диаграмма  $\mathcal{D}_{22}$ .

Аналитическое выражение для данной диаграммы имеет вид

$$I_{22} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{-i(\omega + \omega') + \nu(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2} \cdot \frac{1}{i(\omega + \omega') + \nu(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2} \cdot \frac{1}{-i\omega + \nu k^2} \cdot \frac{1}{i\omega + \nu k^2} \cdot \frac{D_0}{q^{d+\xi}} \cdot \frac{D_0}{k^{d+\xi}} \times J_{22}, \quad (5.37)$$

где индексная структура

$$J_{22} = P_{\beta j}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot P_{\alpha i}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot P_{dm}(\mathbf{k}) \cdot P_{ck}(\mathbf{k}) \cdot P_{xz}(\mathbf{q}) \cdot P_{yt}(\mathbf{k}) \cdot V_{i,xc}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot V_{j,zd}(-\mathbf{k} - \mathbf{q}) \cdot V_{k,ya}(\mathbf{k}) \cdot V_{m,tb}(-\mathbf{k}). \quad (5.38)$$

Поперечность вершины (2.54) дает следующее упрощение:

$$P_{\beta j}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot V_{j,zd}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \rightarrow \delta_{\beta j}, \quad P_{dm}(\mathbf{k}) \cdot V_{m,tb}(\mathbf{k}) \rightarrow \delta_{dm},$$

$$P_{\alpha i}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot V_{i,xc}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \rightarrow \delta_{\alpha i}, \quad P_{ck}(\mathbf{k}) \cdot V_{k,ya}(\mathbf{k}) \rightarrow \delta_{ck}. \quad (5.39)$$

Таким образом выражение для индексной структуры (5.38) принимает вид

$$\begin{aligned} J_{22} &= P_{xz}(\mathbf{q}) \cdot P_{yt}(\mathbf{k}) \cdot V_{\alpha,xc}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot V_{\beta,zd}(-\mathbf{k} - \mathbf{q}) \cdot V_{c,ya}(\mathbf{k}) \cdot V_{d,tb}(-\mathbf{k}) = \\ &= P_{xz}(\mathbf{q}) \cdot P_{cd}(\mathbf{k}) \cdot (k_x \delta_{\alpha c} - q_c \delta_{\alpha x}) \cdot (k_z \delta_{\beta d} - q_d \delta_{\beta z}) k_a k_b. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Интегралы по частотам равны

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{1}{-i(\omega + \omega') + \nu(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2} \cdot \frac{1}{i(\omega + \omega') + \nu(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{-i\omega + \nu k^2} \cdot \frac{1}{i\omega + \nu k^2} = \frac{1}{4\nu^2} \cdot \frac{1}{k^2(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

соответственно,

$$I_{22} = \frac{1}{4} \cdot g^2 \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{k^2(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2} \cdot \frac{1}{q^{d+\xi}} \cdot \frac{1}{k^{d+\xi}} \times J_{22}. \quad (5.42)$$

Теперь необходимо произвести свертку  $J_{22}$  с симметризирующими структурами  $S_1$  и  $S_2$ . В соответствии с (5.10a),

$$S_2 = Sym[\delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}] = \delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}, \quad (5.43)$$

поэтому

$$\begin{aligned} A'_2 &= k^2 \cdot P_{xz}(\mathbf{q}) \cdot P_{cd}(\mathbf{k}) \cdot (k_x \delta_{\alpha c} - q_c \delta_{\alpha x}) \cdot (k_z \delta_{\beta d} - q_d \delta_{\beta z}) \delta_{\alpha\beta} = \\ &= k^2 \cdot \{(d-1) \cdot [k_x P_{xz}(\mathbf{q}) k_z + q_x P_{xz}(\mathbf{k}) q_z] - 2k_x P_{x\alpha}(\mathbf{q}) P_{\alpha d}(\mathbf{k}) q_d\}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Учитывая, что

$$k_x P_{xz}(\mathbf{q}) k_z = k^2 \sin^2 \phi, \quad (5.45)$$

$$k_x P_{x\alpha}(\mathbf{q}) P_{\alpha d}(\mathbf{k}) q_d = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) \sin^2 \phi, \quad (5.46)$$

где  $\phi$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{q}$ , получаем, что

$$A'_2 = k^2 \cdot \{(d-1)(k^2 + q^2) \sin^2 \phi + 2(\mathbf{k}\mathbf{q}) \sin^2 \phi\}, \quad (5.47)$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^{d+\xi}} \frac{1}{k^{d+\xi}} \frac{(d-1)(k^2 + q^2) + 2(\mathbf{kq})}{(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2} \cdot \sin^2 \phi, \quad (5.48)$$

где  $A_2$  представляет собой выражение (5.42) после свертки со структурой  $S_2$ .

Интегрирование выражения (5.48) выполняется с помощью усреднения по углам. Поскольку  $A_2$  является скалярной функцией от  $k^2$ ,  $q^2$  и  $\mathbf{kq}$ ,

$$I^\phi = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^{d+\xi}} \frac{1}{k^{d+\xi}} = \int_m^\infty \frac{dk}{k} \int_m^\infty \frac{dq}{q} \int d\mathbf{n}, \quad (5.49)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный вдоль одного из векторов —  $\mathbf{k}$  либо  $\mathbf{q}$ ; см. [21]. Из (5.49) следует, что при  $d = 3$

$$\begin{aligned} I^\phi &= \int_m^\infty \frac{dk}{k} \int_m^\infty \frac{dq}{q} \int_0^\pi d\phi \sin \phi / \int_0^\pi d\phi \sin^{d-2} \phi = \\ &= \frac{1}{2} \int_m^\infty \frac{dk}{k} \int_m^\infty \frac{dq}{q} \int_0^\pi d\phi \sin \phi. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Вся зависимость интегралов вида (5.48) от «массового» параметра  $m$  содержится в членах

$$\int_m^\infty \frac{d\mathbf{k}}{k^{d+\xi}} \propto \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\xi}} \propto m^{-\xi}, \quad (5.51)$$

соответственно для  $n$ -петлевой диаграммы

$$f(m, \xi) = m^{-n\xi} \cdot f(\xi). \quad (5.52)$$

Применив операцию  $D_m = m\partial/\partial m$  к (5.52), получаем, что

$$f(m) = -\frac{1}{n\xi} \cdot D_m f(m), \quad (5.53)$$

таким образом операция  $D_m$  позволяет явно выделить полюс по  $\xi$  и далее вычислять заведомо сходящиеся интегралы. Кроме того,  $D_m$  симметризует несимметричное по  $k$  и  $q$  выражение, и

$$\begin{aligned} & D_m \left[ \int_m^\infty dk \int_m^\infty dq \int d\mathbf{n} \cdot F(k, q) \right] = \\ & = - \int_m^\infty dq \int d\mathbf{n} \cdot F(m, q) - \int_m^\infty dk \int d\mathbf{n} \cdot F(k, m). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Делая замену переменных  $k = m \cdot x$  и  $q = m \cdot x$ , получаем, что

$$\begin{aligned} & D_m \left[ \int_m^\infty dk \int_m^\infty dq \int d\mathbf{n} \cdot F(k, q) \right] = \\ & = - \int_1^\infty dx \int d\mathbf{n} \cdot F(x, 1) - \int_1^\infty dx \int d\mathbf{n} \cdot F(1, x). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Выделяя в  $A_2$  (см. (5.48)) полюс первого порядка по  $\xi$  и учитывая (5.50), получаем

$$A_2 = \frac{1}{8} \int_m^\infty dk \int_m^\infty dq \int_0^\pi d\phi \cdot \frac{2(k^2 + q^2) + 2(\mathbf{k}\mathbf{q})}{(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 k^{1+\xi} q^{1+\xi}} \sin^3 \phi = \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{8} \int_m^\infty dk \int_m^\infty dq \int_0^\pi d\phi \frac{\sin^3 \phi}{k^{1+\xi} q^{1+\xi}} + \\ & + \frac{1}{8} \int_m^\infty dk \int_m^\infty dq \int_0^\pi d\phi \frac{k^2 + q^2}{(k^2 + q^2 + 2kq \cos \phi) k^{1+\xi} q^{1+\xi}} \sin^3 \phi = \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$= A_2^{\xi^2} + A_2^\xi, \quad (5.58)$$

где  $A_2^{\xi^2}$  содержит *только* полюс второго порядка по  $\xi$  и поэтому не требуется для вычисления аномальной размерности  $\gamma_F^*$  (см. (5.29)). Применяя к члену  $A_2^\xi$  операцию  $D_m$  и учитывая (5.53) при  $n = 2$  и (5.55), а также вычитая расходимость, соответствующую полюсу второго порядка по

$\xi$ , получаем

$$A_2^\xi = \frac{1}{8} \int_1^\infty dx \int_0^\pi d\phi \left[ \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 2x \cos \phi + 1)} - 1 \right] \frac{\sin^3 \phi}{x} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{9}. \quad (5.59)$$

Кроме того, симметричный коэффициент для данной диаграммы равен  $1/2$ , поэтому окончательно

$$A_2 \equiv A_2^\xi = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{36}. \quad (5.60)$$

Рассматривая аналогичным образом свертку  $J_{22}$  (5.40) с симметризирующей структурой

$$S_1 = \text{Sym}[\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\beta}] = (\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\beta} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\alpha})/2 \quad (5.61)$$

и учитывая (5.45), получаем

$$\begin{aligned} A_1' &= P_{xz}(\mathbf{q}) \cdot P_{cd}(\mathbf{k}) \cdot (k_x \delta_{\alpha c} - q_c \delta_{\alpha x}) \cdot (k_z \delta_{\beta d} - q_d \delta_{\beta z}) \cdot k_a k_b \cdot \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\beta} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\alpha}) = \\ &= k^2 q^2 \sin^4 \phi. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Соответственно,

$$A_1 = \frac{1}{4} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{q^{d+\xi}} \cdot \frac{1}{k^{d+\xi}} \cdot \frac{k^2 q^2 \sin^4 \phi}{k^2 (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}. \quad (5.63)$$

Учитывая (5.53) при  $n = 2$ , (5.55), и то, что выражение (5.63) не является симметричным по  $k$  и  $q$ , получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4} \int_m^\infty dk \int_m^\infty dq \int_0^\pi d\phi \sin \phi \cdot \frac{q^2}{(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2} \cdot \frac{\sin^4 \phi}{k^{1+\xi} q^{1+\xi}} = \\ &= \frac{1}{8} \int_1^\infty dx \int_0^\pi d\phi \left[ \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 2x \cos \phi + 1)} - 1 \right] \cdot \frac{\sin^5 \phi}{x} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{75}, \end{aligned}$$

где снова рассматривается только полюс первого порядка по  $\xi$ . Симметричный коэффициент для диаграммы  $\mathcal{D}_{22}$  равен  $1/2$ , поэтому окончательно

$$A_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{75} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{150}. \quad (5.64)$$





Таким образом выражение для индексной структуры (5.66) упрощается:

$$\begin{aligned} J_{23} &= P_{xz}(\mathbf{k}) \cdot P_{yt}(\mathbf{q}) \cdot V_{\beta,zn}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot V_{n,yb}(\mathbf{q}) \cdot V_{\gamma,tc}(\mathbf{q}) \cdot V_{\alpha,xa}(\mathbf{k}) = \\ &= -P_{\alpha z}(\mathbf{k}) \cdot P_{n\gamma}(\mathbf{q}) \cdot (q_z \delta_{\beta n} - k_n \delta_{\beta z}) \cdot q_b q_c k_a. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Интегралы по частотам равны

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{1}{i\omega + \nu k^2} \cdot \frac{1}{-i(\omega + \omega') + \nu(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2} \cdot \frac{1}{-i\omega' + \nu q^2} \cdot \frac{1}{i\omega' + \nu q^2} = \\ = \frac{1}{2\nu^2 q^2 (q^2 + k^2 + (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2)}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

соответственно,

$$I_{23} = \frac{1}{2} \cdot g^2 \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{q^2 (q^2 + k^2 + (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2)} \cdot \frac{1}{q^{d+\xi}} \cdot \frac{1}{k^{d+\xi}} \times J_{23}. \quad (5.70)$$

Вычислим свертку  $J_{23}$  с симметризирующими структурами  $S_1$  и  $S_2$ . В соответствии с (5.10b), для трехлучевой диаграммы

$$\begin{aligned} S_1 &= Sym[\delta_{\alpha\alpha} \delta_{bb} \delta_{c\gamma}] = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (\delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta b} \delta_{\gamma c} + \delta_{\alpha b} \delta_{\beta c} \delta_{\gamma a} + \delta_{\alpha c} \delta_{\beta a} \delta_{\gamma b} + \\ &\quad + \delta_{\alpha b} \delta_{\beta a} \delta_{\gamma c} + \delta_{\alpha c} \delta_{\beta b} \delta_{\gamma a} + \delta_{\alpha a} \delta_{\beta c} \delta_{\gamma b}). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Поскольку

$$k_a \cdot \delta_{\alpha a} \cdot P_{\alpha z}(\mathbf{k}) = 0, \quad (5.72a)$$

$$q_c \cdot \delta_{c\gamma} \cdot P_{n\gamma}(\mathbf{q}) = 0, \quad (5.72b)$$

$$q_b \cdot \delta_{b\gamma} \cdot P_{n\gamma}(\mathbf{q}) = 0, \quad (5.72c)$$

из шести слагаемых структуры  $S_1$  ненулевыми оказываются только два:

$$S_1 = \frac{1}{6} \cdot [\delta_{\alpha b} \delta_{\beta c} \delta_{\gamma a} + \delta_{\alpha c} \delta_{\beta b} \delta_{\gamma a}]. \quad (5.73)$$

Тогда

$$A'_1 = -\frac{1}{6} P_{\alpha z}(\mathbf{k}) \cdot P_{n\gamma}(\mathbf{q}) \cdot (q_z \delta_{\beta n} - k_n \delta_{\beta z}) \cdot q_b q_c k_a \cdot [\delta_{\alpha b} \delta_{\beta c} \delta_{\gamma a} + \delta_{\alpha c} \delta_{\beta b} \delta_{\gamma a}]. \quad (5.74)$$

Учитывая (5.45), получаем выражение для  $A'_1$ :

$$A'_1 = \frac{1}{3} k^2 q^2 \sin^4 \phi. \quad (5.75)$$

Подставляя (5.75) в (5.70), используя усреднение по углам (5.50), операцию  $D_m$  (5.55) и учитывая, что симметричный коэффициент для данной диаграммы равен 1, получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} g^2 \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 (q^2 + k^2 + (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2)} \frac{1}{k^{d+\xi}} \cdot \frac{1}{q^{d+\xi}} \cdot \frac{1}{3} k^2 q^2 \sin^4 \phi = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\xi}} \int_m^\infty \frac{dq}{q^{1+\xi}} \int_0^\pi d\phi \frac{1}{q^2 (q^2 + k^2 + (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2)} \cdot k^2 q^2 \sin^5 \phi = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_m^\infty dk \int_m^\infty dq \int_0^\pi d\phi \frac{k^2}{q^2 + k^2 + kq \cos \phi} \cdot \frac{\sin^5 \phi}{k^{1+\xi} q^{1+\xi}} = \\ &= \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_1^\infty dx \int_0^\pi d\phi \left[ \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x \cos \phi + 1)} - 1 \right] \frac{\sin^5 \phi}{x} = \\ &= \frac{1}{30} \left( -\pi \sqrt{3} + \frac{82}{15} \right). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Теперь необходимо рассмотреть свертку  $J_{23}$  с симметризирующей структурой  $S_2$ :

$$\begin{aligned} S_2 &= Sym [\delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} \delta_{c\gamma}] = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (\delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \delta_{\gamma c} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{ac} \delta_{\gamma b} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{bc} \delta_{\gamma a} + \\ &\quad + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{ab} \delta_{\beta c} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{ac} \delta_{\beta b} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{bc} \delta_{\beta a} + \\ &\quad + \delta_{\beta\gamma} \delta_{ab} \delta_{\alpha c} + \delta_{\beta\gamma} \delta_{ac} \delta_{\alpha b} + \delta_{\beta\gamma} \delta_{bc} \delta_{\alpha a} ). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Используя формулы (5.45) и (5.46) получаем, что свертка (5.68) с (5.77) дает следующее:

$$\begin{aligned} A'_2 &= [-P_{\alpha z}(\mathbf{k}) \cdot P_{n\gamma}(\mathbf{q}) \cdot (q_z \delta_{\beta n} - k_n \delta_{\beta z}) \cdot q_b q_c k_a] \cdot S_2 = \\ &= \frac{1}{9} [2(2-d) (\mathbf{kq}) q^2 \sin^2 \phi + (d-1) k^2 q^2 \sin^2 \phi - 4 (\mathbf{kq})^2 \sin^2 \phi]. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Учитывая все необходимые коэффициенты, из (5.70) и (5.78) имеем:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_m^\infty dk \int_m^\infty dq \int_0^\pi d\phi \left\{ \frac{2(2-d) kq \sin^3 \phi \cos \phi}{(q^2 + k^2 + kq \cos \phi) k^{1+\xi} q^{1+\xi}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(d-1) k^2 \sin^3 \phi - 4 k^2 \sin^3 \phi \cos^2 \phi}{(q^2 + k^2 + kq \cos \phi) k^{1+\xi} q^{1+\xi}} \right\}, \end{aligned} \quad (5.79)$$

что после применения операции  $D_m$  переходит в

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{72} \int_1^\infty dx \int_0^\pi d\phi \frac{2(2-d) \sin^3 \phi \cos \phi}{x^2 + x \cos \phi + 1} + \\ &+ \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{2} \int_1^\infty dx \int_0^\pi d\phi \left[ \frac{x^2 + 1}{x^2 + x \cos \phi + 1} - 1 \right] \cdot \frac{1}{x} \times \\ &\quad \times [(d-1) \sin^3 \phi - 4 \sin^3 \phi \cos^2 \phi]. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Вычисляя данный интеграл при  $d = 3$ , получаем

$$A_2 = \frac{1}{72} \left( \frac{3136}{225} - \frac{38\pi\sqrt{3}}{15} \right). \quad (5.81)$$

Четырехлучевая диаграмма  $\mathcal{D}_{24}$ , изображенная на рисунке 5.4, содержит только полюс второго порядка по  $\xi$ , и, как следствие, не дает вклада в аномальную размерность  $\gamma_F^*$  (см. (5.29)).

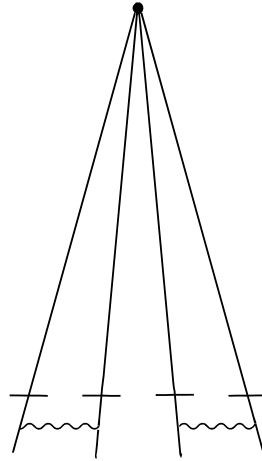


Рис. 5.4. Двухпетлевая диаграмма  $\mathcal{D}_{24}$ .

Из (2.41) и (2.46а) следует, что диаграмма  $\mathcal{D}_5$ , изображенная на рисунке 5.5, тождественно равна нулю из-за замкнутого цикла запаздывающих пропагаторов.

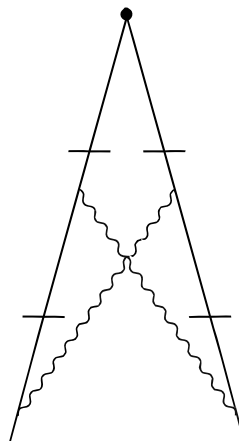


Рис. 5.5. Двухпетлевая диаграмма  $\mathcal{D}_5$ .

### 5.3.3. Аномальная размерность $\gamma_{F_N, l}^*$

Вышеприведенный результат вычисления диаграмм представим в виде

$$a_i = g \cdot \frac{\bar{A}_i}{\xi} + g^2 \cdot \frac{\tilde{A}_i}{\xi}, \quad (5.82)$$

где  $\bar{A}_i$  – результат вычисления однопетлевых диаграмм,  $\tilde{A}_i$  – результат вычисления двухпетлевых диаграмм. Учитывая (5.17), получаем, что константа ренормировки  $Z_F$  имеет вид

$$Z_F = 1 + \sum_i p_i a_i, \quad (5.83)$$

где  $p_i$  определены в (5.18) и (5.19).

Используя определение аномальной размерности  $\gamma_F$  и учитывая, что в первом порядке по  $g$   $\beta$ -функция  $\beta(g) = -\xi g$ , находим

$$\gamma_F = \beta \partial_g \ln Z_F = \beta \partial_g \ln \left( 1 + \sum_i p_i a_i \right) = - \sum_i \left( g p_i \bar{A}_i + 2g^2 p_i \tilde{A}_i \right). \quad (5.84)$$

Подставляя значение неподвижной точки (см. (3.54))

$$g^* = \frac{2d}{d-1} \cdot \xi, \quad (5.85)$$

получаем значение аномальной размерности в неподвижной точке:

$$\gamma_F^* = \sum_i (p_i \bar{A}_i c \cdot \xi + 2c^2 p_i \tilde{A}_i \cdot \xi^2), \quad (5.86)$$

где  $c = -\xi \cdot 2d/(d-1)$ .

В результате из (5.18), (5.19), (5.36), (5.60), (5.64), (5.76), (5.81) и (5.86) получаем значение аномальной размерности оператора  $F_{N,l}$  с произвольными  $N$  и  $l$  при  $d = 3$ :

$$\gamma_{F_{N,l}}^* = \Delta_{N,l}^{(1)} \cdot \xi + \Delta_{N,l}^{(2)} \cdot \xi^2, \quad (5.87)$$

где

$$\Delta_{N,l}^{(1)} = -N(N+3)/10 + l(l+1)/5, \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{N,l}^{(2)} = & -\frac{2N(N-2)}{125} - \frac{N(N+3)}{30} + \frac{22l(l+1)}{375} - \\ & -\frac{3(N-2)}{175} \left( -\sqrt{3}\pi + \frac{82}{15} \right) [2N(N-4) + 3l(l+1)] - \\ & -\frac{19(N-2)}{350} \left( -\sqrt{3}\pi + \frac{1568}{285} \right) [N(N+3) - 2l(l+1)]. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Из выражения (5.88) для  $\Delta_{N,l}^{(1)}$  — первого порядка по  $\xi$  — следует, что аномальные размерности  $\gamma_{F_{N,l}}^*$  (5.87) удовлетворяют условию иерархии  $\Delta_{N,l} > \Delta_{N,l'}$  при  $l > l'$ , которое удобно записать в виде неравенства  $\partial\Delta_{N,l}/\partial l > 0$ .

Данный факт, впервые установленный в [28] для МГД модели Крейчана, имеет глубокий физический смысл: в присутствии крупномасштабной анизотропии ведущий вклад в асимптотику корреляционных функций вида (5.2) в инерционном интервале  $Mr \rightarrow 0$  дает изотропная «сфера» с  $l = 0$ . Поэтому соответствующие аномальные показатели являются такими же, как и в изотропном случае; анизотропия влияет только на поправки, убывающие при  $Mr \rightarrow 0$  тем быстрее, чем больше порядок анизотропии  $l$ . Данный эффект является подтверждением гипотезы Колмогорова о

локальном восстановлении изотропии, что наблюдается как в настоящих экспериментах с турбулентностью в жидкости [71, 72], так и в модели пассивного скалярного поля [73].

Из (5.89) следует, что член  $O(\xi^2)$  в разложении (5.87) также удовлетворяет этому неравенству:

$$\partial\Delta_{N,l}^{(2)}/\partial l \simeq (2l+1)(0.0053N+0.0482) > 0. \quad (5.90)$$

Это означает, что при включении в расчет второго члена разложения по  $\xi$  иерархия анизотропных вкладов не только сохраняется, но и усиливается.

Для наиболее важного случая скалярных операторов  $F_{N,l}$  с  $l=0$  аномальная размерность равна

$$\Delta_{N,0}^{(2)} \simeq -0.0041N^3 - 0.0474N^2 - 0.0553N \quad (5.91)$$

и является отрицательной для всех  $N$ . Из этого следует, что при включении в рассмотрение члена порядка  $O(\xi^2)$  аномальный скейлинг становится только сильнее. Этим данная магнитная задача отличается от модели Крейчнана для скалярного поля, в которой поправки высших порядков к члену  $O(\xi)$  являются положительными, что, в свою очередь, является причиной исчезновения аномального скейлинга при  $\xi \rightarrow 2$ , см. [21].



### 5.3.4. Сравнение результатов с точным решением в частном случае парной корреляционной функции

В работе [30] получено точное решение для парной корреляционной функции задачи (2.39) – (2.41).

Согласно [30],

$$C_{\alpha\beta}(r) \equiv \langle \theta_\alpha(\omega, \mathbf{k}) \theta_\beta(-\omega, -\mathbf{k}) \rangle \propto r^{\zeta_j}. \quad (5.92)$$

Из замкнутой системы уравнений на  $C_{\alpha\beta}(r)$  и разложения по полиномам Лежандра следует, что

$$\begin{aligned} \zeta_j^\pm = -\frac{1}{2(d-1)} \left\{ 2\xi + d^2 - d - \left[ -2d^3\xi - 2d^2\xi^2 - 6d^3 + 4\xi^2d + 8 + 10d\xi + \right. \right. \\ \left. \left. + 20dj - 20d - 8\xi - 8j + 4d^2j^2 + 2\xi^2 - 4\xi j^2 + 17d^2 - 8dj^2 + 8\xi j + 4d^3j + \right. \right. \\ \left. \left. + 4d^2j\xi + 4dj^2\xi + 4j^2 - 16d^2j - 12d\xi j + d^4 \pm \sqrt{K}(d-1)(2-\xi) \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (5.93)$$

где

$$\begin{aligned} K = (d-1) (d^3 + 4d^2j - 5d^2 + 2d^2\xi + \xi^2d + 4d\xi j - 6d\xi + 8d - \\ - 12dj + 4dj^2 - \xi^2 + 4\xi + 8j - 8\xi j - 4 - 4j^2 + 4\xi j^2). \end{aligned} \quad (5.94)$$

Здесь  $j$  – номер полинома Лежандра, при этом выполняется неравенство  $\zeta_0 < \zeta_1 < \dots$ .

Раскладывая (5.93) в ряд по  $\xi$  при  $j = 2$ , получаем

$$\zeta_2^- = \frac{2}{(d-1)(d+2)}\xi + \frac{2(d^3 + 3d^2 - 8d - 16)}{d(d-1)^2(d+2)^3}\xi^2 + O(\xi^3), \quad (5.95)$$

что при  $d = 3$  равно

$$\zeta_2^- = \frac{1}{5}\xi + \frac{7}{375}\xi^2; \quad (5.96)$$

аналогично для  $j = 0$  при  $d = 3$  получаем

$$\zeta_0^+ = -\xi - \frac{1}{3}\xi^2 \quad (5.97)$$

(знак  $+$  или  $-$  выбирается однозначно в зависимости от номера  $j$ ).

Для вычисления аномальной размерности  $\gamma_{F_{N,l}}^*$  (5.87) парного коррелятора  $C_{\alpha\beta}$  (5.92) необходимо учитывать операторы  $F_{2,2} = (\theta_i\theta_i)$  и  $F_{2,0} = (\theta_i\theta_j)$ . Для  $C_{\alpha\beta}$  решение уравнения РГ и операторное разложение имеют структуру (5.6), при этом исходные операторы  $F_{N,l} = \theta_\alpha$ ,  $F_{K,j} = \theta_\beta$ .

При подстановке соответствующих значений в (5.87), получаем

$$\gamma_{F_{2,0}}^* = -\xi - \frac{1}{3}\xi^2; \quad (5.98)$$

$$\gamma_{F_{2,2}}^* = \frac{1}{5}\xi + \frac{7}{375}\xi^2, \quad (5.99)$$

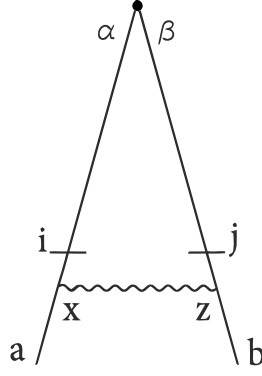
что полностью согласуется с (5.96), (5.97). Данный факт подтверждает взаимную согласованность методов РГ + ОР и метода нулевых мод.

## 5.4. Модель №3

### 5.4.1. Аномальный скейлинг и аномальные показатели в однопетлевом приближении

В данном разделе будет представлен однопетлевой расчет аномальных размерностей  $\gamma_{F_{N,l}}^*$  составных операторов  $F_{N,l}$  (5.1) для модели (2.77), определяющих асимптотическое поведение (5.6) корреляционных функций составных операторов.

Однопетлевая диаграмма  $\mathcal{D}_1$  имеет тот же вид, что и для моделей №1 и №2, и представлена на рисунке (5.6).

Рис. 5.6. Однопетлевая диаграмма  $\mathcal{D}_1$ .

Аналитическое выражение для данной диаграммы имеет вид

$$I = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{-i\omega + \kappa k^2} \cdot \frac{1}{i\omega + \kappa k^2} \cdot \frac{D_F(k)}{\omega^2 + \nu^2 k^4} \times J_1, \quad (5.100)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= P_{\alpha i}(\mathbf{k}) \cdot P_{\beta j}(\mathbf{k}) \cdot P_{xz}(\mathbf{k}) \cdot V_{i,xa}(\mathbf{k}) \cdot V_{j,zb}(-\mathbf{k}) = \\ &= \mathcal{A}^2 \cdot P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) k_a k_b, \end{aligned} \quad (5.101)$$

а  $V_{c,ab}(\mathbf{k}) = i(k_a \delta_{bc} - \mathcal{A} k_b \delta_{ac})$  — вершина (2.12). Интеграл по частоте

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + \kappa k^2} \cdot \frac{1}{i\omega + \kappa k^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \nu^2 k^4} = \frac{1}{2\nu^3 \cdot u(1+u)k^6}, \quad (5.102)$$

где  $u = \kappa/\nu$ . Симметризирующие структуры  $S_1$  и  $S_2$  для двухлучевой диаграммы имеют вид (5.10а).

Таким образом,

$$A'_1 = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\beta} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\alpha}) \cdot J_1 = 0; \quad (5.103a)$$

$$A'_2 = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ab} \cdot J_1 = \mathcal{A}^2 \cdot (d-1)k^2. \quad (5.103b)$$

Учитывая (1.18) и (1.19), получаем, что

$$A_1 = 0; \quad (5.104a)$$

$$A_2 = \frac{\mathcal{A}^2 (d-1)}{2\nu^3 u(1+u)} \cdot \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{k^2 d_\eta(k)}{k^{d+\xi}} = \frac{\mathcal{A}^2 (d-1)}{2u(1+u)} \cdot g \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi}, \quad (5.104b)$$

где  $g \equiv \hat{g} \cdot C_d$ . Учитывая симметричный коэффициент данной диаграммы, равный  $1/2$ , и обозначения разделов 5.3.2 и 5.3.3, получаем

$$A_1 = 0; \quad (5.105a)$$

$$A_2 = \frac{\mathcal{A}^2 (d-1)}{4u(1+u)}. \quad (5.105b)$$

Пользуясь (5.18) и (5.83) находим, что константа ренормировки

$$Z_{N,l} = 1 - \frac{g}{u(u+1)} \frac{\mathcal{A}^2 Q_{N,l}}{4d(d+2)} \cdot \frac{1}{\xi} + O(g^2), \quad (5.106)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{N,l} &= 2N(N-1) - (d+1)(N-l)(d+N+l-2) = \\ &= -(d-1)(N-l)(d+N+l) + 2l(l-1), \end{aligned} \quad (5.107)$$

Стоит отметить, что такие же полиномы  $Q_{N,l}$  возникают и в скалярном случае [73], и в модели Крейчнана для МГД [30, 45, 74].

Из (5.106) следует, что аномальные размерности  $\gamma_{N,l}$  равны

$$\gamma_{N,l} = \frac{g}{u(u+1)} \frac{\mathcal{A}^2 Q_{N,l}}{4d(d+2)} + O(g^2). \quad (5.108)$$

Подставляя значение неподвижных точек  $\{g^*, u^*\}$ , см. раздел 3.3.3.2, получаем

$$\gamma_{N,l}^* = \frac{\mathcal{A}^2}{u^*(u^*+1)} \frac{Q_{N,l}}{3d(d-1)} \cdot \xi + O(\xi^2), \quad (5.109)$$

где  $u^*$  — решение уравнения (3.96). Если функция  $\beta_{\mathcal{A}}$  тождественно равна нулю, то  $u_* = u_*(\mathcal{A})$ , и в выражении (5.109) сохраняется зависимость от

свободного параметра  $\mathcal{A}$ . Если же  $\beta_{\mathcal{A}}$  содержит вклады старших порядков по  $g$ , то в уравнение (5.108) необходимо подставлять весь набор неподвижных точек  $\{g^*, u^*, \mathcal{A}^*\}$ .

В частности, для  $\mathcal{A}_* = 1$  значение неподвижной точки  $u_*$  является положительным решением квадратного уравнения  $u(u + 1) = 2(d + 2)/d$ . В этом случае (5.109) принимает вид

$$\gamma_{N,l} = \frac{Q_{N,l}}{6(d-1)(d+2)} \cdot \xi + O(\xi^2), \quad (5.110)$$

что согласуется с результатом, полученным в [75] для МГД. Кроме того, при подстановке  $\xi \rightarrow \xi/3$  значение аномальной размерности (5.110) совпадает с аналогичным выражением, полученным для модели Крейчна на [30, 45, 74].

При  $\mathcal{A} = 0$  операторы  $F_{N,l}$  являются УФ-конечными и не требуют ренормировки, поэтому аномальная размерность  $\gamma_{N,l}$  тождественно равна нулю во всех порядках по  $\xi$ , см. обсуждение в разделе 5.1. В этом случае интересными объектами являются не парные корреляционные функции, а структурные функции  $S_{ij}^n(\mathbf{r}) = \langle [\theta_i(t, \mathbf{x}) - \theta_j(t, \mathbf{x}')]^n \rangle$ ; их поведение в инерционном интервале определяется операторами, построенными из производных полей  $\theta$ ; см. [68, 76, 77].

Во всех остальных случаях амплитуда  $\mathcal{A}^2/u(u + 1)$  в (5.109) является положительной для любой физической неподвижной точки. Таким образом для наиболее важного случая скалярного оператора с  $l = 0$  аномальная размерность  $\gamma_{N,l}$  является отрицательной, и при фиксированном  $N$  монотонно возрастает с ростом  $l$ .

Из соотношения (5.109) следует, что также как и в модели №2, кри-

тические размерности удовлетворяют условию иерархии  $\Delta_{N,l} > \Delta_{N,l'}$  при  $l > l'$ . Данный факт означает, что в присутствии крупномасштабной анизотропии ведущий вклад в асимптотику корреляционных функций вида (5.2) в инерционном интервале  $Mr \rightarrow 0$  дает изотропная «сфера» с  $l = 0$ .

## Основные результаты и выводы

В данной работе методы ренормгруппы и операторного разложения были применены к трем моделям переноса пассивного бездивергентного (поперечного) векторного поля: модели турбулентного переноса пассивного векторного поля в случае, когда поле скорости описывается сильно анизотропным ансамблем Авельянеды–Майда с одним выделенным направлением (модель №1), модели магнитной гидродинамики (турбулентного динамо) при наличии крупномасштабной анизотропии в случае, когда поле скорости описывается изотропным ансамблем Казанцева–Крейчнана (модель №2), а также модели турбулентного переноса пассивного векторного поля при наличии крупномасштабной анизотропии в случае, когда поле скорости обладает конечным временем корреляции и подчиняется стохастическому уравнению Навье–Стокса для несжимаемой жидкости (модель №3). Целью работы являлось изучение асимптотики инерционного интервала корреляционных функции пассивного поля  $\theta$ . Основные результаты сформулированы в 4 пунктах и представлены ниже:

(1) Установлено, что **все три модели** являются ренормируемыми и обладают неподвижной ИК–притягивающей точкой, определяющей асимптотику корреляционных функций в инерционном интервале.

(2) Показано, что если поле  $\theta$  удовлетворяет стохастическим уравнениям **модели №2**, то в асимптотике инерционного интервала корреляционные функции таких полей обладают аномальным скейлингом, что свя-

зано с наличием в данной модели «опасных» составных операторов, целиком построенных из самих полей и обладающих отрицательными размерностями. Данные аномальные размерности вычислены во втором порядке  $\xi$ -разложения (включая анизотропные сектора в присутствии крупномасштабной анизотропии), см. (5.87) — (5.89). Установлено, что при учете поправок порядка  $\xi^2$  как аномальный скейлинг, так и иерархия анизотропных вкладов усиливаются.

Проведено сравнение полученных результатов с точным решением в частном случае парной корреляционной функции.

(3) Для поля  $\theta$ , удовлетворяющего стохастическим уравнениям модели №3, установлено, что в асимптотике инерционного интервала корреляционные функции также обладают аномальным скейлингом. Данные аномальные размерности вычислены в ведущем порядке  $\xi$ -разложения (включая анизотропные сектора в присутствии крупномасштабной анизотропии), см. (5.109).

Как и в случае МГД, где  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 = 1$ , аномальные показатели удовлетворяют условию иерархии, связанному с анизотропией: чем меньше ранг тензорного оператора, тем меньше его размерность, и, как следствие, тем бóльший вклад он дает в асимптотику в инерционном интервале. Таким образом в присутствии крупномасштабной анизотропии ведущие члены асимптотики, как в изотропном, так и в анизотропном случаях, определяются скалярными операторами, что полностью согласуется с гипотезой о локальном восстановлении изотропии.

Открытым остается вопрос, является ли множитель  $\mathcal{A}$  перед «растягивающим членом»  $(\theta\partial)v$  в уравнении диффузии свободным параметром,



от которого зависят аномальные показатели, или в действительности он стремится к некоторой неподвижной точке. Этот вопрос находится за рамками однопетлевого приближения.

(4) В отличие от моделей №2 и №3, а также большинства обобщений модели Крейчнана, где корреляционные функции обладают аномальным скейлингом с бесконечным набором показателей, в **модели №1** зависимость от внешнего масштаба  $L$  является логарифмической: аномалии проявляются в виде полиномов от логарифмов безразмерного отношения  $L/r$ , где  $r$  является расстоянием между пространственными аргументами составных операторов, см. (4.66) — (4.67). Степени логарифмов  $N_1$  и  $N_2$  связаны с канонической размерностью скалярных составных операторов (4.10), целиков построенных из самих полей  $\theta$ , и определяют семейство операторов, смешивающихся при ренормировке только между собой.

Такое поведение является следствием нетривиального смешивания в семействах составных операторов, в результате которого матрица аномальных размерностей  $\hat{\gamma}_F$  оказывается нильпотентной. Как следствие, матрица критических размерностей не диагонализуется, а приводится к жордановой форме. Данный факт строго доказан для РГ-семейства произвольной размерности. Кроме того, в силу тождественного равенства нулю всех многопетлевых диаграмм, данный результат является точным.

## Благодарности

Автор диссертации благодарит Антонова Николая Викторовича за научное руководство, терпение и неоценимую помощь в ходе выполнения настоящей работы.

Автор выражает благодарность Аджемяну Лорану Цолаковичу, а также благодарит преподавателей и сотрудников кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц Санкт-Петербургского Государственного Университета и преподавателей школы №292 г. Санкт-Петербурга, в особенности Дворсона Александра Наумовича, за воспитание любви и интереса к физике в целом и теоретической физике в частности. Кроме того, автор благодарит своих родителей и друзей за участие и моральную поддержку.

## А. Приложения к Главе 1

### А.1. Галилеева инвариантность и ее следствия

#### А.1.1. Галилеево–ковариантная производная

Рассмотрим действие (2.78) для стохастической задачи (2.75) — (2.76):

$$S_v(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = v'_i D_v v'_k / 2 + v'_k [-\partial_t v_k - (v_i \partial_i) v_k + \nu_0 \partial^2 v_k]. \quad (\text{A.1})$$

Преобразования Галилея имеют вид

$$x_i \rightarrow x_i + u_i t, \quad (\text{A.2a})$$

$$v_i(t, \mathbf{x}) \rightarrow v_i(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t) - u_i. \quad (\text{A.2b})$$

Взяв полную производную по времени от правой части (A.2b), получаем

$$\frac{d}{dt} v_i(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t) = \partial_t v_i(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t) + u_k \partial_k v_i(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t). \quad (\text{A.3})$$

Из (A.2) и (A.3) следует, что при преобразованиях Галилея

$$\begin{aligned} & (\partial_t + v_k(t, \mathbf{x}) \partial_k) \cdot v_i(t, \mathbf{x}) \rightarrow \\ & \rightarrow [\partial_t + (v_k(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t) - u_k) \partial_k] \cdot [v_i(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t) - u_i] = \\ & = (\partial_t + v_k(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t) \partial_k) \cdot v_i(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

т. е. производная  $\nabla_t = \partial_t + v_k \partial_k$  не меняет вид действия (A.1). Благодаря этому свойству такая производная называется галилеево–ковариантной.

Из этого следует, что при присутствии в задаче галилеевой симметрии, член с  $\nabla_t$  в действии (A.1) ренормируется следующим образом:

$$v'_k(\partial_t + (v_i\partial_i))v_k \rightarrow Z \cdot v'_k(\partial_t + (v_i\partial_i))v_k. \quad (\text{A.5})$$

Если галилеева инвариантность нарушена, то

$$v'_k(\partial_t + (v_i\partial_i))v_k \rightarrow Z_1 \cdot v'_k \partial_t v_k + Z_2 \cdot v'_k(v_i\partial_i)v_k. \quad (\text{A.6})$$

В частности (A.5) означает, что если реальный индекс расходимости некоторой функции  $d'_\Gamma \leq 1$ , то из требования отсутствия контрчленов с  $\partial_t$  (по размерности, поскольку  $\partial_t \propto \partial^2$ ) следует требование отсутствия контрчлена  $v'_k(v_i\partial_i)v_k$ , т. к. они входят только в галилеево-ковариантной комбинации  $\partial_t + (v_i\partial_i)$ .

### A.1.2. Наличие $\delta$ -функции как следствие требования галилеевой инвариантности

Рассмотрим преобразования Галилея

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{u}t, \quad (\text{A.7a})$$

$$\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}' + \mathbf{u}t'. \quad (\text{A.7b})$$

Тогда

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}' + \mathbf{u}(t - t'). \quad (\text{A.8})$$

Рассмотрим член действия  $vD_v^{-1}v/2$ . Поскольку  $D_v = D_v(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$ , то при преобразованиях Галилея

$$D_v(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \rightarrow D_v(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \mathbf{u}(t - t'), t - t'). \quad (\text{A.9})$$

Из (А.9) следует, что если  $D_v(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \delta(t - t') \cdot D_v(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , то при преобразованиях Галилея

$$D_v(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow D_v(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{A.10})$$

т. е. является инвариантным. По этой причине корреляторы скорости (1.3), (1.13) и (1.17) содержат некоторую зависимость от  $k$  и  $\delta$ -функцию по времени.

## А.2. Модель магнитной гидродинамики Казанцева–Крейчнана

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi \rho \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.11})$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции,  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля,  $\mathbf{D}$  — вектор электрической индукции,  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока,  $\rho$  — плотность электрического заряда,  $c$  — скорость света в вакууме.

Воспользуемся законом Ома для движущейся среды:

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \quad (\text{A.12})$$

где  $\sigma$  — удельная проводимость,  $\mathbf{v}$  — скорость среды. Если удельная проводимость среды велика, то можно пренебречь током смещения  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , тогда

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (\text{A.13})$$

Положим относительную магнитную проницаемость  $\mu = 1$ , как следствие  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ . Выражая из (A.13)  $\mathbf{E}$  через  $\mathbf{B}$  и подставляя в уравнения Максвелла, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rot rot } \mathbf{B}, \quad (\text{A.14})$$

где  $c^2/4\pi\sigma = \nu_0$  — коэффициент диффузии. Используя поперечность поля  $\mathbf{B}$ , т. е. условие  $\partial_i B_i = 0$ , преобразуем полученное уравнение:

$$[\text{rot rot } \mathbf{B}]_i = \partial_i (\partial_j \cdot B_j) - \partial^2 B = -\partial^2 B; \quad (\text{A.15a})$$

$$\begin{aligned} [\text{rot} \{\mathbf{v} \times \mathbf{B}\}]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kmn} v_m B_n = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \partial_j v_m B_n = \\ &= \partial_j v_i B_j - \partial_j v_j B_i. \end{aligned} \quad (\text{A.15b})$$

Раскладывая магнитное поле  $\mathbf{B}$  в сумму  $\mathbf{B}^0$ , меняющегося на больших масштабах (порядка  $L$ ), и  $\tilde{\mathbf{B}}$ , испытывающего флуктуации на малых расстояниях, используя условие поперечности поля  $\mathbf{v}$ , получаем уравнение МГД в виде

$$\partial_t \tilde{B}_i + \partial_j (v_j \tilde{B}_i - v_i \tilde{B}_j) = B_j^0 \cdot \partial_j v_i + \nu_0 \partial^2 \tilde{B}_i, \quad (\text{A.16})$$

где  $i = 1, \dots, d$ , а  $B_j^0 \cdot \partial_j v_i = f_i$  играет роль случайной силы. Предполагается, что она обладает гауссовым распределением, а ее коррелятор равен

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \delta(t - t') C_{ij}(r/L) \quad (\text{A.17})$$

(подробнее см. монографии [78–80]).

Поле скорости среды  $\mathbf{v}'(x)$  должно удовлетворять уравнению Навье–Стокса с дополнительным лоренцевым членом, пропорциональным  $(\partial \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$  и описывающим влияние магнитного поля на поле скорости. Вместо

этого в данной постановке задачи рассматривается *пассивное* поле — предполагается, что на начальных стадиях поле  $\mathbf{B}$  мало и не влияет на движение проводящей жидкости, что является естественным предположением при рассмотрении динамики, линейной по силе магнитного поля (см. [79, 80]).

Поэтому вместо поля  $\mathbf{v}'(x)$ , удовлетворяющего уравнению Навье–Стокса, рассматривается поле  $\mathbf{v}(x)$  — несжимаемое, изотропное, обладающее гуссовым распределением с нулевым средним и  $\delta$ -коррелирующее по времени:

$$\langle v_i(x)v_j(x') \rangle = \delta(t - t') \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} P_{ij}(\mathbf{k}) D_0 \frac{1}{k^{d+\xi}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}, \quad (\text{A.18})$$

где  $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$  — поперечный проектор,  $k \equiv |\mathbf{k}|$  — волновое число,  $d$  — размерность пространства,  $D_0 > 0$  — амплитудный множитель, величина  $1/m$ , являющаяся внешним масштабом турбулентности  $\tilde{L}$  (радиус корреляций поля скорости), обеспечивает ИК-регуляризацию,  $\xi$  — произвольный показатель (с наиболее реалистичным «колмогоровским» значением  $\xi = 4/3$ ). Кроме того, данный внешний масштаб  $\tilde{L}$ , связанный с полем скорости, отождествляется с внешним масштабом случайной силы  $L$ , упоминавшимся в (A.17).

### А.3. Согласование динамики с условием поперечности

Рассмотрим уравнение Навье–Стокса (1.16) без вкладов случайной силы и давления:

$$\partial_t v_i = -(v_k \partial_k) v_i + \nu_0 \partial^2 v_i. \quad (\text{A.19})$$

Поле скорости  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  является несжимаемым (поперечным), т. е.

$$\partial_k v_k(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (\text{A.20})$$

Рассмотрим поле скорости  $\mathbf{v}$  в момент времени  $t + \Delta t$ ,

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + \Delta t \cdot \partial_t v_i(t) + \dots, \quad (\text{A.21})$$

и потребуем, чтобы для него также было выполнено условие (A.20). Поскольку в силу (A.20)  $\partial_k v_k(t) = 0$ , данное требование означает, что должно выполняться равенство

$$\partial_i [\partial_t v_i(t)] = 0. \quad (\text{A.22})$$

Выразим  $\partial_i [\partial_t v_i(t)]$  из (A.19). Учитывая, что в силу (A.20)  $\partial_i [\partial^2 v_i(t)] = 0$ , имеем:

$$\partial_i [\partial_t v_i(t)] = -\partial_i [v_k(t) \partial_k] v_i(t) = -\partial_i v_k(t) \partial_k v_i(t) = -\partial_i \partial_k v_i v_k. \quad (\text{A.23})$$

Из (A.21) и (A.23) следует, что в правую часть уравнения Навье–Стокса (A.19) должен входить член  $\partial_i \wp$ , где  $\partial^2 \wp$  является решением уравнения Пуассона

$$\partial^2 \wp = -\partial_i \partial_k v_i v_k. \quad (\text{A.24})$$

Таким образом уравнение (A.19) принимает вид

$$\partial_t v_i = -(v_k \partial_k) v_i + \nu_0 \partial^2 v_i - \partial_i \wp, \quad (\text{A.25})$$

где  $\wp$  — удельное по массе давление.



## В. Приложения к Главе 2

### В.1. Доопределение $\Theta(0)$

Рассмотрим для простоты скалярное поле. Тогда уравнение на функцию Грина имеет вид

$$[\partial_t - \nu\Delta]G = \delta(x - x'). \quad (\text{B.1})$$

Выполнив преобразование Фурье, получаем

$$[-i\omega + \nu k^2]G = 1, \quad (\text{B.2})$$

$$G = \frac{1}{-i\omega + \nu k^2}. \quad (\text{B.3})$$

Как следствие,

$$G(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega + \nu k^2}, \quad (\text{B.4})$$

т. е.

$$\begin{cases} G(t) = 0, t < 0 \\ G(t) = e^{-\nu k^2 t}, t > 0. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Таким образом,

$$G(t) = \theta(t) \cdot e^{-\nu k^2 t}. \quad (\text{B.6})$$

Учитывая  $\delta$ -корреляцию по времени (см. (1.3)) и (B.6), находим, что

$$\Sigma_{\alpha\beta} \propto G(t) \cdot \langle vv \rangle \propto \theta(t - t') \cdot \delta(t - t') = \theta(0) \quad (\text{B.7})$$

Поскольку коррелятор (1.3) симметричен по  $t$  и  $t'$ ,  $G$  должна быть определена при  $t = t'$  как полусумма своих пределов при  $t \rightarrow t'$  справа и

слева. Это и эквивалентно доопределению

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + \nu k^2} = \frac{1}{2}. \quad (\text{B.8})$$

## В.2. О невозможности существования двух пространственных масштабов в модели №1

Рассмотрим функционал действия (2.10), а именно

$$\begin{aligned} S(\Phi) = & -\theta'_k \left[ -\partial_t \theta_k - (v_i \partial_i) \theta_k + \mathcal{A}_0(\theta_i \partial_i) v_k + \nu_0(\partial_\perp^2 + f_0 \partial_\parallel^2) \theta_k \right] + \\ & + \theta'_i D_\theta \theta'_k / 2 + v_i D_v^{-1} v_k / 2. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Поскольку поля  $\theta$  и  $\theta'$  являются поперечными,

$$\partial_i \theta_i = \partial_i \theta'_i = 0. \quad (\text{B.10})$$

Условием (B.10) данная модель отличается от модели со скалярным полем, рассматривавшейся в работе [59] — с точностью до вершины функционалы являются идентичными, но в скалярном случае условие поперечности отсутствует.

Предположим, что также как и в скалярном случае, в данной модели имеется две пространственные масштабные шкалы с разными размерностями и одна временная:

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L_\perp]^{-d_F^\perp} [L_\parallel]^{-d_F^\parallel}, \quad (\text{B.11})$$

условия нормировки имеют вид

$$d_{k_{\perp}}^{\perp} = -d_{\mathbf{x}_{\perp}}^{\perp} = 1, \quad d_{k_{\perp}}^{\parallel} = -d_{\mathbf{x}_{\perp}}^{\parallel} = 0, \quad (\text{B.12a})$$

$$d_{k_{\parallel}}^{\parallel} = -d_{\mathbf{x}_{\parallel}}^{\parallel} = 1, \quad d_{k_{\parallel}}^{\perp} = -d_{\mathbf{x}_{\parallel}}^{\perp} = 0, \quad (\text{B.12b})$$

а полная каноническая размерность дается выражением

$$d_F^k = d^{\perp} + d^{\parallel}, \quad d_F = d^k + 2d^{\omega}. \quad (\text{B.13})$$

Пусть поле  $\boldsymbol{\theta}$  имеет вид  $\{\varphi, \boldsymbol{\theta}_{\perp}\}$ . Из (B.12) следует, что  $\partial_{\perp}$  и  $\partial_{\parallel}$  имеют разные размерности, поэтому условие (B.10) может быть удовлетворено, только если компоненты поля  $\boldsymbol{\theta}$  —  $\varphi$  и  $\boldsymbol{\theta}_{\perp}$  — также будут иметь разные размерности.

Рассмотрим член действия

$$\theta'_i \partial_t \theta_i = \int dt \int d\mathbf{x} \theta'_i \partial_t \theta_i. \quad (\text{B.14})$$

Из требования безразмерности выражения (B.14) (по отдельности по двум пространственным размерностям) следует, что

$$-1 + d^{\parallel} \varphi + d^{\parallel} \varphi' = 0, \quad (\text{B.15a})$$

$$-1 + d^{\parallel} \theta_{\perp} + d^{\parallel} \theta'_{\perp} = 0, \quad (\text{B.15b})$$

$$1 - d + d^{\perp} \varphi + d^{\perp} \varphi' = 0, \quad (\text{B.15c})$$

$$1 - d + d^{\perp} \theta_{\perp} + d^{\perp} \theta'_{\perp} = 0. \quad (\text{B.15d})$$

Условия поперечности (B.10) означают, что

$$d^{\perp} \varphi = 1 + d^{\perp} \theta_{\perp}, \quad (\text{B.16a})$$

$$1 + d^{\parallel} \varphi = d^{\parallel} \theta_{\perp}, \quad (\text{B.16b})$$

$$d^\perp \varphi' = 1 + d^\perp \theta'_\perp, \quad (\text{B.16c})$$

$$1 + d^\parallel \varphi' = d^\parallel \theta'_\perp. \quad (\text{B.16d})$$

Учитывая (B.15a) — (B.15d), из (B.16a) и (B.16b) следует, что

$$d^\perp \varphi' = -1 + d^\perp \theta'_\perp, \quad (\text{B.17a})$$

$$1 + d^\parallel \varphi' = 2 + d^\parallel \theta'_\perp, \quad (\text{B.17b})$$

что является несовместимым с (B.16c) и (B.16d).

Это означает, что поля  $\varphi$  и  $\theta_\perp$  должны иметь одинаковые размерности, также как и поля  $\varphi'$  и  $\theta'_\perp$  и производные  $\partial_\parallel$  и  $\partial_\perp$ . Как следствие, константа  $f_0$  является безразмерной.

### В.3. Вычисление канонических размерностей в модели №3

Рассмотрим действие модели №3 (см. (2.77)), а именно

$$\begin{aligned} S(\Phi) = & S_v(\mathbf{v}, \mathbf{v}') + \theta'_i D_\theta \theta'_k / 2 + \\ & + \theta'_k \left[ -\partial_t \theta_k - (v_i \partial_i) \theta_k + \mathcal{A}_0(\theta_i \partial_i) v_k + \kappa_0 \partial^2 \theta_k \right]; \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$S_v(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = v'_i D_v v'_k / 2 + v'_k \left[ -\partial_t v_k - (v_i \partial_i) v_k + \nu_0 \partial^2 v_k \right]. \quad (\text{B.19})$$

Здесь  $D_\theta$  — корреляционная функция случайной силы  $f_i$ ,

$$\langle f_i(x) f_k(x') \rangle = \delta(t - t') C_{ik}(\mathbf{r}/L), \quad (\text{B.20})$$

а  $D_v$  — корреляционная функция случайной силы  $\eta_i$ ,

$$\langle \eta_i(x) \eta_j(x') \rangle = \frac{\delta(t-t')}{(2\pi)^d} \int_{k \geq m} d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) d_\eta(k) \exp[\mathbf{i}\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]. \quad (\text{B.21})$$

Функция  $d_\eta(k)$  в корреляторе (B.21) определена в (1.18):

$$d_\eta(k) = D_0 k^{4-d-\xi}, \quad (\text{B.22})$$

где  $D_0 > 0$  является положительным амплитудным множителем,

$$D_0 = \hat{g}_0 \cdot \nu_0^3. \quad (\text{B.23})$$

Из требования безразмерности члена

$$v'_k \partial_t v_k = \int dt \int d\mathbf{x} v'_k \partial_t v_k \quad (\text{B.24})$$

следует, что

$$-d + d_{v'}^k + d_v^k = 0, \quad (\text{B.25a})$$

$$-1 + d_{v'}^\omega + d_v^\omega = 0. \quad (\text{B.25b})$$

Из требования безразмерности члена

$$v'_k (v_i \partial_i) v_k = \int dt \int d\mathbf{x} v'_k (v_i \partial_i) v_k \quad (\text{B.26})$$

следует, что

$$-d + d_{v'}^k + d_v^k + 1 + d_v^k = 0, \quad (\text{B.27a})$$

$$-1 + d_{v'}^\omega + 2d_v^\omega = 0. \quad (\text{B.27b})$$

Из (B.25) и (B.27) следует, что

$$d_v^k = -1, \quad (\text{B.28a})$$

$$d_v^\omega = 1, \quad (\text{B.28b})$$

$$d_{v'}^k = d + 1, \quad (\text{B.28c})$$

$$d_{v'}^\omega = -1. \quad (\text{B.28d})$$

Из требования безразмерности члена

$$\nu_0 v'_k \partial^2 v_k = \nu_0 \cdot \int dt \int d\mathbf{x} v'_k \partial^2 v_k \quad (\text{B.29})$$

следует, что

$$-d + d_{v'}^k + d_{\nu_0}^k + d_v^k + 2 = 0, \quad (\text{B.30a})$$

$$-1 + d_{v'}^\omega + d_v^\omega + d_{\nu_0}^\omega = 0. \quad (\text{B.30b})$$

Таким образом

$$d_{\nu_0}^k = -2, \quad (\text{B.31a})$$

$$d_{\nu_0}^\omega = 1. \quad (\text{B.31b})$$

Из (B.21) и (B.22) следует, что

$$d^k [D_v] = 4 - d - \xi + d = 4 - \xi, \quad (\text{B.32a})$$

$$d^\omega [D_v] = d^\omega [\delta(t - t')] = 1. \quad (\text{B.32b})$$

Учитывая (B.32), из требования безразмерности члена

$$v' D_v v' = \int dt \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' v'(t, \mathbf{x}') D_v(\mathbf{x} - \mathbf{x}') v'(t, \mathbf{x}) \quad (\text{B.33})$$

следует, что

$$-2d + 2(d - 1) + 4 - \xi + d^k [D_0] = 0, \quad (\text{B.34a})$$

$$-1 - 2 + d^\omega [D_0] = 0. \quad (\text{B.34b})$$

Из (B.23) и (B.34) получаем, что

$$d^k [\hat{g}_0] = \xi, \quad (\text{B.35a})$$

$$d^\omega [\hat{g}_0] = 0. \quad (\text{B.35b})$$

Требования безразмерности члена

$$\theta'_k \partial_t \theta_k = \int dt \int d\mathbf{x} \theta'_k \partial_t \theta_k \quad (\text{B.36})$$

и члена

$$\theta'_k (v_i \partial_i) \theta_k = \int dt \int d\mathbf{x} \theta'_k (v_i \partial_i) \theta_k \quad (\text{B.37})$$

дают одинаковые условия:

$$-d + d_{\theta'}^k + d_\theta^k = 0, \quad (\text{B.38a})$$

$$-1 + d_{\theta'}^\omega + d_\theta^\omega = 0. \quad (\text{B.38b})$$

В соответствии с (B.20),

$$d^k [D_\theta] = 0, \quad (\text{B.39a})$$

$$d^\omega [D_\theta] = 1. \quad (\text{B.39b})$$

Учитывая (B.39), из требования безразмерности члена

$$\theta' D_\theta \theta' = \int dt \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \theta'(t, \mathbf{x}') D_\theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \theta'(t, \mathbf{x}) \quad (\text{B.40})$$

следует, что

$$-2d + 2d_{\theta'}^k = 0, \quad (\text{B.41a})$$

$$-1 + 2d_{\theta'}^\omega = 0. \quad (\text{B.41b})$$

Учитывая (B.38), это означает, что

$$d_\theta^k = 0, \quad (\text{B.42a})$$

$$d_\theta^\omega = -1/2, \quad (\text{B.42b})$$

$$d_{\theta'}^k = d, \quad (\text{B.42c})$$

$$d_{\theta'}^\omega = 1/2. \quad (\text{B.42d})$$

Из требования безразмерности члена

$$\kappa_0 \theta'_k \partial^2 \theta_k = \kappa_0 \cdot \int dt \int d\mathbf{x} \theta'_k \partial^2 \theta_k \quad (\text{B.43})$$

следует, что

$$-d + d_{\theta'}^k + d_{\theta}^k + d_{\kappa_0}^k + 2 = 0, \quad (\text{B.44a})$$

$$-1 + d_{\theta'}^\omega + d_{\theta}^\omega + d_{\kappa_0}^\omega = 0. \quad (\text{B.44b})$$

Учитывая (B.38), получаем, что

$$d_{\kappa_0}^k = -2, \quad (\text{B.45a})$$

$$d_{\kappa_0}^\omega = 1. \quad (\text{B.45b})$$

Из требования безразмерности члена

$$\mathcal{A}_0 \theta'_k (\theta_i \partial_i) v_k = \mathcal{A}_0 \int dt \int d\mathbf{x} \theta'_k (\theta_i \partial_i) v_k \quad (\text{B.46})$$

следует, что

$$-d + d_{\theta'}^k + d_{\theta}^k + d_v^k + d_{\mathcal{A}_0}^k + 1 = 0, \quad (\text{B.47a})$$

$$-1 + d_{\theta'}^\omega + d_{\theta}^\omega + d_v^\omega + d_{\mathcal{A}_0}^\omega = 0. \quad (\text{B.47b})$$

Это означает, что константа  $\mathcal{A}_0$  является безразмерной:

$$d_{\mathcal{A}_0}^k = 0, \quad (\text{B.48a})$$

$$d_{\mathcal{A}_0}^\omega = 0. \quad (\text{B.48b})$$

Выражения (B.28), (B.31), (B.35), (B.42), (B.45) и (B.48) дают иско-  
мые канонические размерности полей и параметров модели №3.



## С. Приложения к Главе 3

### С.1. Оператор $\mathcal{D}_{RG}$

Данный раздел построен на применении РГ–оператора  $\mathcal{D}_{RG}$  к конкретному действию  $S$  — действию модели №1, но все полученные результаты носят общий характер и полностью применимы к моделям №2 и №3.

Устраняющая УФ–расходимости функций Грина процедура мультипликативной ренормировки состоит в переходе от затравочных параметров  $e_0 = \{g_0, \nu_0, f_0, u_0, \mathcal{A}_0\}$  и неренормированного действия (2.10) к ренормированным параметрам  $e = e(e_0, \mu, \xi)$  (см. (3.5)) и ренормированному действию (3.6). При этом из связи функционалов  $S$  и  $S_R$  вытекает связь

$$G = Z_G \cdot G_R \quad (\text{C.1})$$

между функциями Грина данной модели.

Обозначим символом  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  оператор  $\mu \cdot \partial/\partial\mu$  при фиксированных затравочных параметрах  $e_0$ . В силу того, что  $e = e(e_0, \mu, \xi)$ , левая часть равенства (C.1) не зависит от ренормировочной массы  $\mu$ , поэтому, действуя оператором  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  на правую и левую части данного равенства, получаем, что

$$[\mathcal{D}_{RG} + \gamma_G] G_R = 0, \quad (\text{C.2})$$

где

$$\mathcal{D}_{RG} = \mu \partial_\mu + \sum_e (\tilde{\mathcal{D}}_\mu e) \partial_e \quad (\text{C.3})$$

является оператором  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ , выраженным через неренормированные переменные  $e_0$ .

По определению для любой величины  $F$  (поля или параметра) аномальная размерность  $\gamma_F$  равна

$$\gamma_F = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F; \quad (\text{C.4})$$

для любого заряда  $g$  (в общем случае зарядом является любой безразмерный параметр, от которого зависят константы  $Z$ )  $\beta$ -функция равна

$$\beta_g = \tilde{\mathcal{D}}_\mu g. \quad (\text{C.5})$$

Учитывая (C.5), получаем, что для любой величины  $F$

$$\gamma_F = \beta \partial_g \ln Z_F. \quad (\text{C.6})$$

Для того, чтобы найти коэффициенты  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu e$  в выражении (C.3), необходимо применить операцию  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  к правой и левой частям равенства

$$x_0 = x Z_x, \quad (\text{C.7})$$

где  $x$  — любая из переменных  $e$ . Поскольку  $x_0 \neq x_0(\mu)$ ,

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu x \cdot Z_x = -x \cdot \tilde{\mathcal{D}}_\mu Z_x, \quad (\text{C.8})$$

вследствие чего

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu x = -x \cdot \frac{1}{Z_x} \cdot \tilde{\mathcal{D}}_\mu Z_x = -x \cdot \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_x = -x \gamma_x. \quad (\text{C.9})$$

Поэтому для набора параметров  $e_0 = \{g_0, \nu_0, f_0, u_0, \mathcal{A}_0\}$  оператор  $\mathcal{D}_{RG}$  имеет вид

$$\mathcal{D}_{RG} = \mu \partial_\mu + \beta_g - \nu \gamma_\nu - f \gamma_f - u \gamma_u - \mathcal{A} \gamma_{\mathcal{A}}. \quad (\text{C.10})$$

## С.2. Связь констант ренормировки $Z$ , $\beta$ - и $\gamma$ -функций

### С.2.1. Вычисление констант ренормировки $Z$

Из уравнения Дайсона (3.4) следует, что для устранения расходимостей необходимо с помощью ренормировки параметров  $f_0$ ,  $u_0$  и  $g_0$  обеспечить конечность выражений

$$T_1 = f_0 \cdot \left( 1 + g_0 \cdot \frac{d-2+\mathcal{A}}{2(d-1)} \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi} \right) \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{C.11})$$

и

$$T_2 = f_0 \cdot \left( 1 + g_0 u_0 \cdot \frac{(\mathcal{A}-1)^2}{2(d-1)} \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi} \right) \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})^2 \cdot n_\alpha n_\beta; \quad (\text{C.12})$$

параметры  $f_0$ ,  $u_0$  и  $g_0$  ренормируются при этом следующим образом:

$$f_0 = f Z_f, \quad u_0 = u Z_u, \quad g_0 = g \mu^\xi Z_g, \quad Z_g = Z_f^{-1}. \quad (\text{C.13})$$

Рассмотрим структуру  $T_1$ . Поскольку в схеме MS константы ренормировки имеют вид

$$Z_x = 1 + \frac{g}{\xi} \cdot C_x + O(g^2), \quad (\text{C.14})$$

учитывая (C.11) и (C.13), получаем

$$\begin{aligned} T_1 &= f Z_f \cdot \left( 1 + g \mu^\xi Z_g \cdot \frac{d-2+\mathcal{A}}{2(d-1)} \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi} \right) = \\ &= f \left( 1 + \frac{g}{\xi} C_f \right) \left( 1 + \frac{g \mu^\xi}{\left( 1 + \frac{g}{\xi} C_f \right)} \cdot \frac{d-2+\mathcal{A}}{2(d-1)} \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Данное выражение должно быть УФ-конечно в первом порядке по  $g$ , соответственно

$$\frac{g}{\xi} \cdot C_f = -g \cdot \left( \frac{\mu}{m} \right)^\xi \cdot \frac{d-2+\mathcal{A}}{2(d-1)} \cdot \frac{1}{\xi}. \quad (\text{C.16})$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{\mu}{m}\right)^\xi = 1 + O(\xi), \quad (\text{C.17})$$

получаем, что

$$C_f = -\frac{d-2+\mathcal{A}}{2(d-1)}. \quad (\text{C.18})$$

В результате из (C.14) и (C.18) следует, что

$$Z_f = 1 - \frac{d-2+\mathcal{A}}{2(d-1)} \cdot \frac{g}{\xi} + O(g^2). \quad (\text{C.19})$$

Константа  $Z_u$  может найдена аналогичным способом из требования отсутствия полюсов по  $\xi$  в структуре  $T_2$ . При этом для нахождения координат неподвижной точки необходимо знать не сами константы  $Z$ , а  $\beta$ -функции зарядов  $g$  и  $u$ . Поэтому непосредственный расчет константы  $Z_u$  производить не обязательно — зная  $\beta_g$ ,  $\gamma_g$  и  $\gamma_f$ , можно сразу вычислить аномальную размерность и  $\beta$ -функцию заряда  $u$ ; см. раздел C.2.3.

### C.2.2. Вычисление аномальной размерности и $\beta$ -функции заряда $g$

По определению

$$\beta_g = \tilde{\mathcal{D}}_\mu g. \quad (\text{C.20})$$

Прологарифмировав равенство  $g_0 = g\mu^\xi Z_g$  и применив к полученному выражению операцию  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ , учитывая определение аномальной размерности  $\gamma$  (C.4), получаем

$$\frac{1}{g} \cdot \beta_g + \xi + \gamma_g = 0, \quad (\text{C.21})$$

т. е.

$$\beta_g = g \cdot (-\xi - \gamma_g). \quad (\text{C.22})$$

Из последнего равенства (С.13) и определения аномальной размерности (С.4) следует, что

$$\gamma_g = -\gamma_f. \quad (\text{С.23})$$

Рассмотрим произвольную функцию  $F(g)$ . Применяя к ней операцию  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  и учитывая (С.5), получаем

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu F(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{g_0, \nu_0} \cdot \frac{\partial F(g)}{\partial g} = \beta(g) \cdot \partial_g F(g), \quad (\text{С.24})$$

следовательно

$$\gamma_f = \tilde{\mathcal{D}} \ln Z_f = \beta(g) \cdot \partial_g \ln Z_f = g(-\xi + \gamma_f) \cdot \partial_g \ln Z_f. \quad (\text{С.25})$$

Из (С.25) следует, что

$$\gamma_f \cdot (1 - g \cdot \partial_g \ln Z_f) = -\xi g \cdot \partial_g \ln Z_f, \quad (\text{С.26})$$

т. о.

$$\gamma_f = -\xi \cdot \frac{D_g \ln Z_f}{1 - D_g \ln Z_f}. \quad (\text{С.27})$$

Раскладывая в полученном выражении  $Z_f$  в ряд, в первом порядке по  $g$  получаем

$$\begin{aligned} \gamma_f &= -\xi \cdot \frac{D_g \ln(1 + \frac{g}{\xi} \cdot C_f)}{1 - D_g \ln(1 + \frac{g}{\xi} \cdot C_f)} = \\ &= -\xi \cdot \frac{\frac{g}{\xi} \cdot C_f}{1 + \frac{g}{\xi} \cdot C_f} \cdot \frac{1 + \frac{g}{\xi} \cdot C_f}{1 + \frac{g}{\xi} \cdot C_f - \frac{g}{\xi} \cdot C_f} = -g \cdot C_f, \end{aligned} \quad (\text{С.28})$$

где  $C_f$  определено в (С.18).

Учитывая (С.22), (С.23) и (С.28), для  $\beta$ -функции заряда  $g$  получаем:

$$\beta_g = g \cdot (-\xi + \gamma_f) = g \left( -\xi + g \cdot \frac{d - 2 + \mathcal{A}}{2(d - 1)} \right). \quad (\text{С.29})$$

### С.2.3. Вычисление аномальной размерности и $\beta$ -функции заряда $u$

Отсутствие расходимостей в структуре  $T_2$  (С.12) означает, что после замены затравочных параметров  $u_0$ ,  $f_0$  и  $g_0$  на их ренормированные аналоги  $u$ ,  $f$  и  $g$  (см. (С.13)), в выражении

$$\tilde{T}_2 = u_0 f_0 \cdot \left( 1 + g_0 \cdot \frac{1}{u_0} \cdot \frac{(\mathcal{A} - 1)^2}{2(d - 1)} \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi} \right) \quad (\text{С.30})$$

должны отсутствовать полюса по  $\xi$ . В первом порядке по  $g$  это означает, что

$$\tilde{T}_2 = Z_u Z_f \cdot u f \cdot \left( 1 + g \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{(\mathcal{A} - 1)^2}{2(d - 1)} \cdot \frac{m^{-\xi}}{\xi} \right). \quad (\text{С.31})$$

Учитывая (С.18), из (С.31) следует, что

$$Z_u \cdot Z_f = 1 - \frac{(\mathcal{A} - 1)^2}{2(d - 1)} \cdot \frac{g}{u} + O(g^2). \quad (\text{С.32})$$

Таким образом, в первом порядке по  $g$

$$\gamma_u + \gamma_f = \frac{(\mathcal{A} - 1)^2}{2(d - 1)} \cdot \frac{1}{u} \cdot g. \quad (\text{С.33})$$

Поскольку из (С.5) и (С.9) следует, что

$$\beta_u = \tilde{\mathcal{D}}_\mu u = -u\gamma_u, \quad (\text{С.34})$$

учитывая значение аномальной размерности  $\gamma_f$  (С.28), для  $\beta$ -функции параметра  $u$  получаем:

$$\beta_u = g \cdot \frac{1}{2(d - 1)} [(d - 2 + \mathcal{A}) - (\mathcal{A} - 1)^2]. \quad (\text{С.35})$$

### С.3. ИК–асимптотика функций Грина. Инвариантный заряд, неподвижная точка

#### С.3.1. Уравнение РГ как дифференциальное уравнение в частных производных

Рассмотрим уравнение РГ (3.45), (3.46) для модели №2, обладающей одним зарядом  $g$  и одним размерным параметром  $\nu$ :

$$[\mathcal{D}_{RG} + \gamma_F] F_R = 0, \quad (\text{C.36})$$

$$\mathcal{D}_{RG} = \mathcal{D}_\mu + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu, \quad (\text{C.37})$$

где  $\gamma_F$  является аномальной размерностью  $F$ , а  $F$  — некоторая корреляционная функция полей  $\Phi$ ; для определенности будем считать, что  $F$  — парный коррелятор двух составных операторов. Тогда размерное представление для  $F$  имеет вид

$$F = \nu^{d_F^\omega} \mu^{d_F} \cdot R(Mr, mr, \mu r, g, \nu), \quad (\text{C.38})$$

где  $d_F^\omega$  — частотная размерность  $F$ ,  $d_F$  — каноническая размерность  $F$ , а  $R$  — функция от безразмерных аргументов.

Введем переменную  $s = k/\mu \equiv 1/\mu r$ , где  $k$  — волновое число,  $\mu$  — ренормировочная масса. Тогда оператор  $\mathcal{D}_{RG}$  принимает вид

$$\mathcal{D}_{RG} = -\mathcal{D}_s + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu. \quad (\text{C.39})$$

Учитывая (C.39), уравнение РГ (C.36) принимает вид

$$[-\mathcal{D}_s + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu + \gamma_F] R = 0. \quad (\text{C.40})$$

Сделаем подстановку  $R = \exp \Psi$ :

$$[-\mathcal{D}_s + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu] \Psi = -\gamma_F, \quad (\text{C.41})$$

### С.3.2. Решение однородного дифференциального уравнения. Инвариантный заряд

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$[-\mathcal{D}_s + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu] \Psi = 0. \quad (\text{C.42})$$

Набор его первых интегралов будем называть инвариантными переменными  $\bar{g}$ ,  $\bar{\nu}$ . Будем искать их в виде  $\bar{g} = \bar{g}(s, g)$ ,  $\bar{\nu} = \bar{\nu}(s, g, \nu)$ . Тогда

$$[-\mathcal{D}_s + \beta \partial_g] \bar{g} = 0, \quad (\text{C.43a})$$

$$\bar{g}(1, g) = g. \quad (\text{C.43b})$$

Решением данного дифференциального уравнения является функция

$$\ln s = \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)}, \quad (\text{C.44})$$

неявно определяющая  $\bar{g}$  через  $s$ . Действительно, применяя к (C.43a) операции  $\partial_g$  и  $\mathcal{D}_s$ , получаем

$$\partial_g \bar{g} \cdot \frac{1}{\beta(\bar{g})} - \frac{1}{\beta(g)} = 0, \quad (\text{C.45a})$$

$$\mathcal{D}_s \bar{g} \cdot \frac{1}{\beta(\bar{g})} = 1. \quad (\text{C.45b})$$

Комбинируя (C.45a) и (C.45b), нетрудно получить исходное уравнение (C.43).

Из (C.45b) следует, что

$$\mathcal{D}_s \bar{g} = \beta(\bar{g}). \quad (\text{C.46})$$



Рассмотрим точку  $g^*$ , определяемой из требования  $\beta(g^*) = 0$ . В окрестности этой точки

$$\beta(\bar{g}) = \beta'(g^*) \cdot (\bar{g} - g^*) + \dots, \quad (\text{C.47})$$

поэтому в окрестности неподвижной точки  $g^*$  уравнение (C.46) имеет вид

$$\mathcal{D}_s [\bar{g}(s, g^*) - g^*] = \beta'(g^*) \cdot (\bar{g} - g^*). \quad (\text{C.48})$$

Данное уравнение является уравнением Эйлера и решается подстановкой  $\bar{g}(s, g^*) = s^\omega$ , где  $\omega = \beta'(g^*)$ . Таким образом асимптотика инвариантного заряда вблизи неподвижной точки  $g^*$  имеет вид

$$\bar{g}(s, g^*) \cong g^* + \text{const} \cdot s^\omega. \quad (\text{C.49})$$

Из (C.49) следует, что при  $\omega > 0$   $\bar{g} \rightarrow g^*$  при  $s \rightarrow 0$ ; такая неподвижная точка является ИК–притягивающей. При  $\omega < 0$   $\bar{g} \rightarrow g^*$  при  $s \rightarrow \infty$  (УФ–притягивающая неподвижная точка).

Уравнение на инвариантный заряд  $\bar{\nu}$  имеет вид

$$[-\mathcal{D}_s + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu] \bar{\nu} = 0, \quad (\text{C.50a})$$

$$\bar{\nu}(1, \nu) = \nu, \quad (\text{C.50b})$$

где  $\bar{\nu} = \bar{\nu}(s, g, \nu)$ ,  $\gamma_\nu = \gamma_\nu(g, \nu)$ .

Решением данного уравнения является функция

$$\bar{\nu} = \nu \cdot \exp \left[ - \int_g^{\bar{g}} \frac{\gamma_\nu(x)}{\beta_g(x)} dx \right]. \quad (\text{C.51})$$

Подставляя (C.51) в левую часть (C.50) и учитывая (C.43а), получаем тождество

$$[-\gamma_\nu(g) + \gamma_\nu(g)] \cdot \bar{\nu} = 0, \quad (\text{C.52})$$

т. о. (C.51) действительно является решением уравнения (C.50).

### С.3.3. Решение неоднородного дифференциального уравнения

Учитывая, что  $\beta_g = \beta_g(g)$ ,  $\gamma_\nu = \gamma_\nu(g)$ , будем искать частное решение неоднородного дифференциального уравнения (С.41) в виде  $\Psi_0 = \Psi_0(g)$ .

Тогда (С.41) принимает вид

$$\beta \partial_g \Psi_0(g) = -\gamma_F; \quad (\text{С.53})$$

решение данного уравнения есть функция

$$\Psi_0(g) = - \int_a^g \frac{\gamma_F(x)}{\beta(x)} dx, \quad (\text{С.54})$$

где  $a$  — произвольный нижний предел. Учитывая (С.54), общее решение неоднородного дифференциального уравнения (С.41) имеет вид

$$R(s, g, \nu) = \exp \left[ - \int_a^g \frac{\gamma_F(x)}{\beta(x)} dx \right] \cdot F(\bar{g}, \bar{\nu}), \quad (\text{С.55})$$

где  $F(\bar{g}, \bar{\nu})$  — произвольная функция первых интегралов. Рассмотрим  $R(1, g, \nu)$ :

$$R(1, g, \nu) = \exp \left[ - \int_a^g \frac{\gamma_F(x)}{\beta(x)} dx \right] \cdot F(g, \nu) \quad (\text{С.56})$$

в силу нормировки (С.43b), (С.50b). Из (С.56) следует, что

$$F(g, \nu) = \exp \left[ \int_a^g \frac{\gamma_F(x)}{\beta(x)} dx \right] \cdot R(1, g, \nu). \quad (\text{С.57})$$

Комбинируя (С.55) и (С.57) получаем, что решение уравнения РГ (С.36), (С.37) имеет вид

$$R(s, g, \nu) = \exp \left[ \int_g^{\bar{g}} \frac{\gamma_F(x)}{\beta(x)} dx \right] \cdot R(1, \bar{g}, \bar{\nu}), \quad (\text{С.58})$$

при этом асимптотики инвариантных зарядов  $\bar{g}$  и  $\bar{\nu}$  известны, см. (С.49) и (С.51). Выражение (С.58) является конечным ответом для решения дифференциального уравнения (С.36), (С.37). Проанализируем его: обозначим

выражение, стоящее под экспонентой, как  $E$ :

$$E = \int_g^{\bar{g}} \frac{\gamma_F(x)}{\beta(x)} dx = \int_g^{\bar{g}} dx \left[ \frac{\gamma_F(x)}{\beta(x)} - \frac{\gamma_F^*}{\beta(x)} + \frac{\gamma_F^*}{\beta(x)} \right], \quad (\text{C.59})$$

где  $\gamma_F^* = \gamma_F(g^*)$ . Учитывая (C.44), получаем, что

$$\begin{aligned} E &= \gamma_F^* \cdot \ln s + \int_g^{g^*} dx \left[ \frac{\gamma_F(x) - \gamma_F^*}{\beta(x)} \right] + \int_{g^*}^{\bar{g}} dx \left[ \frac{\gamma_F(x) - \gamma_F^*}{\beta(x)} \right] = \\ &= \gamma_F^* \cdot \ln s + f(g, \xi). \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

Подставляя (C.60) в (C.58), получаем, что первый член в (C.60) дает поправку  $s^{\gamma_F^*}$  в асимптотике функции  $R$  (C.38); второй член есть некоторая функция  $\exp[f(g, \xi)]$ , являющаяся конечным амплитудным множителем, которым мы впредь интересоваться не будем; а третий член является некоторой конечной функцией  $\bar{g}$  и, как следствие, конечной при  $s \rightarrow 0$  функцией  $s$ , т. е. некоторой поправкой к лидирующему члену асимптотики  $\ln s$ .

Таким образом лидирующий член асимптотики  $s \rightarrow 0$  решения (C.58) уравнения РГ (C.36), (C.37) имеет вид

$$R(s, g, \nu) \cong s^{\gamma_F^*} \cdot R(1, \bar{g}, \bar{\nu}). \quad (\text{C.61})$$

При наличии нескольких зарядов в модели уравнение (C.46) превратится в систему зацепленных уравнений

$$\mathcal{D}_s \bar{g}_i = \beta_i(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n), \quad (\text{C.62})$$

а вместо условия  $\beta'(g^*) > 0$  для ИК–притягивающих точек будет требование положительной определенности матрицы  $\Omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial g_k|_{g=g^*}$ . При этом общие выводы и вид асимптотического поведения (C.61) сохраняются.

## Литература

1. *Grauer, R.* Scaling of high-order structure functions in magnetohydrodynamic turbulence / R. Grauer, J. Krug, C. Marliani // *Phys. Lett. A.* — 1994. — Vol. 195. — P. 335.
2. *Mininni, P. D.* Finite dissipation and intermittency in magnetohydrodynamics / P. D. Mininni, A. Pouquet // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 80. — P. 025401.
3. *Grauer, R.* Analytical and numerical approaches to structure functions in magnetohydrodynamic turbulence / R. Grauer, C. Marliani // *Physica Scripta T.* — 1996. — Vol. 67. — P. 38.
4. R. Bruno, V. Carbone, B. Bavassano et al. // *Mem. Sos. Astrophys. It.* — 2003. — Vol. 74. — P. 725.
5. R. Bruno, B. Bavassano, R. D'Amicis et al. // *Geophys. Research Abstracts.* — 2003. — Vol. 9. — P. 08623.
6. *Pagel, C.* A study of magnetic fluctuations and their anomalous scaling in the solar wind: The Ulysses fast-latitude scan / C. Pagel, A. Balogh // *Nonlin. Processes in Geophysics.* — 2001. — Vol. 8. — P. 313.
7. Solar Wind Magnetohydrodynamics Turbulence: Anomalous Scaling and Role of Intermittency / C. Salem, A. Mangeney, S. D. Bale, P. Veltri // *Astrophys. J.* — 2009. — Vol. 702. — P. 537.

8. Energy Release in a Turbulent Corona / G. Einaudi, M. Velli, H. Politano, A. Pouquet // *Astrophys. Journ.* — 1996. — Vol. 457. — Pp. L113–L116.
9. *Frisch, U.* Turbulence: The Legacy of A N Kolmogorov / U. Frisch. — Cambridge University Press, 1955.
10. *Обухов, А. М.* / А. М. ОБУХОВ // *Изв. АН СССР. Сер. географ, и геофиз.* — 1949. — Vol. 13. — P. 58.
11. *Kraichnan, R. H.* Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence / R. H. Kraichnan // *Phys. Fluids.* — 1968. — Vol. 11. — P. 945.
12. *Kraichnan, R. H.* Anomalous scaling of a randomly advected passive scalar / R. H. Kraichnan // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 72. — P. 1016.
13. *Kraichnan, R. H.* Passive Scalar: Scaling Exponents and Realizability / R. H. Kraichnan // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78. — P. 4922.
14. *Gawędzki, K.* Anomalous Scaling of the Passive Scalar / K. Gawędzki, A. Kupiainen // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 75. — P. 3834.
15. *Bernard, D.* Anomalous scaling in the N-point functions of a passive scalar / D. Bernard, K. Gawędzki, A. Kupiainen // *Phys. Rev. E.* — 1996. — Vol. 54. — P. 2564.
16. Normal and anomalous scaling of the fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalar / M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev // *Phys. Rev. E.* — 1995. — Vol. 52. — P. 4924.
17. *Chertkov, M.* Anomalous Scaling Exponents of a White-Advection Passive

- Scalar / M. Chertkov, G. Falkovich // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 76. — P. 2706.
18. *Adzhemyan, L. Ts.* Renormalization group, operator product expansion, and anomalous scaling in a model of advected passive scalar / L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev // *Phys. Rev. E.* — 1998. — Vol. 58. — P. 1823.
19. *Аджемьян, Л. Ц.* Ренормгруппа, операторное разложение и аномальный скейлинг в простой модели турбулентной диффузии / Л. Ц. Аджемьян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев // *Теор. Мат. Физика.* — 1999. — Vol. 120:2. — Pp. 309–314.
20. Anomalous exponents to order  $\varepsilon^3$  in the rapid-change model of passive scalar advection / L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, V. A. Barinov et al. // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Vol. 63. — P. 025303(R).
21. Calculation of the anomalous exponents in the rapid-change model of passive scalar advection to order  $\varepsilon^3$  / L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, V. A. Barinov et al. // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Vol. 64. — P. 056306.
22. Erratum: Anomalous exponents to order  $\varepsilon^3$  in the rapid-change model of passive scalar advection / L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, V. A. Barinov et al. // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Vol. 64. — P. 019901.
23. *Adzhemyan, L. Ts.* Renormalization group and anomalous scaling in a simple model of passive scalar advection in compressible flow / L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov // *Phys. Rev. E.* — 1998. — Vol. 58. — P. 7381.

24. *Falkovich, G.* Particles and fields in fluid turbulence / G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola // *Rev. Mod. Phys.* — 2001. — Vol. 73. — P. 913.
25. *Antonov, N. V.* Renormalization group, operator product expansion and anomalous scaling in models of turbulent advection / N. V. Antonov // *J. Phys. A.* — 2006. — Vol. 39. — Pp. 7825–7865.
26. *Васильев, А. Н.* Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике / А. Н. Васильев. — СПб.: ПИЯФ, 1998.
27. *Zinn-Justin, J.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena / J. Zinn-Justin. — Clarendon, Oxford, 1989.
28. *Lanotte, A.* Anisotropic nonperturbative zero modes for passively advected magnetic fields / A. Lanotte, A. Mazzino // *Phys. Rev. E.* — 1999. — Vol. 60. — P. R3483.
29. *Arad, I.* Nonperturbative spectrum of anomalous scaling exponents in the anisotropic sectors of passively advected magnetic fields / I. Arad, L. Biferale, I. Procaccia // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 61. — P. 2654.
30. *Antonov, N. V.* Persistence of small-scale anisotropies and anomalous scaling in a model of magnetohydrodynamics turbulence / N. V. Antonov, A. Lanotte, A. Mazzino // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 61. — P. 6586.
31. Manifestation of anisotropy persistence in the hierarchies of magnetohydrodynamical scaling exponents / N. V. Antonov, J. Honkonen, A. Mazzino

- ino, P. Muratore-Ginanneschi // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 62. — P. R5891(R).
32. *Jurcisinova, E.* Anomalous scaling of the magnetic field in the Kazantsev–Kraichnan model / E. Jurcisinova, M. Jurcisin // *J. Phys. A.* — 2012. — Vol. 45. — P. 485501.
33. Anomalous scaling of the magnetic field in the Kazantsev–Kraichnan model / L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. Mazzino et al. // *Europhys. Lett.* — 2001. — Vol. 55. — Pp. 801–806.
34. *Vergassola, M.* Anomalous scaling for passively advected magnetic fields / M. Vergassola // *Phys. Rev. E.* — 1996. — Vol. 53. — P. R3021(R).
35. *Rogachevskii, I.* Intermittency and anomalous scaling for magnetic fluctuations / I. Rogachevskii, N. Kleeorin // *Phys. Rev. E.* — 1997. — Vol. 56. — P. 417.
36. *Fournier, J. D.* Infrared properties of forced magnetohydrodynamic turbulence / J. D. Fournier, P. L. Sulem, A. Pouquet // *J. Phys. A.* — 1982. — Vol. 15. — P. 1393.
37. *Аджемян, Л. Ц.* Квантово–полевая ренормгруппа в теории турбулентности: магнитная гидродинамика / Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, М. Гнатич // *Теор. Мат. Физика.* — 1985. — Vol. 64:2. — Pp. 196–207.
38. *Vincenzi, D.* The Kraichnan–Kazantsev dynamo / D. Vincenzi // *J. Stat. Phys.* — 2002. — Vol. 106. — P. 1073.



39. *Arponen, H.* Dynamo effect in the Kraichnan magnetohydrodynamic turbulence / H. Arponen, P. Horvai // *J. Stat. Phys.* — 2007. — Vol. 129. — P. 205.
40. *Arponen, H.* Steady-state existence of passive vector fields under the Kraichnan model / H. Arponen // *Phys. Rev. E.* — 2010. — Vol. 81. — P. 036325.
41. Turbulence with pressure: Anomalous scaling of a passive vector field / N. V. Antonov, M. Hnatich, J. Honkonen, M. Jurgisin // *Phys. Rev. E.* — 2003. — Vol. 68. — P. 046306.
42. *Arponen, H.* Anomalous scaling and anisotropy in models of passively advected vector fields / H. Arponen // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 79. — P. 056303.
43. *Казанцев, А. П.* / А. П. КАЗАНЦЕВ // *ЖЭТФ.* — 1967. — Vol. 53. — P. 1806.
44. Anomalous scaling of a passive scalar in the presence of strong anisotropy / L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, M. Hnatich, S. V. Novikov // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 63. — P. 016309.
45. Anomalous scaling of passively advected magnetic field in the presence of strong anisotropy / M. Hnatich, M. Jurgisin, A. Mazzino, S. Sprinc // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 71. — P. 066312.
46. *Jurgisinova, E.* Anomalous scaling of a passive scalar advected by a turbulent velocity field with finite correlation time and uniaxial small-scale

- anisotropy / E. Jurcisinova, M. Jurcisin // *Phys. Rev. E.* — 2008. — Vol. 77. — P. 016306.
47. *Jurcisinova, E.* Influence of anisotropy on anomalous scaling of a passive scalar advected by the Navier–Stokes velocity field / E. Jurcisinova, M. Jurcisin, R. Remecky // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 80. — P. 046302.
48. *Avellaneda, M.* Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport / M. Avellaneda, A. Majda // *Commun. Math. Phys.* — 1990. — Vol. 131. — Pp. 381–429.
49. *Avellaneda, M.* Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport II: Non–Gaussian statistics, fractal interfaces, and the sweeping effect / M. Avellaneda, A. Majda // *Commun. Math. Phys.* — 1992. — Vol. 146. — Pp. 139–204.
50. *Majda, A.* Vorticity, turbulence, and acoustics in fluid flow / A. Majda // *SIAM Rev.* — 1991. — Vol. 33. — Pp. 349–388.
51. *Majda, A.* Explicit inertial range renormalization theory in a model for turbulent diffusion / A. Majda // *J. Stat. Phys.* — 1993. — Vol. 73. — Pp. 515–542.
52. *Majda, A.* Random shearing direction models for isotropic turbulent diffusion / A. Majda // *J. Stat. Phys.* — 1994. — Vol. 75. — Pp. 1153–1165.
53. *Avellaneda, M.* Simple examples with features of renormalization for turbulent transport / M. Avellaneda, A. Majda // *Phil. Trans. Roy. Soc. London A.* — 1994. — Vol. 346. — P. 205.

54. *Avellaneda, M.* Approximate and exact renormalization theories for a model of turbulent transport / M. Avellaneda, A. Majda // *Phys. Fluids A.* — 1992. — Vol. 4. — Pp. 41–57.
55. *Avellaneda, M.* Renormalization theory for eddy diffusivity in turbulent transport / M. Avellaneda, A. Majda // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Vol. 68. — Pp. 3028–3031.
56. *Hornthrop, D.* Subtle statistical behavior in simple models for random advection–diffusion / D. Hornthrop, A. Majda // *J. Math. Sci. Univ. Tokyo.* — 1994. — Vol. 1. — P. 23.
57. *Zhang, Q.* Inertial range scaling of laminar shear flow as a model of turbulent transport / Q. Zhang, J. Glimm // *Commun. Math. Phys.* — 1992. — Vol. 146. — Pp. 217–229.
58. *Wallstrom, T. C.* Turbulent diffusion phase transition is due to singular energy spectrum / T. C. Wallstrom // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 1995. — Vol. 92. — Pp. 11005–11008.
59. *Antonov, N. V.* Inertial–range behavior of a passive scalar field in a random shear flow: renormalization group analysis of a simple model / N. V. Antonov, A. V. Malyshev // *J. Stat. Phys.* — 2012. — Vol. 146. — Pp. 33–55.
60. *Dominicis, C. De.* Energy spectra of certain randomly–stirred fluids / C. De Dominicis, P. C. Martin // *Phys. Rev. A.* — 1979. — Vol. 19. — P. 419.

61. *Sulem, P. L.* Fully developed turbulence and renormalization group / P. L. Sulem, J.-D. Fournier, U. Frisch // *Lecture Notes in Physics*. — 1979. — Vol. 104. — Pp. 320–335.
62. *Fournier, J.-D.* Remarks on the renormalization group in statistical fluid dynamics / J.-D. Fournier, U. Frisch // *Phys. Rev. A*. — 1983. — Vol. 28. — P. 1000.
63. *Аджемян, Л. Ц.* Ренормгрупповой подход в теории турбулентности: размерности составных операторов / Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак // *Теор. Мат. Физика*. — 1983. — Vol. 53:2. — Pp. 268–281.
64. *Аджемян, Л. Ц.* Квантово–полевая ренормализационная группа в теории развитой турбулентности / Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев // *Усп. Физ. Наук*. — 1996. — Vol. 166:12. — Pp. 1257–1284.
65. *Adzhemyan, L. Ts.* The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence / L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev. — Gordon and Breach, London, 1999.
66. *Fournier, J. D.* Infrared properties of forced magnetohydrodynamic turbulence / J. D. Fournier, P. L. Sulem, A. Pouquet // *J. Phys. A*. — 1982. — Vol. 15. — P. 1393.
67. *Аджемян, Л. Ц.* Турбулентное динамо как спонтанное нарушение симметрии / Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, М. Гнатич // *Теор. Мат. Физика*. — 1985. — Vol. 64:2. — P. 196.

68. Anomalous scaling of a passive vector field in  $d$  dimensions: higher order structure functions / L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, P. B. Gol'din, M. V. Kompaniets // *Teor. Mat. Fizika*. — 2013. — Vol. 46. — P. 135002.
69. Turbulence with pressure: Anomalous scaling of a passive vector field / N. V. Antonov, M. Hnatch, J. Honkonen, M. Jurcisin // *Phys. Rev. E*. — 2003. — Vol. 68. — P. 046306.
70. Anomalous scaling of a passive scalar advected by the Navier–Stokes velocity field: Two-loop approximation / L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, J. Honkonen, T. L. Kim // *Phys. Rev. E*. — 2005. — Vol. 71. — P. 016303.
71. *Borue, V.* Numerical study of three-dimensional Kolmogorov flow at high Reynolds numbers / V. Borue, S. A. Orszag // *J. Fluid Mech.* — 1994. — Vol. 306. — P. 293.
72. Extraction of Anisotropic Contributions in Turbulent Flows / I. Arad, B. Dhruva, S. Kurien et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 81. — P. 5330.
73. *Antonov, N. V.* Anomalous scaling regimes of a passive scalar advected by the synthetic velocity field / N. V. Antonov // *Phys. Rev. E*. — 1999. — Vol. 60. — P. 6691.
74. M. Hnatch, M. Jurcisin, A. Mazzino, S. Sprinc // *Acta Phys. Slovaca*. — 2002. — Vol. 52. — P. 559.
75. *Jurcisinova, E.* Anomalous scaling of a passive vector advected by the Navier–Stokes velocity field / E. Jurcisinova, M. Jurcisin, R. Remecky // *J. Phys. A*. — 2009. — Vol. 42. — P. 275501.

76. *Adzhemyan, L. Ts.* Anomalous scaling, nonlocality, and anisotropy in a model of the passively advected vector field / L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. V. Runov // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Vol. 64. — P. 046310.
77. Аномальный скейлинг в модели турбулентного переноса векторного поля: высшие структурные функции / Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, П. Б. Гольдин, М. В. Компаниец // *Вестник СПбУ, Сер. 4: Физ. Хим.* — 2009. — Vol. 1. — P. 56.
78. *Новожилов, Ю. В.* Электродинамика / Ю. В. Новожилов, Ю. А. Яппа. — М.: Наука, 1978.
79. *Зельдович, Я. Б.* Магнитные поля в астрофизике / Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов. — РХД, Ижевск, 2006.
80. *Монин, А. С.* Статистическая гидромеханика / А. С. Монин, А. М. Яглом. — М.: Наука, 1967.