На правах рукописи

Тодоров Дмитрий Игоревич

ДИФФЕОМОРФИЗМЫ И ПОТОКИ НА ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ СО СВОЙСТВАМИ ОТСЛЕЖИВАНИЯ

Специальность 01.01.04 — Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2014

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор ПИЛЮГИН Сергей Юрьевич, Санкт-Петербургский государственный университет, профессор

Официальные оппоненты:

МАЛЮТИН Андрей Валерьевич, доктор физико-математических наук, ПОМИ РАН, ведущий научный сотрудник

БЕГУН Евгения Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения, доцент

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени проф. М. А. Бонч-Бруевича

Защита состоится 24 сентября 2014 г. в 18 часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.29 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, В.О. 10 линия 33-35, ауд. 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте http://spbu.ru/science/disser/dissertatsii-dopushchennye-k-zashchite-i-svedeniya-o-zashchite.

Автореферат разослан “__” _________ 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета	Нежинский Владимир Михайлович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Классической задачей при изучении глобальной структуры множества диффеоморфизмов замкнутого гладкого многообразия является задача о характеризации множества диффеоморфизмов, топологически сопряжённых с их C^1-малыми возмущениями. Такие диффеоморфизмы называются структурно устойчивыми (определение структурной устойчивости восходит к Андронову и Понтрягину).

Вопросу об условиях, при которых диффеоморфизм f или векторное поле X являются структурно устойчивыми, посвящены многочисленные исследования.

В последнее десятилетие появились работы, в которых структурная устойчивость характеризуется в терминах свойства отслеживания приближённых траекторий (псевдотраекторий).

Так, было показано, что C^1-внутренность множества диффеоморфизмов, обладающих свойством отслеживания, совпадает со множеством структурно устойчивых диффеоморфизмов. Аналогичный результат был доказан для векторных полей без точек покоя.

Позднее оказалось, что структурную устойчивость можно характеризовать, накладывая дополнительные условия на свойство отслеживания; так, показано, что липшицево свойство отслеживания эквивалентно структурной устойчивости.

Цель работы

Цель работы состоит в нахождении новых достаточных условий структурной устойчивости диффеморфизмов и потоков на замкнутых гладких многообразиях.

Методы исследований

В качестве основного инструмента при изучении диффеоморфизмов используется теорема Мане о необходимом и достаточном условиях структурной устойчивости. Технически, применение теоремы Мане сводится к использованию дискретного аналога теоремы Плисса о связи между разрешимостью систем разностных уравнений и гиперболичностью последовательности коэффициентов. Доказательство теоремы, усиливающей этот дискретный аналог теоремы Плисса, приводится в приложении.

При изучении потоков дискретный аналог теоремы Плисса используется для доказательства гиперболичности неблуждающего множества и выполнения строгого условия трансверсальности. Классическая теория гиперболических систем, в свою очередь, гарантирует, что выполнение двух этих свойств эквивалентно структурной устойчивости в случае отсутствия точек покоя.

Основные результаты работы

Доказывается эквивалентность структурной устойчивости и липшицева обратного отслеживания для диффеоморфизмов и гладких векторных полей, гёльдерова обратного отслеживания для диффеоморфизмов, и одного из вариантов предельного свойства отслеживания.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты позволяют характеризовать множество структурно-устойчивых систем с помощью различных свойств липшицева обратного и предельного отслеживания.

С точки зрения приложений результаты диссертации можно интерпретировать как доказательство невозможности хорошего численного приближения негиперболических систем.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы были изложены на следующих конференциях и семинарах:

1. семинар в Boston University – Бостон, США, 2013;
2. семинар в Georgia Institute of Technology – Атланта, США, 2013;
3. семинар в Northwestern University – Чикаго, США, 2013;
4. Динамика, бифуркации и странные аттракторы – Нижний Новгород, Россия, 2013;
5. International Conference Beyond Uniform Hyperbolicity– Бедлево, Польша, 2013;
6. Dynamical Systems: 100 years after Poincaré – Хихон, Испания, 2012;
7. Dynamics, Topology and Computations – Бедлево, Польша, 2012;
8. ICTP-ESF School and Conference in Dynamical Systems – Триест, Италия, 2012;
9. семинар в Université de Bretagne Occidentale – Брест, Франция, 2012;
10. семинар в IRMAR – Ренн, Франция, 2012;
11. IUTAM Symposium on 50 Years of Chaos: Applied and Theoretical – Киото, Япония, 2011;

12. семинар по динамическим системам в лаб. им. П.Л. Чебышёва – Санк-Петербург, Россия, 2011, 2012, 2013.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в печатных работах автора [1–3] в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК, ссылки на которые приведены в конце автореферата.

Работа [1] написана в соавторстве. Диссертанту принадлежит доказательство для случая класса методов Θ_s, соавторам – постановка задачи, введение и доказательство для случая класса методов Θ_t.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, приложения и списка литературы. Список литературы включает 42 названия. Объём диссертации 72 страницы.

Содержание диссертации

В первой главе приводится обзор имеющихся результатов, связанных с липшицевым отслеживанием для диффеоморфизмов, определяется липшицево обратное отслеживание для диффеоморфизмов и доказывается его эквивалентность структурной устойчивости.

Пусть f – диффеоморфизм класса C^1 замкнутого гладкого многообразия M с римановой метрикой dist. Здесь и далее всегда будут иметься в виду многообразия гладкости C^∞. Обозначим $m = \dim M$. Пусть $d > 0$.

Определение 1. Будем называть d-псевдотраекторией f последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ точек M, для которой выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) < d, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Мы будем рассматривать свойства обратного отслеживания псевдотраекторий, порождённых двумя классами методов.

Определение 2. Будем называть d-методом класса Θ_s семейство непрерывных отображений $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\psi_k : M \to M$, для которого выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(\psi_k(x), f(x)) < d, \quad x \in M,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ точек M называется траекторией d-метода $\{\psi_k\}$ класса Θ_s, если

$$x_{k+1} = \psi_k(x_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Определение 3. Будем называть d-методом класса Θ_t семейство непрерывных отображений $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\psi_k : M \to M$, для которого выполнено следующее:

$$\psi_0 = \mathrm{Id};$$
$$\operatorname{dist}(f(\psi_k(x)), \psi_{k+1}(x)) < d, \quad x \in M,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ точек M называется траекторией d-метода $\{\psi_k\}$ класса Θ_t, если существует такая точка $x \in M$, что

$$x_k = \psi_k(x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Определение 4. Будем говорить, что диффеоморфизм f обладает липшицевым свойством обратного отслеживания относительно класса Θ_s (класса Θ_t) на траектории точки $p \in M$, если существуют такие положительные константы d_0, L, что для любого d-метода $\{\psi_k\}$ класса Θ_s (класса Θ_t) с $d \leqslant d_0$ найдется такая траектория $\{x_k\}$ метода $\{\psi_k\}$, что выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(x_k, f^k(p)) < Ld, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Определение 5. Будем говорить, что диффеоморфизм f обладает липшицевым свойством обратного отслеживания относительно класса Θ_s (класса Θ_t), если он обладает липшицевым свойством обратного отслеживания относительно этого класса на траектории каждой точки $p \in M$. Будем писать, соответственно, $f \in \mathrm{LISP}_s$ или $f \in \mathrm{LISP}_t$.

Рассмотрим множество $\mathrm{Diff}^1(M)$ гладких диффеоморфизмов M на себя. Хорошо известно, что любое гладкое замкнутое многообразие вкладывается в $\mathbb{R}^n$ для некоторого натурального n. Тогда можно отождествить касательное пространство T_xM и пространство $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ для любой точки $x \in M$.

Пусть $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$. Дифференциал $Df(x)$ действует из одного m-мерного подпространства $\mathbb{R}^n$ в другое m-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$. Определим расстояние между диффеоморфизмами $f_1, f_2 \in \mathrm{Diff}^1(M)$ следующим образом:

$$\rho_1(f_1, f_2) = \rho_0(f_1, f_2) + \sup_{x \in M} \|Df(x) - Dg(x)\|,$$

где $\|\cdot\|$ – стандартная операторная норма и

$$\rho_0(f_1, f_2) = \max_{x \in M} \max\left(\mathrm{dist}(f_1(x), f_2(x)), \mathrm{dist}(f_1^{-1}(x), f_2^{-1}(x))\right).$$

Очевидно, ρ_1 является метрикой на пространстве $\mathrm{Diff}^1(M)$. Топологию, порождённую такой метрикой, называют C^1-топологией.

Определение 1. Диффеоморфизм f называется структурно устойчивым, если существует такая окрестность U диффеоморфизма f в C^1-топологии, что любой диффеоморфизм $g \in U$ топологически сопряжен с f.

Множество структурно устойчивых диффеоморфизмов будем обозначать через $\mathcal{S}$.

Основным результатом главы является следующая теорема:

Теорема 1. *Следующие условия эквиваленты:*

- *диффеоморфизм f структурно устойчив*

- $f \in \mathrm{LISP}_s$

- $f \in \mathrm{LISP}_t$.

Во второй главе определяется липшицево обратное отслеживание для потоков и доказывается его эквивалентность структурной устойчивости.

Пусть Φ — поток на замкнутом гладком многообразии M с римановой метрикой dist. Пусть $d > 0$.

Определение 6. Будем говорить, что отображение $\psi : \mathbb{R} \to M$ является d-псевдотраекторией для потока Φ, если для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{dist}\,(\psi(t+s), \Phi(s, \psi(t))) < d, \quad s \in [-1, 1].$$

Определение 7. Будем говорить, что гладкое отображение $\Psi : \mathbb{R} \times M \to M$ является d-методом для потока Φ, если для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{dist}\,(\Psi(t+s, x), \Phi(s, \Psi(t, x))) < d, \quad s \in [-1, 1],$$

и $\Psi(0, x) = x$ для любого $x \in M$.

Обозначим через Rep множество всех возрастающих гомеоморфизмов $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых $\alpha(0) = 0$. Введём также следующее обозначение:

$$\mathrm{Rep}\,(\delta) = \left\{ \alpha \in \mathrm{Rep} \;\middle|\; \left| \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{t - s} - 1 \right| \leqslant \delta, \quad t \neq s \right\}.$$

Определение 8. Будем говорить, что поток Φ обладает свойством липшицева обратного отслеживания ($\Phi \in \mathrm{LISP}$), если для любой точки $p \in M$ существуют такие константы L, d_0, что для каждого d-метода Ψ при $d \leqslant d_0$ существуют такая точка $\hat{p}^{(d)} \in M$ и такая репараметризация $\alpha \in \mathrm{Rep}\,(Ld)$, что

$$\mathrm{dist}(\Phi(t, p), \Psi(\alpha(t), \hat{p}^{(d)})) < Ld, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть поток Φ порождён C^1 векторным полем X на M. Фиксируем вложение многообразия M в $\mathbb{R}^n$ для достаточно большого n.

Обозначим через DX дифференциал отображения $\hat{X} : M \to \mathbb{R}^n$, соответствующего векторному полю X при вложении многообразия M в $\mathbb{R}^n$. Зададим расстояние между двумя гладкими векторными полями X, Y на многообразии M следующим образом:

$$\rho_1(X,Y) = \rho_0(X,Y) + \max_{p \in M} \|DX(p) - DY(p)\|,$$
$$\rho_0(X,Y) = \max_{p \in M} |X(p) - Y(p)|.$$

Несложно проверить, что так определённая функция ρ_1 – метрика на множестве гладких векторных полей на многообразии M.

Определение 2. Векторное поле X называется структурно устойчивым, если существует такая его окрестность U в пространстве $\mathcal{X}$ (с топологией, порождённой метрикой ρ_1), что для любого векторного поля $Y \in U$ существует гомеоморфизм M на себя, который отображает траектории потока, порождённого полем X в траектории потока, порождённого полем Y, сохраняя их ориентацию.

Точка x называется точкой покоя для потока Φ, если $\Phi(t,x) = x$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Основным результатом главы является следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть у потока Φ нет точек покоя. В этом случае поток Φ структурно устойчив тогда и только тогда, когда $\Phi \in$ LISP.*

Во третьей главе определяется гёльдерово обратное отслеживание для диффеоморфизмов и доказывается его эквивалентность структурной устойчивости при некоторых значениях экспонент.

Пусть f — диффеоморфизм замкнутого гладкого многообразия M с римановой метрикой dist.

Определение 9. Будем говорить, что диффеоморфизм f обладает гёльдеровым свойством обратного отслеживания с показателем $\theta > 0$ на траектории точки $p \in M$, если существуют такие положительные константы d_0, L, что для любого d-метода $\{\psi_k\}$ класса Θ_s с $d \leqslant d_0$ найдётся такая траектория $\{x_k\}$ метода $\{\psi_k\}$, что выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(x_k, f^k(p)) < Ld^\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Определение 10. Будем говорить, что диффеоморфизм f обладает гёльдеровым свойством обратного отслеживания с показателем $\theta > 0$, если он обладает гёльдеровым свойством обратного отслеживания с показателем θ на траектории любой точки $p \in M$. Будем писать, соответственно, $f \in \mathrm{HISP}(\theta)$.

Для формулировки основного результата понадобится следующее определение:

Определение 11. Пусть $\delta \in (0, 1]$. Мы будем обозначать через $\mathrm{Diff}^{1+\delta}(M)$ множество таких диффеоморфизмов $f : M \to M$, что для любой точки p существуют такие окрестность нуля $V \subset T_pM$ и число $R > 0$, что выполняется следующая оценка:

$$\operatorname{dist}\left(f(\exp_p(v)), \exp_{f(p)}\left(Df(p)v\right)\right) \leqslant R\,|v|^{1+\delta}, \quad v \in V.$$

Замечание 1. Очевидно, что $\mathrm{Diff}^{1+\delta}(M) \subset \mathrm{Diff}^1(M)$, поэтому можно говорить о структурной устойчивости $f \in \mathrm{Diff}^{1+\delta}(M)$.

Основным результатом главы является следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть* $f \in \mathrm{Diff}^{1+\delta}(M)$, $\delta \in (0, 1]$ *и пусть число* θ *таково, что* $1 > \theta > 1/(1 + \delta)$. *Диффеоморфзим* f *структурно устойчив тогда и только тогда, когда* $f \in \mathrm{HISP}(\theta)$.

В четвёртой главе приводится обзор имеющихся результатов, связанных с двусторонним предельным отслеживанием для диффеоморфизмов, определяется липшицево двустороннее предельное отслеживание для диффеоморфизмов и доказывается его эквивалентность структурной устойчивости.

Пусть f — диффеоморфизм замкнутого гладкого многообразия с римановой метрикой dist.

Пусть γ – неотрицательное вещественное число. Обозначим банахово пространство последовательностей $x = \{x_k\}$ векторов из $\mathbb{R}^m$, занумерованных целыми числами, с ограниченной нормой $\|x\|_\gamma = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| \left(|k|+1\right)^\gamma$, через $\mathcal{N}_\gamma(\mathbb{Z})$.

Определение 3. Последовательность $\xi = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ точек M назовём γ-убывающей d-псевдотраекторией динамической системы f, если $\|\{d_k(\xi)\}\|_\gamma < d$.

Определение 4. Диффеоморфизм f обладает липшицевым двусторонним предельным свойством отслеживания с показателем γ, если существуют такие положительные константы $d_0, L > 0$, что для любой γ-убывающей d-псевдотраектории $\{x_k\}$ с $d \leqslant d_0$ существует такая точка $p \in M$, что

$$\left\|\left\{\mathrm{dist}(f^k(x), x_k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_\gamma < Ld.$$

В таком случае будет использоваться обозначение $f \in \mathrm{LTSLmSP}(\gamma)$.

Основным результатом главы является следующая теорема:

Теорема 4. *Диффеоморфизм f структурно устойчив тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{LTSLmSP}(\gamma)$.*

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых научных журналах:

1. **Пилюгин С. Ю., Вольфсон Г. И., Тодоров Д. И. Динамические системы с липшицевыми обратными свойствами отслеживания // Вестник СПбГУ. 2011. Т. 3, № 1. С. 48–54.**

2. **Todorov D. Generalizations of analogs of theorems of Maizel and Pliss and their application in shadowing theory // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2013. T. 33, № 9. C. 4187–4205.**

3. **Todorov D. Lipschitz Inverse Shadowing For Nonsingular Flows // Dynamical Systems: An International Journal. 2014. T. 29. C. 40–55.**

Другие публикации автора:

4. Todorov D. Analogues of Theorems of Maizel And Pliss And Their Applications in The Shadowing Theory // 2011 Kyoto Workshop on NOLTA, Киото, Япония, 2011, С. 13, тезисы докладов.

5. Todorov D. Analogs of Theorems of Maizel And Pliss And Their Application in Shadowing Theory // Международная конференция “Dynamical Systems 100 years after Poincaré”, Хихон, Испания, 2012, С. 101, тезисы докладов.

6. Todorov D. Lipschitz inverse shadowing for nonsingular flows // Международная конференция “Динамика, бифуркации и странные аттракторы”, Нижний Новгород, Россия, 2013, С. 109, тезисы докладов.