

## ОТЗЫВ

официального оппонента,

доктора физ.-мат. наук Чхетиани Отто Гурамовича

на диссертацию Гулицкого Николая Михайловича

**«Ренормгрупповой анализ моделей турбулентного переноса и  
магнитной гидродинамики»,**

представленную на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук по специальности

01.04.02 — теоретическая физика.

Диссертация Гулицкого Н.М. посвящена проблеме аномального скейлинга в задачах турбулентного переноса пассивного векторного поля, в особенности для развитой магнитогидродинамической турбулентности. Исследован ряд моделей турбулентного переноса, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями. Основной метод исследования — теоретико-полевая ренормализационная группа и операторное разложение.

Теоретическое описание развитой турбулентности остается во многом открытой проблемой. Многочисленные феноменологические модели не являются, как правило, приближениями определенного порядка в систематической теории возмущений по малому параметру к каким-либо микроскопическим динамическим моделям. Поэтому большой интерес в 90-х — начале 2000-х годов был вызван моделью Крейчнана (называемой также моделью Обухова-Крейчнана или Казанцева-Крейчнана), в котором поле скорости имело простые заданные статистические свойства, но при этом поведение скалярного поля (температуры среды или плотности примеси), переносимого таким полем скорости, оказалось нетривиальным и, в то же время, доступным аналитическому исследованию. В частности, была построена систематическая теория возмущений для аномальных показателей, аналогичная известному эpsilon-разложению в теории фазовых переходов второго рода.

Дальнейшими задачами являются более глубокое изучение модели Крейчнана и её модификаций для различных стохастических систем, а также построение и изучение более реалистических моделей (учет ненулевого времени корреляции поля скоростей, анизотропии и сжимаемости и др.). Представленная диссертация как раз посвящена исследованиям в этом направлении.



Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, 3 приложений и списка литературы. Объем диссертации составляет 198 страниц.

Во введении отмечена актуальность работы, степень разработанности темы исследования, цели исследования, а также методология и методы исследования, научная и практическая ценность, научная новизна, приведены список школ и конференций, на которых состоялась апробация полученных результатов, список публикаций автора, краткое содержание работы, а также сформулированы четыре положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** содержит введение в проблематику задач переноса пассивного поля, а также описание ансамблей скорости и постановку задачи с помощью стохастических дифференциальных уравнений. Для описания движения проводящей среды привлекаются статистический ансамбль Казанцева-Крейчнана (поле скорости гауссово и имеет нулевое время корреляции), его обобщение на случай сильной анизотропии с одним выделенным направлением (ансамбль Авельянеды-Майда) и стохастическое уравнение Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости. Также рассматривается обобщенная модель для динамики пассивного векторного поля, в которой нелинейность имеет наиболее общий вид, совместимый с галилеевой симметрией (т. н. А-модель). Эта модель представляется перспективной в связи с задачами турбулентности в сложных средах

Несмотря на кажущуюся простоту, модели, описывающие перенос пассивного поля с помощью некоторого «синтетического» ансамбля скорости с заданной гауссовой статистикой, успешно воспроизводят многие из аномальных свойств реального турбулентного переноса массы либо тепла, наблюдаемые в эксперименте. Кроме того, численное моделирование показывает, что отклонения от предсказаний классической теории Колмогорова — Обухова для переноса пассивного скаляра проявляются даже сильнее, чем для самого переносящего его поля скорости. Поэтому проблема турбулентного переноса может рассматриваться также и как исходная точка при изучении развитой гидродинамической турбулентности в целом

**Вторая глава** посвящена переформулировке данных задач в виде некоторых квантовополевых моделей с заданными функционалами действия; для каждой из моделей устанавливается ренормируемость и вычисляется оператор собственной энергии, входящий в уравнение Дайсона.

В настоящее время математический аппарат квантовой теории поля, созданный первоначально для описания взаимодействия элементарных частиц, широко используется в статистической физике, в особенности в теории фазовых переходов 2 рода (теории критического поведения). Соответствие данных стохастических задач некоторым функционалам действия позволяет использовать диаграммную технику, а также применить к ним метод ренормализационной группы, позволяющий обосновать критическую масштабную инвариантность



(скейлинг) и вычислить универсальные характеристики критического поведения — критические показатели.

**В третьей главе** вычисляются РГ-функции — аномальные размерности (гамма-функции) и бета-функции полей и параметров. Установлено, что в некоторых интервалах значений параметров данные модели обладают ИК-притягивающей неподвижной точкой, определяющей ИК-асимптотику корреляционных функций.

По построению работы вторую и третью главу необходимо рассматривать вместе, т. к. в них устанавливается ренормируемость системы и наличие неподвижной точки, определяющей асимптотику больших масштабов. Достаточно удивительным выглядит тот факт, что для модели, в которой поле среды подчиняется стохастическому уравнению Навье-Стокса, в первом порядке разложения по константе связи  $g$  произошло взаимное сокращение всех необходимых вкладов. Обычно такая ситуация отвечает наличию в системе некоторой симметрии, которую в данном случае обнаружить явно не удастся. Поэтому в дальнейшем необходимо произвести вычисление следующих членов разложения и проверить, сохраняется ли данное свойство и в старших порядках.

**Четвертая глава** полностью посвящена ренормировке составных операторов в анизотропной модели Авельянеды-Майда. Установлено, что матрица ренормировки дается своим однопетлевым приближением точно; приведены выражения для матрицы аномальных размерностей и матрицы критических размерностей.

Процедура вычисления критических показателей для корреляционных функций, содержащих составные операторы, требует применения не только ренормализационной группы, но также и операторного разложения. Фактически данный метод позволяет применить ренормализационную группу дважды и установить асимптотическое поведение в инерционном интервале, содержащим как верхнюю, так и нижнюю границу.

Данная модель оказалась уникальной в том смысле, что расходящиеся части всех многопетлевых диаграмм тождественно равны нулю, т. е. ответ, полученный в первом (фактически вычисленном) порядке по константе связи  $g$  является точным. Кроме того, матрица аномальных размерностей оказалась нильпотентной, что является совершенно нетипичным результатом для задач такого типа. Как правило, данные матрицы являются треугольными, что приводит к их диагонализуемости и, как следствие, к аномальному скейлингу со степенной зависимостью от внешнего масштаба. Благодаря нильпотентности матрицы аномальных размерностей, критические показатели описываются матрицей, имеющей жорданову форму, в результате чего вместо степенной зависимости от внешнего масштаба асимптотика парной корреляционной функции составных операторов является логарифмической.



В работе приведено весьма нетривиальное «комбинаторное» доказательство данного факта, построенное на некоторой догадке о явном виде диагонализующей матрицы.

**В пятой главе** методы ренормгруппы и операторного разложения применяются к изучению асимптотики корреляционных функций в двух других моделях. Установлено наличие аномального скейлинга и вычислены соответствующие аномальные показатели в двухпетлевом (для модели, в которой поле скорости описывается статистическим ансамблем Казанцева-Крейчнана) и однопетлевом (для модели, в которой поле скорости подчиняется стохастическому уравнению Навье-Стокса) приближениях. Также проведено сравнение с точным решением в случае парной корреляционной функции, что подтверждает взаимную согласованность методов ренормализационной группы и операторного разложения с методом нулевых мод.

Особо ярким результатом данного раздела является двухпетлевой расчет (второй порядок разложения по константе связи  $g$ ), выполнить который удалось только для случая реального трехмерного пространства. В результате было установлено, что при включении в рассмотрение второго порядка иерархия анизотропных вкладов (подтверждающая гипотезу Колмогорова о локальном восстановлении симметрии, что хорошо наблюдаются в экспериментах) сохраняется, а аномальный скейлинг становится только сильнее.

Представленное исследование представляют большой интерес с теоретической точки зрения (применение методов квантовой теории поля к задачам статистической физики), а кроме того, его результаты должны стимулировать проведение экспериментов по более аккуратному измерению критических показателей.

**К недостаткам диссертации** следует отнести следующие.

Данное в работе доказательство нильпотентности матриц смешивания в  $A$ -модели, являясь с математической точки зрения достаточным, не объясняет физические причины столь неординарного явления и не указывает на какие-либо скрытые симметрии, по-видимому содержащиеся еще в исходной (стохастической) постановке задачи.

К сожалению, в работе слабо обсуждается сравнение полученных результатов с экспериментом при том что сама постановка проблемы аномальных скейлингов во многом возникает из практических потребностей и результатов данных обработки реальных случайных полей. Это относится и к Введению, где только упоминается об аномальности без приведения каких либо показателей "нормальных" скейлингов для скаляра, скорости и магнитного поля. Немного странным выглядит обращение к классической монографии Монины, Яглома в самом конце списка цитирований. Хотелось бы знать на какой из 2-х томов?



Также стоило бы обсудить вопрос о достаточности уровня точности в современных экспериментальных исследованиях для того, чтобы отличить логарифмическое поведение от степенной аномалии. Хотелось бы видеть изложение («перевод») некоторых результатов диссертации на языке более понятном при их практическом применении при интерпретации реальных данных.

Не упоминаются возможности применения полученных результатов к другим стохастическим задачам, например к сдвиговым или вращательным турбулентным течениям. Во введении к диссертации и далее не упоминается ни единым словом турбулентность с нарушенной зеркальной симметрией, являющейся естественной средой для многих магнитогиродинамических систем и для которой также имеются результаты по аномальному скейлингу.

Стоило было бы рассмотреть случай конечного (ненулевого) времени корреляции для А-модели, хотя, это уже является предметом отдельного исследования.

Присутствуют немногочисленные опечатки. Есть повторные ссылки в списке литературы (например [41] и [69]).

Отмеченные недостатки не влияют на общую высокую положительную оценку работы.

Оценивая работу в целом, отметим следующее.

Диссертация выполнена на высоком научном уровне и является законченной научно-исследовательской работой, являющейся новым важным шагом в теоретических исследованиях развитой турбулентности. В диссертации решены важные научные задачи. Полученные результаты представляются достоверными и могут найти научно-практическое применение в исследованиях неравновесных плазменно-гидродинамических систем в геофизике и астрофизике, а также при разработке подсеточных моделей турбулентности. Содержание диссертации соответствует всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям.

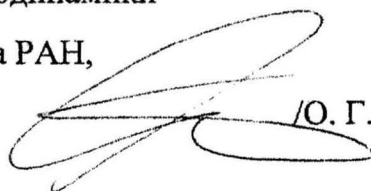
Работа хорошо оформлена. Следует особо отметить приложения, излагающие отдельные важные моменты расчетов и являющиеся прекрасным дополнением к основному материалу диссертации, также как и детальность в изложении хода исследования. Хотелось бы отметить четкость и ясность текста. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Опубликованные в ведущих научных журналах результаты Н.М.Гулицкого и, докладывавшиеся также на российских и международных конференциях, достаточно полно отражают материал, изложенный в диссертации.

Все сказанное позволяет заключить, что диссертационная работа «РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА И МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ» представляет собой законченную научно-исследовательскую работу и отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.04.02 – теоретическая физика, а ее автор, Гулицкий Николай Михайлович, безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Заведующий лабораторией геофизической гидродинамики

Института физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,

Доктор физико-математических наук


 /О. Г. Чхетиани/

Подпись О.Г. Чхетиани заверяю

Ученый секретарь ИФА им. А.М. Обухова РАН

Канд.геогр.наук



 /Л.Д.Краснокутская/  
«01» декабря 2014 г.

119017, Москва,  
Пыжевский пер. д.3

т.л. (495) 951-21-68

e-mail: ochkheti@gmail.com