Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»

На правах рукописи

Гулицкий Николай Михайлович

Ренормгрупповой анализ моделей турбулентного переноса и магнитной гидродинамики

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Санкт-Петербург – 2014

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Научный руководитель:	Антонов Николай Викторович, д. ф.-м. н., профессор
Официальные оппоненты:	Деркачев Сергей Эдуардович, д. ф.-м. н., Санкт-Петербургское Отделение Математического Института им. В. А. Стеклова РАН, вед. науч. сотр. Чхетиани Отто Гурамович, д. ф.-м. н., ст. науч. сотр., Институт физики атмосферы РАН им. А. М. Обухова, зав. лаб. геофизической гидродинамики
Ведущая организация:	Объединенный Институт Ядерных Исследований

Защита состоится « » декабря 2014 г. в часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.24 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199004, Санкт-Петербург, Средний пр., В.О., д. 41/43, ауд. 304

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького СПбГУ и на сайте
http://spbu.ru/science/disser/

Автореферат разослан «_____» ______________ 2014 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по адресу 198504, Санкт-Петербург, Ульяновская ул., д.1, корпус И, каб. 421.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Аксёнова Елена Валентиновна

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. На данный момент теоретическое описание развитой турбулентности и, в частности, аномального скейлинга в ней, в значительной степени остается нерешенной задачей. Эксперименты и численное моделирование показывают, что отклонения от предсказаний классической теории Колмогорова — Обухова для переноса пассивного скаляра проявляются сильнее, чем для самого переносящего его поля скорости. Кроме того, оказывается, что проблема переноса достаточно просто поддается теоретическому описанию: даже упрощенные модели, описывающие перенос каким–либо «синтетическим» ансамблем скорости с заданной гауссовой статистикой, воспроизводят многие из аномальных свойств реального турбулентного переноса массы или тепла, наблюдаемые в эксперименте. Поэтому проблема турбулентного переноса, сама по себе имеющая важное практическое значение, может рассматриваться как исходная точка при изучении развитой гидродинамической турбулентности в целом.

Наиболее значительные успехи на этом пути были достигнуты для модели Крейчнана с нулевым временем корреляции, в которой корреляционная функция поля скорости выбрана в виде $\langle vv\rangle \propto \delta(t-t')\cdot k^{-d-\xi}$, где k является волновым числом, d — размерностью пространства, а ξ — произвольным показателем, являющимся характеристикой вещества. Впервые бесконечный набор аномальных показателей был вычислен на основе микроскопической модели в рамках регулярной теории возмущений.

Степень разработанности темы исследования. Наибольшие успехи при изучении аномального скейлинга в статистических моделях турбулентного переноса были достигнуты с помощью применения методов ренормализационной группы (РГ) и операторного разложения (ОР). При таком подходе аномальный скейлинг является следствием существования составных полей («составных операторов» в терминологии квантовой теории поля) с *отрицательными* критическими размерностями. В течение последних лет методы РГ + ОР были применены к различным задачам турбулентного переноса пассивных векторных полей — как непосредственно к модели Крейчнана, так и к различным ее обобщениям — конечному времени корреляции, анизотропии, сжимаемости, нелинейности наиболее общего вида и т. д. Были получены аналитические выражения для членов первого и второго порядков ξ–разложения. В рамках метода нулевых мод были получены точные ответы для парной корреляционной функции магнитных полей.

Целью диссертационной работы является изучение аномального скейлинга в моделях магнитогидродинамической (МГД) турбулентности методами теоретико–полевой ренормгруппы и операторного разложения. Рассматривается приближение, в котором влиянием магнитного поля на динамику жидкости можно пренебречь («кинематическая модель динамо»), тогда проблему можно рассматривать как описание турбулентного переноса пассивного векторного (магнитного) поля в заданном турбулентном течении. Для описания движения проводящей среды привлекаются статистический ансамбль Казанцева–Крейчнана (поле скорости гауссово и имеет нулевое время корреляции), его обобщение на случай сильной анизотропии с одним выделенным направлением (ансамбль Авельянеды–Майда) и стохастическое уравнение Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости. Также рассматривается обобщенная модель для динамики пассивного векторного поля, в которой нелинейность имеет наиболее общий вид, совместимый с галилеевой симметрией (т. н. $\mathcal{A}$–модель). В качестве частных случаев она содержит кинематическую модель динамо и линеаризованное уравнение Навье–Стокса, а также позволяет рассматривать влияние нелокальных вкладов давления. Для общности две модели из трех рассматриваются в произвольной размерности пространства. Необходимо установить наличие либо отсутствие аномального скейлинга в асимптотике инерционного интервала парной корреляционной функции, а также вычислить соответствующие аномальные показатели.

В соответствии с целью исследования для каждой из трех моделей были поставлены следующие основные задачи:

(1) Построить квантовополевую формулировку данной модели и установить ее ренормируемость.

(2) Установить наличие ИК–притягивающей неподвижной точки, определяющей асимптотику инерционного интервала.

(3) Используя технику РГ и ОР, вычислить аномальные размерности составных операторов, определяющих асимптотическое поведение парной корреляционно функции.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации получены впервые, что подтверждается их публикацией в ведущих отечественных и международных журналах, и включают следующее:

(1) Для $\mathcal{A}$–модели в случае, когда поле скорости обладает анизотропией и описывается статистическим ансамблем Авельянеды–Майда (модель №1), обнаружено нарушение аномального скейлинга. Вместо степенной асимптотики инерционного интервала корреляционные функции обладают логарифмической зависимостью. Показано, что в силу тождественного равенства нулю старших членов асимптотика корреляционных функций полностью определяется первым членом ξ–разложения.

(2) Для модели МГД в случае, когда поле скорости описывается статистическим ансамблем Казанцева–Крейчнана (модель №2), установлен аномальный скейлинг корреляционных функций в инерционном интервале, проверено сохранение иерархии анизотропных вкладов при включении в рассмотрение второго члена ξ–разложения; вычислены аномальные показатели во втором порядке разложения по константе связи g.

(3) Для $\mathcal{A}$–модели с полем среды, описываемым с помощью уравнения Навье–Стокса (модель №3), аномальные показатели вычислены в первом порядке разложения по константе связи g; установлено наличие аномального скейлинга корреляционных функций и иерархия анизотропных вкладов.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при описании различных процессов в солнечной короне, ионосфере и межзвездном газе. Результаты работы должны стимулировать экспериментальные исследования по аккуратному измерению аномальных показателей в МГД турбулентности. Развитые методы могут быть применены к другим подобным стохастическим задачам, таким как турбулентный перенос тензорных полей, описание турбулентного переноса с помощью стохастического уравнения Навье–Стокса при наличии анизотропии и сжимаемости и т. п.

Методология и методы исследования. В работе активно используются метод ренормализационной группы, в частности для вычисления координат ИК–притягивающих неподвижных точек и асимптотического поведения корреляционных функций, и операторного разложения, позволяющий связать асимптотическое поведение парной корреляционной функции составных операторов с асимптотическим поведением самих составных операторов.

Достоверность результатов обеспечивается использованием мощного и хорошо развитого математического аппарата квантовой теории поля и сравнением с результатами, известными ранее для различных частных случаев.

Основные положения, выносимые на защиту:

(1) Для модели турбулентного переноса пассивного векторного поля при наличии крупномасштабной анизотропии в случае, когда поле скоростей обладает конечным временем корреляции и описывается стохастическим уравнением Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости (модель №3), установлено существование аномального скейлинга в инерционном интервале масштабов, а соответствующие показатели вычислены явно в главном (однопетлевом) приближении ренормгруппы, включая показатели анизотропных вкладов. Как и для случая скалярного поля, они демонстрируют иерархию, связанную со степенью анизотропности вклада: чем она выше, тем больше

показатель и тем быстрее вклад убывает в глубине инерционного интервала. Ведущий член асимптотики в инерционном интервале определяется изотропным вкладом, что согласуется с гипотезой Колмогорова о локально изотропной турбулентности.

(2) В кинематической модели турбулентного динамо при наличии крупномасштабной анизотропии для случая, когда поле скоростей описывается статистическим ансамблем Казанцева–Крейчнана (модель №2), аномальные показатели явно вычислены в двухпетлевом приближении ренормгруппы (второй порядок эпсилон–разложения). Показано, что в отличие от скалярного случая, учет двухпетлевого вклада приводит к усилению аномального скейлинга и иерархии анизотропных вкладов по сравнению с ведущим (однопетлевым) приближением.

(3) Для модели турбулентного переноса пассивного векторного поля в случае, когда поле скоростей описывается сильно анизотропным статистическим ансамблем Авельянеды–Майда с одним выделенным направлением (модель №1), показано, что соответствующие уравнения ренормализационной группы имеют инфракрасно–притягивающую неподвижную точку в широком интервале параметров, в том числе для частных случаев кинематической модели динамо, линеаризованного уравнения Навье–Стокса и т. н. линейной модели с давлением, то есть в модели реализуется скейлинговое поведение. Найдены точные значения соответствующих критических размерностей полей и основных параметров модели.

(4) Установлено, что в модели турбулентного переноса пассивного векторного поля в случае, когда поле скоростей описывается статистическим ансамблем Авельянеды–Майда (модель №1), аномальный скейлинг проявляется в логарифмической зависимости корреляционных функций от внешнего (интегрального) масштаба, в отличие от степенной зависимости для ансамбля Казанцева–Крейчнана и большинства его модификаций. Это является результатом особого случая смешивания в семействах составных операторов, при котором матрица смешивания оказывается нильпотентной.

Апробация результатов и публикации. Результаты и положения работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и школах:

1. Международная студенческая конференция «Физика и Прогресс — 2010» (Санкт-Петербург, Россия, 2010 г.).
`http://www.phys.spbu.ru/grisc/science-and-progress/archive.html`

2. Международная конференция «Математическое моделирование и вычислительная физика» ММСР — 2011 (Кошице, Словакия, 2011 г.).
`http://www.informatik.uni-trier.de/~ley/db/conf/mmcp/mmcp2011.html`

3. Международная студенческая конференция «Физика и Прогресс — 2013» (Санкт-Петербург, Россия, 2013 г.).
http://www.phys.spbu.ru/grisc/science-and-progress/archive.html

4. XLVIII Зимняя школа Петербургского института ядерной физики (Санкт-Петербург, Россия, 2014 г.).
http://dbserv.pnpi.spb.ru/WinterSchool/school_program.html

5. 52я Международная школа по субатомной физике (Эричи, Италия, 2014 г.).
http://www.ccsem.infn.it/issp2014/index.html

6. XI Международная конференция «Кварки, конфайнмент и спектр адронов» (Санкт-Петербург, Россия, 2014 г.).
http://onlinereg.ru/confXI/list.pdf

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 научные работы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и входящих в базы данных РИНЦ, Web of Science и Scopus [1–4], а также тезисы докладов 2 международных конференций [5, 6].

Личный вклад автора. Все основные результаты получены соискателем лично либо при его прямом участии в неразделимом соавторстве. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавтором, причем вклад диссертанта был определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, 3 приложений и библиографии. Общий объем диссертации 198 страниц, из них 180 страниц текста, включая 24 рисунка. Библиография включает 80 наименований на 11 страницах.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, описаны методология и методы исследования, степень разработанности темы исследования, а также показана практическая значимость полученных результатов и представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава представляет собой краткий обзор литературы, связанный с темой диссертационного исследования, а также содержит введение в проблематику задач данного типа: описание ансамблей скорости и постановку задачи с помощью стохастических дифференциальных уравнений.

Вторая глава посвящена переформулировке данных задач в виде некоторых квантовополевых моделей с заданными функционалами действия; для каждой из трех моделей устанавливается ренормируемость и вычисляется оператор собственной энергии, входящий в уравнение Дайсона.

Известно [7], что любая стохастическая задача вида

$$\partial_t \boldsymbol{\theta} = U(x, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{f}(x), \tag{1a}$$

$$\langle f_i(x) f_k(x') \rangle = D_\theta(x, x'), \tag{1b}$$

эквивалентна квантовополевой модели с удвоенным числом полей $\Phi = \{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta'}\}$ и функционалом действия

$$S(\Phi) = \theta'_i D_\theta \theta'_k / 2 + \theta'_i \left[-\partial_t \theta_i + U(x, \boldsymbol{\theta}) \right]. \tag{2}$$

Здесь $U(x, \boldsymbol{\theta})$ — заданный t–локальный функционал, не содержащий производных $\boldsymbol{\theta}$ по времени, $\mathbf{f}(x)$ — случайная внешняя сила, обладающая гауссовым распределением с нулевым средним и коррелятором (1b).

Это означает, что модели №1 — №3, заданные изначально с помощью некоторых стохастических дифференциальных уравнений, описываются функционалами действия, имеющими вид (2) и отличающимися конкретной формой $U(x, \boldsymbol{\theta})$, а также видом усреднения по полю скорости — для моделей №1 и №2, в которых поле скорости обладает гауссовой статистикой с заданным парным коррелятором, функционал (2) содержит член $v_i D_v^{-1} v_k / 2$ (где D_v — заданный парный коррелятор поля скорости), для модели №3, в которой поле среды подчиняется стохастическому уравнению Навье–Стокса, действие имеет вид

$$S(\Phi) = S_v(\mathbf{v}', \mathbf{v}) + \theta'_i D_\theta \theta'_k / 2 + \theta'_i \left[-\partial_t \theta_i + U(\boldsymbol{\theta}) \right], \tag{3}$$

где

$$S_v(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = v'_i D_v v'_k / 2 + v'_k \left[-\partial_t v_k + \widetilde{U}(\boldsymbol{v}) \right]. \tag{4}$$

Здесь D_v и D_θ — заданные парные корреляторы вида (1b).

На основе канонических размерностей 1–неприводимых функций Грина показано, что модели №1 и №2 имеют единственную расходящуюся функцию — коррелятор полей $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\theta'}$. Уравнение Дайсона для такой функции имеет вид (явное выражение приведено для модели №1)

$$\langle \theta'_\alpha \theta_\beta \rangle_{\text{1-непр}} \equiv \Gamma_2^{\alpha\beta} = -i\omega \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0 \mathbf{p}_\perp^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} + \nu_0 f_0 \cdot (\mathbf{pn})^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} - \Sigma_{\alpha\beta}, \tag{5}$$

где $\Sigma_{\alpha\beta}$ является оператором собственной энергии. Показано, что все многопетлевые диаграммы тождественно равны нулю из–за замкнутого цикла запаздывающих пропагаторов.

Модель №3 имеет расходящиеся функции трех типов — парный коррелятор полей $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\theta'}$, парный коррелятор полей $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v'}$, а также корреляционную функцию полей $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\theta'}$ и $\boldsymbol{v}$. В силу тождественного равенства нулю всех многопетлевых диаграмм для операторов собственной энергии $\Sigma_{\alpha\beta}$ и $\Sigma^v_{\alpha\beta}$, расходящиеся части данных операторов вычислены *точно*. Расходящиеся части диаграмм, входящих в петлевое разложение корреляционной функции $\langle\theta'_\alpha\theta_\gamma v_\beta\rangle_{\text{1-непр}}$, вычислены в первом порядке по константе связи g.

В **третьей главе** вычисляются РГ–функции — аномальные размерности γ и β–функции полей и параметров; показано, что в некоторых интервалах значений параметров данные модели обладают ИК–притягивающей неподвижной точкой, определяющей ИК–асимптотику корреляционных функций.

На основании анализа уравнения Дайсона находятся константы перенормировки Z полей и параметров модели. Поскольку базовое уравнение РГ является следствием действия оператора $\widetilde{\mathcal{D}}_\mu$ на правую и левую части уравнения $F = Z_F F_R$, где μ — ренормировочная масса, а $\widetilde{\mathcal{D}}_\mu$ обозначает оператор $\mu\partial_\mu$ при фиксированных затравочных параметрах e_0, уравнение РГ имеет вид

$$\left[\mathcal{D}_{RG} + \gamma_F\right] F_R = 0. \tag{6}$$

Здесь γ_F является аномальной размерностью F, а

$$\mathcal{D}_{RG} = \mathcal{D}_\mu + \beta\partial_g - \sum_e \gamma_e \mathcal{D}_e. \tag{7}$$

Здесь и далее $\mathcal{D}_x \equiv x\partial_x$ для любой переменной x, а РГ–функции, в конечном итоге определяющие искомую асимптотику, определяются как

$$\beta_g \equiv \widetilde{\mathcal{D}}_\mu g = g\cdot[-\xi - \gamma_g(g)], \tag{8a}$$

$$\gamma_F \equiv \widetilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F = \beta_g \partial_g \ln Z_F \quad \text{для всех} \quad Z_F. \tag{8b}$$

Для второго заряда u (присутствует в моделях №1 и №3)

$$\beta_u \equiv \widetilde{\mathcal{D}}_\mu u = -u\gamma_u(g,u). \tag{9}$$

Данные РГ–функции вычислены в первом порядке по константе связи g.

Главный член ИК–асимптотики функций Грина дается подстановкой $g = g^*$, $u = u^*$, где g^* и u^* определяются из условий на β–функцию:

$$\beta_g(g^*, u^*) = 0, \quad \beta_u(g^*, u^*) = 0, \tag{10}$$

при этом тип неподвижной точки определяется матрицей $\Omega_{ik} = \partial\beta_i/\partial g_k|_{g=g_*}$: для ИК–притягивающих неподвижных точек данная матрица положительно определена.

Из анализа уравнений (10), следует, что в некотором интервале параметров $\mathcal{A}$, d, ξ все три модели имеют неподвижную ИК–притягивающую точку. Установлено, что для модели №1 критические размерности полей $\Phi = \left\{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}', \mathbf{v}\right\}$ совпадают с их каноническими размерностями, в то время как для моделей №2 и №3 критические размерности полей содержат поправки по ξ.

Для модели №3 (поле скорости подчиняется стохастическому уравнению Навье–Стокса) оказывается, что все нетривиальные диаграммы, входящие в петлевое разложение корреляционной функции $\langle\theta'_\alpha\theta_\gamma v_\beta\rangle_{\text{1-непр}}$, взаимно сокращаются. Данный факт выглядит случайным и может быть всего лишь следствием простой структуры однопетлевых диаграмм. Поэтому константа перенормировки $Z_{\mathcal{A}}$ и аномальная размерность $\gamma_{\mathcal{A}}$ параметра $\mathcal{A}$, описывающего нелинейность наиболее общего вида, могут содержать члены порядка g^2 или выше.

Четвертая глава посвящена ренормировке составных операторов в модели №1 (ансамбль скорости Авельянеды–Майда). Показано, что матрица ренормировки дается своим однопетлевым приближением точно; приведены выражение для матрицы аномальных размерностей и матрицы критических размерностей. В частности доказано, что матрица аномальных размерностей является нильпотентной, следствием чего является невозможность диагонализации матрицы критических размерностей. В результате вместо степенной зависимости от внешнего масштаба асимптотика парной корреляционной функции является логарифмической.

При вычислении аномальных показателей ключевую роль играют критические размерности Δ_F составных операторов, построенных целиком из самих полей θ. В работе рассматриваются скалярные операторы

$$F_{N,p,m} = (\theta_i\theta_i)^p\ (n_s\theta_s)^{2m}, \quad N = 2(p+m), \tag{11}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, задающий направление анизотропии. Они ренормируются мультипликативно, а константы ренормировки $Z_{N,p,m} = Z_{N,p,m}(g,\,\xi,\,d)$ находятся из условия конечности 1–неприводимых функций

$$\Big\langle F^R_{N,p,m}(x)\,\theta(x_1)\dots\theta(x_n)\Big\rangle_{\text{1-непр}} =$$

$$= Z^{-1}_{N,p,m}\Big\langle F_{N,p,m}(x)\theta(x_1)\dots\theta(x_n)\Big\rangle_{\text{1-непр}} \equiv Z^{-1}_{N,p,m}\,\Gamma_{N,p,m}(x;x_1,\dots,x_n). \tag{12}$$

Оказывается, что вследствие сильно анизотропного ансамбля скорости Авельянеды–Майда, расходящиеся части всех многопетлевых диаграмм тождественно равны нулю. Таким образом, однопетлевое приближение дает *точный* ответ.

Показано, что в данной модели операторы смешиваются при ренормировке:

$$\Gamma_{N,p,m} \propto 2m(2m-1)\cdot F_{N,p+1,m-1}\ +\ (2p+8pm-2m(2m-1))\cdot F_{N,p,m}\ +$$
$$+\,(4p\,(p-1)-2p-8pm)\cdot F_{N,p-1,m+1}\ -\ 4p\,(p-1)\cdot F_{N,p-2,m+2}. \tag{13}$$

Таким образом, УФ–конечный оператор F^R имеет вид $F^R = F+$ контрчлены, где контрчлены являются линейной комбинацией самого оператора F и прочих операторов с тем же полным числом полей N, примешивающихся к F при ренормировке. Значения матричных элементов матрицы аномальных размерностей в неподвижной точке равны

$$\gamma^*_{N,\,p+1} = -\frac{\mathcal{A}^2\cdot f}{2(d-2+\mathcal{A})}\cdot 2m(2m-1)\cdot\xi; \tag{14a}$$

$$\gamma^*_{N,\,p} = -\frac{\mathcal{A}^2\cdot f}{2(d-2+\mathcal{A})}\cdot(2p+8pm-2m(2m-1))\cdot\xi; \tag{14b}$$

$$\gamma^*_{N,\,p-1} = -\frac{\mathcal{A}^2\cdot f}{2(d-2+\mathcal{A})}\cdot(4p\,(p-1)-2p-8pm)\cdot\xi; \tag{14c}$$

$$\gamma^*_{N,\,p-2} = -\frac{\mathcal{A}^2\cdot f}{2(d-2+\mathcal{A})}\cdot(-4p\,(p-1))\cdot\xi. \tag{14d}$$

Таким образом матрица критических размерностей оператора $F_{N,\,p}$ имеет вид

$$\Delta_{Np,\,Np'} = -2(p+m)\cdot\delta_{pp'} + \hat\gamma^*_{Np,\,Np'}, \tag{15}$$

где $-2(p+m)$ является его канонической размерностью, $\delta_{pp'}$ — дельта–символ Кронеккера, а $\hat\gamma^*_{Np,\,Np'}$ является матрицей аномальных размерностей в критической точке.

Для решения уравнений РГ необходимо диагонализовать матрицу $\Delta_{Np,\,Np'}$, т. о. критическими размерностями операторов $F\equiv\{F_i\}$ являются собственные числа данной матрицы.

Оказывается, что для *любого* N матрица аномальных размерностей (14) является нильпотентной, а матрица критических размерностей (15) является вырожденной, причем все ее собственные значения равны $-N$:

$$\lambda_1 = \ \dots\ = \lambda_{N/2+1} = -2(p+m) = -N. \tag{16}$$

Таким образом, матрица критических размерностей (15) не является диагонализуемой, а приводится к жордановой форме:

$$\widetilde\Delta_F = \begin{pmatrix} -2(p+m) & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -2(p+m) & 1 & & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & 1\\ 0 & \dots & & 0 & -2(p+m)\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Диагонализующая матрица U_F при этом является верхнетреугольной,

$$U_F = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & \dots & u_{2n-1} & 0 \\ u_{31} & \vdots & & \iddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \iddots & & & \vdots \\ u_{n-1\ 1} & u_{n-1\ 2} & & & & \vdots \\ u_{n1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

причем все элементы $u_{ik} \neq 0$ для любых i, k.

Решение уравнения РГ для парной корреляционной функции двух составных операторов

$$G_{ik} = \langle F_i \; F_k \rangle \tag{19}$$

имеет вид

$$G^R_{ik} \propto (\mu r)^{N_1+N_2} \cdot P_{(N_1+N_2)/2} \left[\ln \mu r\right] \cdot \Phi\left(Mr,\, mr,\, fr^{\xi}\right) \qquad \forall i, k, \tag{20}$$

где P_x является полиномом степени x, μ— ренормировочная масса, M и m — обратные величины к двум большим масштабам, характеризующим случайную силу (1b) и поле скорости, Φ — неизвестная функция трех безразмерных аргументов.

Представление (20), содержащее произвольную скейлинговую функцию $\Phi\left(Mr,\; mr,\; fr^{\xi}\right)$, описывает поведение корреляционных функций при $\mu r \gg 1$ и любом фиксированном значении Mr. Инерционный интервал $l \ll r \ll L$, где L — масштаб накачки энергии, а l — малый масштаб, на котором существенную роль начинает играть вязкость, соответствует дополнительному условию $Mr \ll 1$. По аналогии с теорией критического поведения, вид функции $\Phi\left(Mr\right)$ при $Mr \to 0$ изучается с помощью операторного разложения Вильсона.

В соответствии с ОР, одновременно́е произведение $F_1(x')F_2(x'')$ двух ренормированных операторов при $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')/2 = \text{const}$ и $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}' - \mathbf{x}'' \to 0$ представимо в виде

$$F_1(x')F_2(x'') = \sum_{\widetilde{F}} C_{\widetilde{F}}(\mathbf{r})\widetilde{F}(t, \mathbf{x}), \tag{21}$$

где коэффициентные функции $C_{\widetilde{F}}$ регулярны по M^2, а $\widetilde{F}$ — всевозможные ренормированные локальные операторы, разрешенные симметрией задачи.

Применяя ОР к выражению (20) получаем, что

$$G = \langle F_{N_1,\,p_1} \; F_{N_2,\,p_2} \rangle \propto$$

$$\propto \nu^{d^{\omega}_{G}} \cdot M^{-N_1-N_2} \cdot P_{(N_1+N_2)/2} \left[\ln \mu r\right] \cdot P_{(N_1+N_2)/2} \left[\ln Mr\right] \cdot \widetilde{\Phi}\left(fr^{\xi}\right). \tag{22}$$

При этом главный член в выражении (22) равен

$$G \propto \nu^{d_G^\omega} \cdot M^{-N_1-N_2} \cdot [\ln \mu r]^{(N_1+N_2)/2} \cdot [\ln Mr]^{(N_1+N_2)/2} \cdot \widetilde{\Phi}\left(fr^\xi\right), \tag{23}$$

где $\widetilde{\Phi}\left(fr^\xi\right)$ — неизвестная безразмерная скейлинговая функция, ограниченная в интервале $l \ll r \ll L$.

В **заключительном разделе** данной главы доказано, что матрица $\widetilde{\Delta}_F$ имеет вид (17) для *любой* размерности семейства операторов N. Приведено явное выражение для диагонализующей матрицы U (18): оказывается, что элементы $u_{i1} = 1$ для всех i; все остальные элементы являются некоторой дробью, знаменатель которой связан простыми соотношениями со значениями аномальных размерностей γ^*, см. (14), а в числителе стоят элементы треугольника Паскаля.

В **пятой главе** методы ренормгруппы и операторного разложения применяются к изучению асимптотики корреляционных функций в моделях №2 (ансамбль скорости Казанцева–Крейчнана) и №3 (скорость среды описывается с помощью стохастического уравнения Навье–Стокса). Установлено наличие аномального скейлинга и вычислены соответствующие аномальные показатели в двухпетлевом (для модели №2) и однопетлевом (для модели №3) приближениях.

Для моделей №2 и №3 тензорные составные операторы, построенные целиком из полей θ, имеют вид

$$F_{N,l} = \theta_{i_1}(x) \cdots \theta_{i_l}(x) \, (\theta_i(x)\theta_i(x))^p, \tag{24}$$

где $l \leq N$ является числом свободных векторных индексов, а $N = l + 2p$ — полным числом полей, входящих в данный оператор.

Объектами изучения являются одновременные парные корреляционные функции операторов (24). Решение уравнения РГ вместе с ОР дают искомую асимптотику инерционного интервала в виде

$$\langle F_{N,l}(t, \mathbf{x}) F_{K,j}(t, \mathbf{x}') \rangle \propto (\mu r)^{-\Delta_{N,l} - \Delta_{K,j}} \cdot (Mr)^{\Delta_{N+K,x}}, \tag{25}$$

где $\Delta_{N+K,x}$ — критическая размерность оператора $F_{N+K,x}$, обладающего минимальной размерностью и дающего максимальный вклад в ОР.

Поскольку для данных моделей $\Delta_\theta = -1 + O(\xi)$, критическая размерность оператора $F_{N,l}$ равна

$$\Delta_{N,l} = N(-1 + O(\xi)) + \gamma^*_{F_{N,l}}. \tag{26}$$

Для модели №2 аномальные размерности $\gamma^*_{F_{N,l}}$ вычислены во втором порядке ξ–разложения. В наиболее интересном с физической точки зрения случае трехмерного пространства ответ имеет вид

$$\gamma^*_{F_{N,l}} = \Delta^{(1)}_{N,l} \cdot \xi + \Delta^{(2)}_{N,l} \cdot \xi^2, \tag{27}$$

где

$$\Delta^{(1)}_{N,l} = -N(N+3)/10 + l(l+1)/5, \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{(2)}_{N,l} = &-\frac{2N(N-2)}{125} - \frac{N(N+3)}{30} + \frac{22\,l(l+1)}{375} - \\ &-\frac{3(N-2)}{175}\left(-\sqrt{3}\pi + \frac{82}{15}\right)\Big[2N(N-4) + 3l(l+1)\Big] - \\ &-\frac{19(N-2)}{350}\left(-\sqrt{3}\pi + \frac{1568}{285}\right)\Big[N(N+3) - 2l(l+1)\Big].\end{aligned} \tag{29}$$

Из выражения (28) для $\Delta^{(1)}_{N,l}$ — первого порядка по ξ — следует, что аномальные размерности $\gamma^*_{F_{N,l}}$ (27) удовлетворяют условию иерархии $\Delta_{N,l} > \Delta_{N,l'}$ при $l > l'$, которое удобно записать в виде неравенства $\partial\Delta_{N,l}/\partial l > 0$.

Данный факт означает, что в присутствии крупномасштабной анизотропии ведущий вклад в асимптотику корреляционных функций в инерционном интервале $Mr \to 0$ дает изотропная «сфера» с $l = 0$, что является подтверждением гипотезы Колмогорова о локальном восстановлении изотропии и наблюдается как в настоящих экспериментах с турбулентностью в жидкости, так и в модели пассивного скалярного поля.

Из (29) следует, что член $O\left(\xi^2\right)$ в разложении (27) также удовлетворяет этому неравенству:

$$\partial\Delta^{(2)}_{N,l}/\partial l \simeq (2\,l+1)(0.0053\,N + 0.0482) > 0. \tag{30}$$

Это означает, что при включении в расчет второго члена разложения по ξ иерархия анизотропных вкладов не только сохраняется, но и усиливается.

Проведено сравнение с точным решением в случае парной корреляционной функции (см. [8]), что подтверждает взаимную согласованность методов РГ + ОР и метода нулевых мод.

Для модели №3 аномальные размерности $\gamma^*_{F_{N,l}}$ вычислены в первом порядке ξ–разложения:

$$\gamma^*_{N,l} = \frac{\mathcal{A}^2}{u^*(u^*+1)}\,\frac{Q_{N,l}}{3d\,(d-1)} \cdot \xi + O\left(\xi^2\right), \tag{31}$$

где

$$Q_{N,l} = -(d-1)(N-l)(d+N+l) + 2l(l-1), \tag{32}$$

а неподвижная точка u^* является решением некоторого кубического уравнения.

Если функция $\beta_{\mathcal{A}}$ тождественно равна нулю, то $u_* = u_*(\mathcal{A})$, и в выражении (31) сохраняется зависимость от свободного параметра $\mathcal{A}$. Если же $\beta_{\mathcal{A}}$ содержит вклады старших порядков по g, то в уравнение (31) необходимо подставлять весь набор неподвижных точек $\{g^*, u^*, \mathcal{A}^*\}$.

При $\mathcal{A} \neq 0$ амплитуда $\mathcal{A}^2/u^*(u^* + 1)$ в (31) является положительной для любой физической неподвижной точки. Таким образом, для наиболее важного случая скалярного оператора с $l = 0$ аномальная размерность $\gamma_{N,l}$ является отрицательной, и при фиксированном N монотонно возрастает с ростом l. При $\mathcal{A} = 0$ операторы $F_{N,l}$ являются УФ–конечными и не требуют ренормировки.

Из соотношения (31) следует, что также как и в модели №2, критические размерности удовлетворяют условию иерархии $\Delta_{N,l} > \Delta_{N,l'}$ при $l > l'$.

В **Заключении** диссертации представлены основные результаты и выводы, а также благодарности и список использованной литературы.

В **приложениях к Главе 1** рассматриваются следствия галилеевой инвариантности, вывод модели магнитной гидродинамики Казанцева–Крейчнана и согласование динамики с условием поперечности полей.

В **приложениях к Главе 2** рассматривается доопределение Θ–функции при совпадающих аргументах, доказана невозможность существования двух пространственных масштабов в модели №1, а также приводится вычисление канонических размерностей в модели №3.

В **приложениях к Главе 3** рассматриваются выводы и основные следствия теории ренормировки — вид оператора $\mathcal{D}_{RG}$, связь констант ренормировки Z, β– и γ–функций, а также инвариантный заряд и ИК–притягивающая неподвижная точка.

Благодарности

Автор диссертации благодарит Антонова Николая Викторовича за научное руководство, терпение и неоценимую помощь в ходе выполнения настоящей работы.

Автор выражает благодарность Аджемяну Лорану Цолаковичу, а также благодарит преподавателей и сотрудников кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц Санкт–Петербургского Государственного Университета и преподавателей школы №292 г. Санкт–Петербурга, в особенности Дворсона Александра Наумовича, за воспитание любви и интереса к физике в целом и теоретической физике в частности. Кроме того, автор благодарит своих родителей и друзей за участие и моральную поддержку.

Список публикаций по теме диссертации из перечня ВАК

1. N.V. Antonov, N.M. Gulitskiy. Two–Loop Calculation of the Anomalous Exponents in the Kazantsev–Kraichnan Model of Magnetic Hydrodinamics // Lecture Notes in Comp. Science Vol. 7125, p. 128–135, 2012.

2. N.V. Antonov, N.M. Gulitskiy. Anomalous scaling and large-scale anisotropy in magnetohydrodynamic turbulence: Two–loop renormalization-group analysis of the Kazantsev-Kraichnan kinematic model // Phys. Rev. E Vol. 85, 065301(R), 2012;
Erratum, Phys. Rev. E Vol. 87, 039902, 2013.

3. Н.В. Антонов, Н.М. Гулицкий. Аномальный скейлинг в статистических моделях переноса пассивного векторного поля // ТМФ Т. 176. №1, с. 22–34, 2013.

4. Н.В. Антонов, Н.М. Гулицкий. Нарушение аномального скейлинга в модели переноса пассивного векторного поля сдвиговым течением // Вестник СПбГУ, Сер. 4 Т. 1 (59) Вып. 3, с. 299–317, 2014.

Список публикаций в других изданиях

5. Н.В. Антонов, Н.М. Гулицкий. Calculation of the anomalous exponents in the Kraichnan's model of magnetofluid dynamics: two–loop approximation // Тезисы международной студенческой конференции «Физика и Прогресс — 2010»

6. Н.В. Антонов, Н.М. Гулицкий. Renormalization group analysis of the inertial-range behaviour of a passive vector field in a random shear flow // Тезисы международной студенческой конференции «Физика и Прогресс — 2013».

Цитируемая литература

7. А.Н. Васильев. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике // СПб.: ПИЯФ, 1998.

8. N.V. Antonov, A. Lanotte and A. Mazzino. Persistence of small–scale anisotropies and anomalous scaling in a model of magnetohydrodynamics turbulence // Phys. Rev. E Vol. 61, 6586, 2000.