Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»

На правах рукописи

Капустин Александр Сергеевич

Влияние турбулентного перемешивания на критическое поведение в присутствии сжимаемости

01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Санкт-Петербург – 2014

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Научный руководитель:	Антонов Николай Викторович, д. ф.-м. н., профессор
Официальные оппоненты:	Деркачев Сергей Эдуардович, д. ф.-м. н., Санкт-Петербургское Отделение Математического Института им. В. А. Стеклова РАН, вед. науч. сотр. Прудников Павел Владимирович, д. ф.-м. н., профессор, Омский Государственный Университет им. Ф. М. Достоевского, профессор
Ведущая организация:	Объединенный Институт Ядерных Исследований

Защита состоится « » декабря 2014 г. в часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.24 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199004, Санкт-Петербург, Средний пр., В.О., д. 41/43, ауд. 304

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького СПбГУ и на сайте
http://spbu.ru/science/disser/

Автореферат разослан «____» ____________ 2014 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по адресу 198504, Санкт-Петербург, Ульяновская ул., д.1, корпус И, каб. 421.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Аксёнова Елена Валентиновна

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Многочисленные системы весьма разнообразной физической природы демонстрируют интересное сингулярное поведение в окрестности своих критических точек. Их термодинамические и корреляционные функции приобретают автомодельную (скейлинговую) форму с универсальными критическими размерностями: последние зависят лишь от немногих глобальных характеристик системы (таких как симметрия или размерность пространства). Количественное описание критического поведения дается теоретико-полевой ренормализационной группой (РГ). В РГ-подходе возможные типы критического поведения (классы универсальности) связываются с инфракрасно (ИК-) притягивающими неподвижными точками ренормируемых моделей теории поля. Наиболее типичные равновесные фазовые переходы принадлежат классу универсальности $O(n)$ - симметричной модели Φ^4 для n-компонентного скалярного параметра порядка. Универсальные характеристики критического поведения зависят лишь от n, размерности пространства d и могут вычисляться в рамках различных систематических схем теории возмущений, в частности, в виде разложений по $\varepsilon = 4 - d$.

Динамическое критическое поведение (зависимость корреляционных функций от времени или характерного времени корреляции от температуры) даже равновесных моделей гораздо более многообразно и менее изучено. Одной статической модели Φ^4 в динамике отвечает целый ряд моделей, обозначаемых как модели $A, B, \dots J$.

В течение последних десятилетий постоянное внимание привлекали процессы распространения и соответствующие неравновесные фазовые переходы. Процессы распространения встречаются в физических, химических, биологических и экологических системах: автокаталитические реакции, протекание в пористых средах, эпидемические заболевания и т.д.

Переходы между флуктуационными (активными) и абсорбционными (неактивными) фазами, в которых все флуктуации полностью прекращаются, особенно интересны как примеры неравновесного критического поведения.

Давно было осознано, что критическое поведение реальных систем в высшей степени чувствительно ко внешним возмущениям, гравитации, влиянию примесей и турбулентному перемешиванию. Более того, некоторые возмущения (случайно распределенные примеси или турбулентное перемешивание) могут производить совершенно новые типы критического поведения с богатыми и довольно экзотическими свойствами.

Эти вопросы становятся еще более важными для неравновесных фазовых переходов, поскольку идеальные условия «чистого» стационарного критического состояния едва ли могут быть достигнуты в реальных химических или биологических системах, а влияние различных возмущений никогда не может быть исключено полностью. В частности, внутренние эффекты турбулентности не могут быть исключены для химических каталитических реакций или лесных пожаров. Также можно предположить, что атмосферная турбулентность может играть важную роль в распространении инфекционных заболеваний летающими насекомыми или птицами.

Таким образом, изучение динамического критического поведения равновесных и неравновесных систем и влияния на них турбулентного поведения является сложной и актуальной задачей, а наиболее подходящим методом исследования представляется теоретико-полевая ренормгруппа и эпсилон-разложение.

Степень разработанности темы исследования и научная новизна. Основные успехи при изучении критического поведения систем с турбулентным переносом были достигнуты с помощью применения методов ренормализационной группы (РГ), см. [1–4]. В этих работах методы РГ были применены к изучению влияния турбулентного перемешивания на критическое поведение равновесных и неравновесных систем. В качестве моделей для описания поля скорости выбирались хорошо известное уравнение Навье-Стокса, модель Обухова-Крейчнана и её обобщения на случай присутствия сжимаемости и конечное время корреляции. Были обнаружены новые скейлинговые режимы, определены области устойчивости неподвижных точек, получены выражения для критических размерностей в одно-петлевом приближении. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены впервые, что подтверждается их публикацией в ведущих отечественных и международных журналах.

Цели и задачи диссертационной работы: Целью работы является изучение влияния турбулентного движения среды на критическое поведение ряда равновесных и неравновесных физических систем. В качестве моделей критического поведения выбраны наиболее характерные представители: релаксационная модель равновесной критической динамики несохраняющегося скалярного параметра порядка (модель A), ее обобщение на случай q-позиционной модели Поттса и стохастическая модель неравновесного фазового перехода между флуктуационным и абсорбционным состояниями в реакционно-диффузионной системе (процесс или модель Грибова). Для описания турбулентного поля скорости привлекались статистический ансамбль Казанцева-Крейчнана (поле скорости Гауссово и имеет нулевое время корреляции), его обобщение на случаи наличия сжимаемости и конечного времени корреляции, а также стохастическое уравнение Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости.

Теоретическая и практическая значимость. Практическая ценность диссертации определяется возможными приложениями полученных результатов к описанию различных равновесных и неравновесных околокритических систем: автокаталитических химических реакций, бинарных смесей и др. Результаты работы должны стимулировать экспериментальные исследования по выявлению новых типов критического поведения и измерению соответствующих критических размерностей. Развитые методы могут быть применены к другим подобным задачам, таким как рост границы раздела фаз, случайные блуждания и длинные полимеры в движущихся средах и др.

Методология и методы исследования. В работе активно используются методы теоретико-полевой ренормализационной группы, в частности для нахождения координат возможных ИК-притягивающих неподвижных точек, определения областей их устойчивости и вычисления критических размерностей величин в возможных скейлинговых режимах.

Положения, выносимые на защиту:

1. Установлено существование, наряду с уже известными классами универсальности, нового типа критического поведения для модели неравновесной реакционно-диффузионной системы с турбулентным переносом, где поле скорости моделируется статистическим ансамблем Казанцева-Крейчнана. Определена область его устойчивости (область притяжения соответствующей неподвижной точки уравнений ренормгруппы) в пространстве параметров модели. В главном порядке обобщенного (двойного) эпсилон-разложения вычислены критические размерности всех полей и времени. Получена зависимость границ областей устойчивости и размерностей от параметра, характеризующего степень сжимаемости жидкости. Получено обобщение этих результатов на случай конечного времени корреляции поля скорости.

2. Для модели равновесного динамического критического поведения скалярного параметра порядка с турбулентным перемешиванием, моделируемым ансамблем Казанцева-Крейчнана, установлено существование нового, существенно неравновесного класса универсальности. В ведущем порядке эпсилон-разложения найдена область его устойчивости и вычислены основные критические размерности. Получены их зависимости от степени сжимаемости жидкости.

3. Для модели критического поведения неравновесной реакционно-диффузионной системы в случае, когда поле скорости описывается стохастическим уравнением Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости, установлено существование нового класса универсальности и в ведущем порядке эпсилон-разложения найдены область его устойчивости, а также основные критические размерности.

4. Для возникающего нового неравновесного класса универсальности в

главном порядке эпсилон-разложения в модели равновесной критической динамики скалярного параметра порядка с турбулентным переносом, моделируемым стохастическим уравнением Навье-Стокса, найдена область устойчивости, вычислены критические размерности полей и времени.

5. Обнаружен новый неравновесный класс универсальности и вычислены соответствующие критические размерности для равновесной релаксационной критической динамики векторного параметра порядка системы, относящейся к классу универсальности q-позиционной модели Ашкина-Теллера-Поттса, с турбулентным переносом. Получена сложная картина областей притяжения неподвижных точек и их эволюция с изменением параметров модели, таких как размерность пространства, степень сжимаемости жидкости и число компонент параметра порядка. Показано существование явления кроссовера (потеря и обретение устойчивости критическими режимами) при изменении этих параметров. В частности показано, что при некоторых значениях параметров притягивающими могут быть сразу две неподвижные точки, то есть при тех же условиях могут реализоваться различные типы критического поведения. В этом смысле критическое поведение не является универсальным.

Апробация результатов и публикации. По теме диссертации опубликовано 4 научные работы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и входящих в базы данных РИНЦ, Web of Science и Scopus [1–4]. Основные результаты работы были представлены на международных научных конференциях:

1. `hep.phys.spbu.ru/conf` Models in Quantum Field Theory II и III (СПб, 2008, 2010)

2. `theor.jinr.ru/~rg2008/` Renormalization Group and Related Topics in Quantum Field Theory (Дубна, 2008)

3. `www.phys.spbu.ru/grisc/science-and-progress/archive.html` Science and Progress (СПб, 2010)

4. http://www.saske.sk/Uef/Conferences/stm13/ Small Triangle Meeting on Theoretical Physics (Stara Lesna, 2013)

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором либо при его прямом участии в неразделимом соавторстве.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения и списка литературы из 40 наименований. Работа изложена на 98 страницах и содержит 11 рисунков и 8 таблиц.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В **первой** главе обсуждаются модели критического поведения: процесс Грибова, модели A и Поттса. Приводятся их стохастические дифференциальные уравнения для параметра порядка ψ. Данные задачи можно переформулировать в виде теоретико-полевых моделей с заданными функционалами действия:

$$\mathcal{S}(\psi,\psi^\dagger) = \psi^\dagger\left(-\partial_t + \lambda_0\partial^2 - \lambda_0\tau_0\right)\psi + \lambda_0(\psi^\dagger)^2 - u_0\psi^\dagger\psi^3/3! \tag{1}$$

для модели A,

$$\mathcal{S}(\psi,\psi^\dagger) = \psi^\dagger(-\partial_t + \lambda_0\partial^2 - \lambda_0\tau_0)\psi + \frac{g_0\lambda_0}{2}\left\{(\psi^\dagger)^2\psi - \psi^\dagger\psi^2\right\} \tag{2}$$

для процесса Грибова,

$$\mathcal{S}(\psi,\psi^\dagger) = \psi^\dagger_a\left(-\partial_t + \lambda_0\partial^2 - \lambda_0\tau_0\right)\psi_a + \lambda_0\psi^\dagger_a\psi^\dagger_a - \frac{g_0\lambda_0}{2}R_{abc}\psi^\dagger_a\psi_b\psi_c, \tag{3}$$

для модели Поттса. Здесь R_{abc} - неприводимый инвариант группы симметрии $n-$мерного гипертетраэдра, тензор третьего ранга, который без ограничения общности можно считать симметричным, $\psi^{\dagger} = \psi^{\dagger}(t, \mathbf{x})$ - некоторое вспомогательное "поле отклика", $\tau_0 \propto (T - T_c)$ - отклонение температуры или ее аналога от критического значения, $g_0 > 0, u_0 > 0$- константы связи, $\lambda_0 > 0$- кинематический коэффициент. В приведенных формулах подразумевается интегрирование по аргументам полей и суммирование по индексам. Далее в главе обсуждаются симметрии моделей, приводятся правила Фейнмана.

Во **второй** главе для моделирования турбулентного перемешивания мы использовали известное уравнение Навье-Стокса со случайной силой, которая задается своим коррелятором в импульсно-временном представлении $\propto (t-t^{'})p^{4-d-y}$. В данной главе исследуется влияние турбулентного перемешивания на модели A и Грибова. Обсуждается процесс добавления поля скорости в исходные модели, приводятся функционалы действия для полных задач. После процедуры ренормировки приводятся одно-петлевые ответы для констант ренормировки и РГ-функций. Представляются ответы для координат неподвижных точек и обсуждаются области их устойчивости. Приводятся выражения критических размерностей для всех режимов.

Было показано, что в зависимости от соотношения между пространственной размерностью d и показателем y, обе модели демонстрируют различные критические режимы, связанные с ИК притягивающими неподвижными точками уравнения РГ. Для обеих моделей наиболее интересная неподвижная точка соответствует новому типу критического поведения, в котором важна как нелинейность, так и турбулентное перемешивание, а критические размерности зависят от двух параметров d и y. Из анализа размерностей можно было предположить, что новый нетривиальный режим должен проявляться при положительных y и $\varepsilon = 4-d$, однако тщательный РГ-анализ показывает, что области ИК устойчивости фактически гораздо уже: для процесса Грибова мы получили сектор $\varepsilon/4 < y < \varepsilon 2/3$, а для модели A - $0 < y < 3\varepsilon/2$. Этот эффект приводит к интересным физическим предсказаниям: при наиболее реалистичных значениях пространственной размерности $d = 2$ или 3 и Колмогоровского показателя $y = 4$ для развитой турбулентности мы попадаем в область устойчивости скейлингового режима, где имеет значение только турбулентный перенос. В случае процесса Грибова, например, это означает что распространение агента полностью определяется турбулентным переносом. Важно заметить, что эти результаты согласуются с теми, что были получены ранее, где для описания турбулентного переноса была использована модель Обухова-Крейчнана (несжимаемый случай).

В **третьей главе** мы рассмотрели другой способ описывать влияние турбулентного перемешивания на наши модели. Была предложена уже упомянутая выше модель Казанцева - Крейчнана с Гауссовым полем скорости и степенным спектром $\propto k^{-d-\xi}$, но с обобщением на случай сжимаемой жидкости. В данном случае поле скорости задается корреляционной функцией

$$\langle v_i(t,x)v_j(t',x')\rangle = \delta(t-t')D_{ij}(\mathbf{r}),\ \mathbf{r} = x - x' \tag{4}$$

где

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = D_0 \int\limits_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^{d+\xi}}\{P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k})\}exp(i\mathbf{kr}). \tag{5}$$

Здесь $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_ik_j/k^2$, $Q_{ij}(\mathbf{k}) = k_ik_j/k^2$ - поперечный и продольный проекторы, $k \equiv |\mathbf{k}|$ - волновое число, $D_0 > 0$ - множитель в амплитуде и $\alpha > 0$ - произвольный параметр. Случай $\alpha = 0$ соответствует несжимаемой жидкости ($\partial_i v_i = 0$). Показатель $0 < \xi < 2$ - произвольный параметр; “Колмогоровское” значение $\xi = 4/3$. Интеграл (5) обрезан снизу при $k = m$, где $m \equiv 1/L$- величина, обратная масштабу турбулентности L.

В этой главе к уже известным нам процессу Грибова и модели A мы добавляем в рассмотрение модель Поттса, которая имеет большое число разнообразных физических применений. Полные задачи формулируются в виде теоретико-полевых моделей, доказывается их мультипликативная ренормируемость, что позволяет нам пользоваться методом РГ для анализа их поведения. Было показано, что в зависимости от соотношения между пространственной размерностью d и показателем ξ все наши модели демонстрируют четыре различных вида критического поведения, связанных с четырьмя возможными неподвижными точками уравнения РГ.

Три неподвижные точки соответствуют известным режимам: (I) Гауссовой неподвижной точке; (II) критическому поведению, типичному для чистой модели без турбулентного переноса (то есть, модель A, Грибова или Поттса); (III) скалярному полю без самодействия (нелинейность параметра порядка в исходных динамических уравнениях является несущественной). Наиболее интересной четвертой точке соответствует новый тип критического поведения (IV), в котором важны как нелинейность, так и турбулентное перемешивание. Критические показатели зависят от d, ξ и параметра сжимаемости α. Были вычислены критические индексы и области устойчивости для всех режимов в одно-петлевом приближении, что соответствует главным членам двойного разложения по параметрам ξ и ε. Модель Поттса обладает более сложной картиной областей устойчивости неподвижных точек в сравнении с другими моделями. Это связано с тем, что в модели ответы зависят еще от одного параметра n - числа компонент ψ_a. Для наиболее интересного случая $n = 0$ (процесс протекания в движущихся средах) и при реалистичных значениях для несжимаемой жидкости $\xi = 4/3, d = 3$ мы попадаем в режим пассивного скалярного перемешивания (III). С ростом α граница устойчивости между (III) и (IV) областями начинает двигаться и, при достаточно большом α, мы попадаем в новый режим (IV). Таким образом, сжимаемость ведет к смене типа критического поведения между двумя классами универсальности. Для $n = 2$ (переход из нематического в изотропное состояние в жидких кристаллах) при маленьком α и вышеупомянутыми ε и ξ система попадает в (III) режим (турбулентный перенос). Когда α становится достаточно большим наши параметры не попадают ни в один из допустимых режимов. Следовательно, в этом случае рост сжимаемости разрушает критическое поведение.

Для случая процесса Грибова или модели A картина устойчивости режимов гораздо проще и похожа на картину из предыдущей главы. Было показано, что для обеих моделей, сжимаемость усиливает роль нелинейных членов в динамических уравнениях. В плоскости ε–ξ, область устойчивости (IV) режима становится шире при возрастании степени сжимаемости.

Проиллюстрируем эти общие утверждения на примере облака частиц в системе реакция-диффузия, распространяющегося в близкой к критической турбулентной среде. Среднеквадратичный радиус $R(t)$ облака частиц, связан с функцией отклика в координатно-временном представлении следующим образом:

$$R^2(t) = \int d\mathbf{x}\; x^2\, G(t,\mathbf{x}), \quad G(t,\mathbf{x}) = \langle \psi(t,\mathbf{x})\psi^\dagger(0,\mathbf{0})\rangle, \quad x = |\mathbf{x}|. \tag{6}$$

Для функции $G(t,\mathbf{x})$ скейлинговые соотношения дают следующие ИК-асимптотики:

$$G(t,\mathbf{x}) = x^{-\Delta_\psi - \Delta_{\psi^\dagger}}\, F\left(\frac{x}{t^{1/\Delta_\omega}}, \frac{\tau}{t^{\Delta_\tau/\Delta_\omega}}\right), \tag{7}$$

Где F - некоторая функция, а Δ - критические размерности полей и параметров. Подставляя (7) в (6) получаем скейлинговое выражение для радиуса:

$$R^2(t) = t^{(d+2-\Delta_\psi-\Delta_{\psi^\dagger})/\Delta_\omega}\, f\left(\frac{\tau}{t^{\Delta_\tau/\Delta_\omega}}\right), \tag{8}$$

где скейлинговая функция f связана с F из (7)

$$f(z) = \int d\mathbf{x}\, x^{2-\Delta_\psi-\Delta_{\psi^\dagger}}\, F(x,z).$$

Непосредственно в критической точке (предполагается, что функции f конечна при $\tau = 0$) получаем из (8) степенной закон для радиуса:

$$R^2(t) \propto t^{\Omega}, \quad \Omega \equiv (d + 2 - \Delta_\psi - \Delta_{\psi^\dagger})/\Delta_\omega; \tag{9}$$

Для Гауссовой неподвижной точки имеем обычный закон диффузии $R(t) \propto t^{1/2}$. Для режима (IV) был получен результат $R(t) \propto t^{1/(2-\xi)}$. Для Колмогоровского значения $\xi = 4/3$, $R(t) \propto t^{3/2}$ он находится в соответствии с “законом Ричардсона 4/3” $dR^2/dt \propto R^{4/3}$ для турбулентности. Для двух других неподвижных точек показатели задаются бесконечными рядами по ε (для точки III) и ε, ξ (для точки IV). В случае несжимаемой жидкости ($\alpha = 0$), наиболее реалистичные значения $d = 2$ или 3 и $\xi = 4/3$ лежат в области режима (III), так что распространение облака полностью определяется турбулентным переносом и описывается степенным законом (9) с точным показателем $\Omega^{(3)} = 2/(2-\xi)$. Когда α становится достаточно большим, физические величины d и ξ попадают в область устойчивости нового режима (IV), происходит изменение критического поведения. Новый показатель в (9) можно представить в виде

$$\Omega^{(4)} = \Omega^{(3)} + \delta\Omega \tag{10}$$

В модели Грибова подстановка однопетлевых выражений дает

$$\delta\Omega = \frac{(3+\alpha)\varepsilon - 6\xi}{3(5+2\alpha)(2-\xi)}. \tag{11}$$

Простой анализ выражения (11) показывает, что в области устойчивости (IV) режима, величина $\delta\Omega$ положительна и монотонно растет с α. Таким образом, распространение облака становится быстрее в сравнении с чистым турбулентным переносом, за счет комбинированного воздействия перемешивания и нелинейных членов, и ускоряется при росте степени сжимаемости.

В **четвертой** главе был рассмотрен еще один способ ввести турбулентное перемешивание на примере процесса Грибова. Данная модель турбулентного перемешивания обладает конечным временем корреляции и описывает сжимаемую жидкость. Как и в случае с моделью Казанцева-Обухова-Крейчнана она задается коррелятором поля скорости, которое имеет Гауссово распределение с нулевым средним:

$$\langle v_i(t,x) v_j(0,0)\rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [P^k_{ij} + \alpha Q^k_{ij}] D_v(t,k) \{e^{-i\omega t + k\cdot x}\}. \tag{12}$$

Положительный параметр $\alpha > 0$ задает отклонение модели от несжимаемого случая $\nabla \cdot v = 0$. В импульсно-частотном представлении D_v имеет вид:

$$D_v(\omega, k) = \frac{g_{10} u_{10} D_0^3 k^{4-d-y-\eta}}{\omega^2 + u_{10}^2 D_0^2 (k^{2-\eta})^2}, \tag{13}$$

где g_{10}- константа связи, а y, η - малые параметры разложения теории (аналогично ε в теории φ^4).

У данной модели есть два предела: в одном случае она переходит в уже известную нам модель Обухова-Крейчнана, а в другом - в модель "замороженного" поля скорости (коррелятор скорости не зависит от времени). Для мультипликативной ренормируемости в полный функционал действия необходимо вводить дополнительный член и новый заряд. В главе представлены выражения для координат неподвижных точек в предельных случаях модели скорости. Можно заметить, что для предельного случая $u_{10} = \infty$ результаты координат неподвижных точек и областей устойчивости совпадают с результатами в случае использования модели Обухова-Крейчнана.

В **заключении** сделаны выводы относительно результатов, полученных в работе, и их соответствия поставленным целям.

Заключение

В диссертации подробно исследовано влияние турбулентного перемешивания на три различных модели. Были рассмотрены различные способы описания поля скорости: уравнение Навье-Стокса со случайной силой, обобщение модели Обухова-Крейчнана на случай сжимаемой жидкости и модель сжимаемой жидкости с конечным временем корреляции. В работе представлены одно-петлевые результаты для координат неподвижных точек уравнения РГ, областей их устойчивости и выражения для критических размерностей.

Список публикаций по теме диссертации из перечня ВАК

1. Antonov N V, Iglovikov V I and Kapustin A S 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 135001

2. Antonov N V and Kapustin A S 2010 *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 405001

3. Antonov N V and Kapustin A S 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 505001

4. Н. В. Антонов, А. С. Капустин, А. В. Малышев ТМФ, 2011, 169:1, 124–136