

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*На правах рукописи*

Зюзин Денис Владимирович

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СПИНА В  
НАКОПИТЕЛЬНОМ КОЛЬЦЕ ПО  
ОБНАРУЖЕНИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО  
ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТА**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Специальность 05.13.01 — системный анализ, управление и обработка  
информации

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научные руководители

доктор физико-математических наук,  
профессор Сеничев Юрий Валерьевич

доктор физико-математических наук,  
профессор Андрианов Сергей Николаевич

Санкт-Петербург — 2014

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>1 Использование накопительного кольца для поиска ЭДМ</b>	<b>20</b>
1.1 Основные уравнения	20
1.2 Метод «замороженного спина» для поиска электрического дипольного момента	23
1.3 Деполяризация пучка в «магическом» кольце	27
1.4 Резонансный метод измерения ЭДМ	31
<b>2 Численное моделирование спин-орбитального движения</b>	<b>46</b>
2.1 Минимальная дифференциальная алгебра	46
2.2 Матричные отображения	55
2.3 Применение методов дифференциальной алгебры для постро- ения отображений	59
<b>3 Программный комплекс для моделирования динамики</b>	<b>73</b>
3.1 Программа моделирования COSY Infinity	73
3.2 Концепция виртуального ускорителя	76
3.3 Структура программного комплекса	79
3.4 Параллельное выполнение процессов	90
3.5 Обработка данных	94
<b>4 Результаты численного моделирования</b>	<b>97</b>
4.1 Результаты численного моделирования электростатического кольца	97
4.2 Структура с переменными дефлекторами	104

4.3 Результаты расчетов на суперкомпьютере . . . . .	106
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>110</b>
<b>Приложение А. Синтаксис языка для описания ускорителя . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>Приложение В. Интерфейс программного комплекса RSX . . . . .</b>	<b>130</b>

## Список иллюстраций

1	Демонстрация нарушения P- и T-симметрий при наличии ЭДМ (иллюстрация А. Кнехта (A. Knecht) [60]) . . . . .	9
2	Схема поляриметра [101] . . . . .	12
3	Схема ускорителя COSY [70] . . . . .	13
4	Детектор EDDA, установленный в COSY . . . . .	14
1.1	Рост горизонтальной компоненты спина в резонансном (изображено красным) и нерезонансном (изображено зеленым) случаях . . . . .	39
1.2	Зависимость максимальной амплитуды $a_{\max}$ горизонтальной проекции спина от относительной расстройки частот $\delta$ . . . . .	42
1.3	Горизонтальная проекция спина при магнитном ВЧ-поле (изображено зеленым) и при случае ВЧ-фильтра Вина (изображено красным) . . . . .	44
2.1	График функции Энге для квадрупольного HGQ . . . . .	66
2.2	Траектория движения частицы за 100000 оборотов с начальным отклонением $\delta_K = 10^{-3}$ в продольной фазовой плоскости $l-\delta_K$ . . . . .	71
3.1	Схема вычислительного эксперимента . . . . .	81
3.2	Структура комплекса RSX . . . . .	82
3.3	Схема рабочего модуля RSX . . . . .	88

3.4	Схема взаимодействия рабочих модулей . . . . .	93
4.1	Электростатический ускоритель с отношением бетатронных частот $\nu_x/\nu_y = 7,9/7,8$ . . . . .	98
4.2	Движение спина трех частиц с $\Delta K/K_0 = 0$ (красным), $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$ (синим) и $\Delta K/K_0 = -10^{-4}$ (зеленым) . . . . .	98
4.3	Движение спина частицы с отклонением $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$ . . . . .	99
4.4	Движение спина частицы с отклонением $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$ . . . . .	99
4.5	Синхротронные осцилляции для частицы с $x = 0$ (слева) и для частицы с $x = 3$ мм (справа) при $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$ . . . . .	100
4.6	Электростатический ускоритель с отношением бетатронных частот $\nu_x/\nu_y = 1,31/0,64$ . . . . .	100
4.7	Синхротронные осцилляции для частицы с начальным отклонением $x = 3$ мм и $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$ , 5000 оборотов . . . . .	101
4.8	Движение спина частиц с начальным смещением $x = 3$ мм, $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$ (красным) и $\Delta K/K_0 = -10^{-4}$ (зеленым) в накопительном кольце с дефлекторами $k_1 = 0,94$ , $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{0}, \mathbf{951}$ , $k_3 = 1,0$ , $k_4 = -1,0$ , $k_5 = 1,0$ . . . . .	102
4.9	Движение спина частиц с начальным смещением $x = 3$ мм, $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$ (красным) и $\Delta K/K_0 = -10^{-4}$ (зеленым) в накопительном кольце с дефлекторами $k_1 = 0,94$ , $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{0}, \mathbf{971}$ , $k_3 = 1,0$ , $k_4 = -1,0$ , $k_5 = 1,0$ . . . . .	102
4.10	Движение спина частиц с начальным смещением $x = 3$ мм, $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$ (красным) и $\Delta K/K_0 = -10^{-4}$ (зеленым) в накопительном кольце с дефлекторами $k_1 = 0,94$ , $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{0}, \mathbf{961}$ , $k_3 = 1,0$ , $k_4 = -1,0$ , $k_5 = 1,0$ . . . . .	103
4.11	Зависимость $S_x$ от начальных отклонений $x, y$ . . . . .	104

4.12	Проекция спина $S_x$ через $10^5$ оборотов в структуре с дефлекторами $k_1 = 0,94$ , $k_2 = -0,97 - 0,1$ (слева), $k_2 = -0,97 + 0,1$ (справа), $k_3 = 1,0$ , $k_4 = -1,0$ , $k_5 = 1,0$ . . . . .	105
4.13	Проекция спина $S_x$ частиц с начальным смещением $x = 3$ мм, $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$ (красным) и $\Delta K/K_0 = -10^{-4}$ (зеленым) в структуре с переменными дефлекторами $k_2 = 0,97 \pm 0,1$ . . .	105
4.14	Проекция спина $S_x$ в зависимости от начального $x$ через $10^9$ оборотов в структуре с дефлекторами $k_1 = 0,94$ , $k_2 = -0,974 \pm 0,1$ , $k_3 = 1,0$ , $k_4 = -1,0$ , $k_5 = 1,0$ , $\Delta p/p = 2 \cdot 10^{-4}$ (красным), $\Delta p/p = -2 \cdot 10^{-4}$ (синим) и $\Delta p/p = 0$ (зеленым) . . . . .	106
4.15	Распределение спина в пучке с начальным $\sigma_{\Delta K/K_0} = 10^{-4}$ после $10^8$ оборотов . . . . .	107
4.16	Распределение спина в пучке с начальным $\sigma_{\Delta K/K_0} = 10^{-3}$ после $10^8$ оборотов . . . . .	108
V.17	Графический интерфейс RSX . . . . .	132
V.18	Страница задания структуры ускорителя . . . . .	133
V.19	Пример анализа ФОДО-ячейки, приведенной в конце Приложения А . . . . .	134
V.20	Зависимость частот $\nu_x$ , $\nu_y$ от параметра Q_STRENGTH . . . . .	135
V.21	Задание начального распределения частиц в пучке . . . . .	136
V.22	Список выполненных задач . . . . .	137
V.23	Визуализация орбитального движения . . . . .	138
V.24	График осцилляций спина . . . . .	138

# Введение

Стандартная модель физики элементарных частиц (СМ), сформулированная в середине 1970 годов, успешно описывает известные элементарные частицы и их взаимодействие. Подтверждением истинности СМ явились открытия  $t$ -кварка в 1995 году [2, 3], тау-нейтрино в 2000 году [62], а также бозона Хиггса в 2012 году [26]. Но несмотря на успешное предсказание большого количества экспериментальных результатов, СМ не дает объяснения некоторым явлениям, таким как нарушение СР-симметрии. Симметрии являются фундаментальными понятиями в современной физике, в СМ рассматриваются три типа симметрий:

- С-симметрия — зарядовая (charge) симметрия — физические процессы происходят одинаково при изменении зарядов частиц на противоположные;
- Р-симметрия — симметрия относительно четности (parity) — инвариантность физических процессов относительно замены координат всех частиц на противоположные;
- Т-симметрия — симметрия по отношению к обращению времени (time) — инвариантность физических уравнений относительно замены времени  $t$  на  $-t$ .

В 1954 году Г. Людерс (G. Lüders) и В. Паули (W. Pauli) независимо друг от друга доказали СРТ-теорему: во всех процессах квантовой теории поля

сохраняется СРТ-симметрия (С-, Р- и Т-симметрии одновременно) [68, 80]. Следствием СРТ-теоремы является тот факт, что нарушение СР-симметрии влечет нарушение Т-симметрии и наоборот.

В 1964 году Дж. Кронин (J. Cronin) и В. Фитч (V. Fitch) обнаружили первое доказательство нарушения СР-симметрии в эксперименте по распаду каонов [29]: нейтральные каоны могут превращаться в свои античастицы и наоборот, но эти превращения происходят не с одинаковой вероятностью в обоих направлениях. Также нарушение СР-симметрии наблюдалось в экспериментах NA31 [48], NA48 [41] в ЦЕРН<sup>1</sup>, эксперименте BaBar [8] в SLAC<sup>2</sup>, эксперименте Belle [4] в КЕК<sup>3</sup>. В 2011 году на ЛНС<sup>4</sup> в эксперименте LHCb обнаружено нарушение СР-симметрии в с-кварках [1].

Одной из главных проблем современной физики является барионная асимметрия Вселенной [24]: преобладание вещества над антивеществом, что наблюдается в таких экспериментах, как COBE<sup>5</sup> [46] и WMAP<sup>6</sup> [52]. Космические детекторы антивещества PAMELA<sup>7</sup> и AMS<sup>8</sup> также не обнаружили значимого количества антивещества во Вселенной [81, 6]. Экспериментальное обнаружение нарушения СР-симметрии в эксперименте привело к идее, что это нарушение явилось одной из причин преобладания вещества над антивеществом, и в 1967 году А. Сахаров показал, что для бариогенезиса (первичного образования барионов) необходимо соблюдение

---

<sup>1</sup>CERN — Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire — Европейская организация по ядерным исследованиям, Женева, Швейцария

<sup>2</sup>SLAC National Accelerator Laboratory — Национальная ускорительная лаборатория SLAC, Стэнфорд, Калифорния, США

<sup>3</sup>КЕК — The High Energy Accelerator Research Organization — Организация по изучению высокоэнергетических ускорителей, Цукуба, Япония

<sup>4</sup>ЛНС — Large hadron collider — Большой адронный коллайдер, ЦЕРН

<sup>5</sup>COBE — Cosmic Background Explorer — эксперимент НАСА по изучению реликтового излучения

<sup>6</sup>WMAP — Wilkinson Microwave Anisotropy Probe — эксперимент НАСА по изучению реликтового излучения

<sup>7</sup>PAMELA — Payload for Antimatter Matter Exploration and Light-nuclei Astrophysics — Аппарат по исследованию антиматерии и астрофизики легких ядер

<sup>8</sup>AMS — Alpha Magnetic Spectrometer — Магнитный альфа-спектрометр — модуль Международной космической станции для поиска антиматерии



трех условий [89]:

- a) несохранение барионного числа<sup>9</sup>;
- b) нарушение CP-симметрии;
- c) нарушение теплового равновесия.

С начала 80-х годов проводится ряд экспериментов по поиску процессов, при которых нарушается барионное число, таких как распад протона (эксперименты Super-Kamiokande [77], IMB<sup>10</sup> [10]) и нейтронные осцилляции (эксперимент Super-Kamiokande [5] и эксперимент в ILL<sup>11</sup> [97]).

В 1974 году японские физики-теоретики М. Кобаяси (M. Kobayashi) и Т. Маскава (T. Maskawa) дополнили Стандартную модель, введя в рассмотрение СКМ-матрицу для описания смешивания кварков при слабом взаимодействии [61]. При помощи СКМ-матрицы в СМ также описывается нарушение CP-симметрии, но предсказанная барионная асимметрия оказывается на несколько порядков меньше, чем наблюдаемая в реальности [43]. Таким образом, в рамках Стандартной модели нельзя объяснить преобладание материи над антиматерией.

Для разрешения этого вопроса было построено множество теорий так называемой физики за пределами Стандартной модели (или Новой физики): мульти-Хиггс теория Вайнберга (Weinberg multi-Higgs) [109], теории левой-правой симметрии [75, 79], суперсимметричные теории [110, 34, 72], и др. Все эти теории способны устранить затруднения СМ, но ни одной из них до сих пор не найдено экспериментальных подтверждений.

Одним из возможных свидетельств нарушения CPT-инвариантности является существование электрического дипольного момента (ЭДМ) эле-

---

<sup>9</sup>барионное число — разница между количеством кварков ( $n_q$ ) и антикварков ( $n_{\bar{q}}$ ),  $B = (n_q - n_{\bar{q}})/3$

<sup>10</sup>IMB — Irvine-Michigan-Brookhaven — завершённый в 1991 г. эксперимент университета Калифорнии в Ирвайне, университета Мичигана и Брукхейвенской национальной лаборатории, США

<sup>11</sup>ILL — Institut Laue-Langevin — Институт Лауэ-Ланжевена, Гренобль, Франция

ментарных частиц. Любой объект, имеющий заряд, распределенный в объеме  $V$  с плотностью  $\rho(\mathbf{r})$ <sup>12</sup>, имеет ЭДМ:

$$\mathbf{d} = \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r},$$

где  $d^3\mathbf{r}$  — элемент объема  $V$ . В простом случае системы, состоящей из двух заряженных точек с зарядами  $q$  и  $-q$  (например, молекулы фторида водорода HF, или хлорида натрия NaCl), вектор ЭДМ имеет следующее выражение:

$$\mathbf{d} = q \cdot \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному.

Как известно, элементарные частицы обладают собственным магнитным моментом  $\boldsymbol{\mu}$ , который обусловлен существованием собственного механического момента — спина  $\mathbf{S}$ :

$$\boldsymbol{\mu} = g \cdot \mu_0 \cdot \mathbf{S},$$

где  $g$  — гиромагнитное соотношение, а  $\mu_0$  — магнетон Бора [54].

Существование ЭДМ элементарных частиц нарушает P-симметрию (инвариантность четности) и T-симметрию (инвариантность относительно обращения времени) [82].

На рис. 1 представлена иллюстрация этого процесса. Синей стрелкой обозначено «вращение» частицы, т. е. магнитный момент, который является

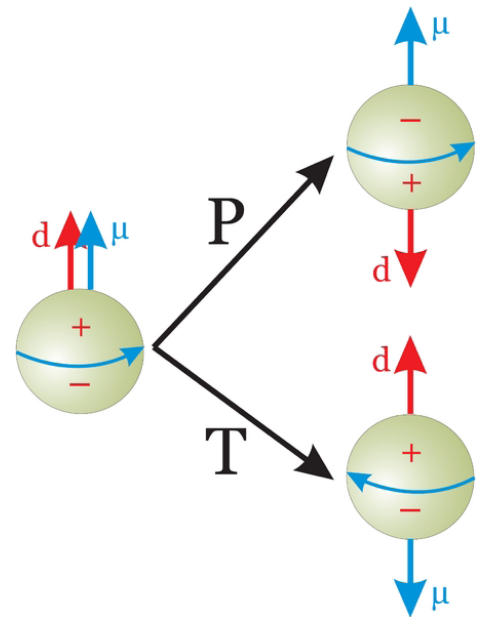


Рис. 1. Демонстрация нарушения P- и T-симметрий при наличии ЭДМ (иллюстрация А. Кнехта (A. Knecht) [60])

<sup>12</sup>здесь и далее векторные величины обозначены полужирным шрифтом

осью вращения и направлен соответственно спину. Знаками «+» и «-» обозначены положительный и отрицательный заряды, а вектор ЭДМ направлен от отрицательного заряда к положительному и обозначен красной стрелкой. После преобразования четности «вращение» (спин) частицы не изменяется, а вектор ЭДМ меняет свое направление, таким образом нарушается P-симметрия. При инверсии времени спин частицы (и магнитный момент  $\mu$ ) меняет направление на противоположное, но вектор ЭДМ направлен в ту же сторону, что и до преобразования, следовательно T-симметрия также нарушена. Из CPT-теоремы следует, что нарушение PT-симметрии влечет также нарушение CP-симметрии.

В 1957 г. был предложен способ для измерения ЭДМ нейтрона [100], а в настоящее время проводится множество экспериментов по измерению ЭДМ элементарных частиц. В качестве примеров можно привести эксперименты по измерению ЭДМ на ультрахолодных нейтронах, проводимые в ILL [9], FRM-II<sup>13</sup>[7], ПИЯФ<sup>14</sup>; эксперименты по измерению ЭДМ электрона в ICL<sup>15</sup>, используя молекулы YbF [103], в Гарварде, используя молекулы ThO [104], и другие. Планируются эксперименты по измерению ЭДМ мюона в J-PARC<sup>16</sup> [58] и Fermilab<sup>17</sup> [63], ЭДМ протона в BNL<sup>18</sup> [101], ЭДМ дейтрона в ИКР FZJ<sup>19</sup> [66].

Современный интерес к измерению ЭДМ обусловлен прежде всего тем, что СМ предсказывает крайне малые величины ЭДМ, например ЭДМ нейтрона  $|d_n| \sim 10^{-32} \div 10^{-31} e \cdot \text{см}$ , ЭДМ электрона  $|d_e| < 10^{-40} e \cdot \text{см}$ , ЭДМ

<sup>13</sup>FRM-II — Forschungsreaktor München II — Исследовательский реактор в Мюнхене, Германия

<sup>14</sup>ПИЯФ — Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова, Гатчина, Россия

<sup>15</sup>ICL — Imperial College London — Имперский колледж Лондона, Великобритания

<sup>16</sup>J-PARC — Japan Proton Accelerator Research Complex — исследовательский протонный ускорительный комплекс, Токай, Япония

<sup>17</sup>Fermilab — Национальная ускорительная лаборатория им. Энрико Ферми, Чикаго, Иллинойс, США

<sup>18</sup>BNL — Brookhaven National Laboratory — Брукхейвенская национальная лаборатория, Аптон, Нью-Йорк, США

<sup>19</sup>ИКР FZJ — Institut für Kernphysik Forschungszentrum Jülich — Институт ядерной физики исследовательского центра г. Юлих, Германия

мюона  $|d_\mu| < 10^{-38} e \cdot \text{см}$  [59]. В то же время, предложенные теории физики за пределами Стандартной модели предсказывают существование ЭДМ на порядки выше, чем СМ, например суперсимметричные теории оценивают ЭДМ нейтрона как  $|d_n| \sim 10^{-30} \div 10^{-26}$  [101]. Таким образом, измерение ЭДМ послужит подтверждением теорий Новой физики и, в конечном счете, даст ключ к разгадке тайны образования Вселенной. Несмотря на прилагаемые усилия, ЭДМ ни одной элементарной частицы до сих пор не был обнаружен, хотя точность проводимых экспериментов значительно улучшилась. На настоящее время верхние пределы ЭДМ для различных частиц измерены со следующей точностью: ЭДМ электрона  $|d_e| < 10^{-29} e \cdot \text{см}$  (с достоверностью 90%) [104], ЭДМ нейтрона  $|d_n| < 2.9 \cdot 10^{-26} e \cdot \text{см}$  (с достоверностью 90%) [9], ЭДМ мюона  $|d_\mu| < 1.8 \cdot 10^{-19} e \cdot \text{см}$  (с достоверностью 95%) [11], ЭДМ протона  $|d_p| < 5.4 \cdot 10^{-24} e \cdot \text{см}$  (без статистической оценки) [36].

Сложность измерения столь малых величин заключается в том числе и в необходимости накопления достаточного количества статистических данных, чтобы обеспечить приемлемый уровень достоверности. В 2004 году для измерения ЭДМ протона предложен метод, получивший название метода «замороженного спина» [42]. Он основан на том факте, что спин частицы с определенной («магической») энергией в кольце, состоящем только из электростатических элементов, изменяет свое значение («поворачивается») только за счет ЭДМ, взаимодействующего с электрическим полем. Для измерения ЭДМ протона предложено сконструировать электростатическое кольцо с радиусом  $\sim 40$  м и электрическим полем  $\sim 10$  МВ/м между пластинами, разделенными на  $\sim 3$  см. В кольцо инжектируется пучок с горизонтальной поляризацией, а при длительном удержании пучка протонов в кольце появляется вертикальная поляризация из-за ЭДМ, которую можно измерить при помощи поляриметра.

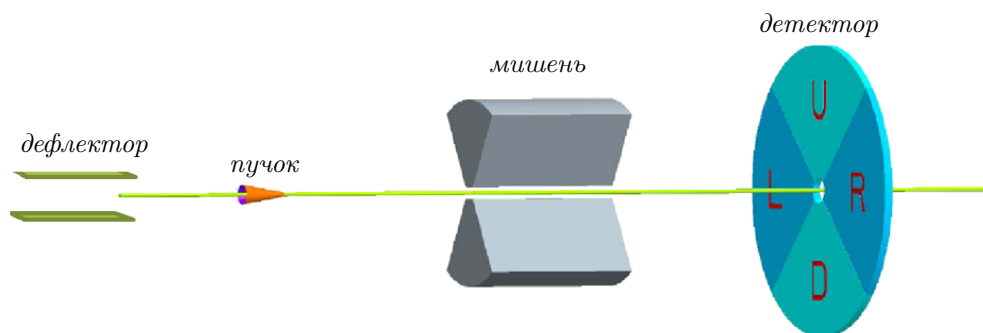


Рис. 2. Схема поляриметра [101]

Поляриметр основан на принципе упругого рассеяния протонов на углеродной мишени [73]. В зависимости от поляризации частицы детектор регистрирует либо поляризацию в плоскости U–D (Up–Down), либо в плоскости L–R (Left–Right). Чувствительность поляриметра зависит от количества зарегистрированных событий детектором. Преимуществом использования накопительного кольца для измерения ЭДМ является тот факт, что в кольце одновременно находится большое количество частиц, таким образом при помощи современного поляриметра можно измерить вертикальную поляризацию с эффективностью 1% [101].

В предложенном эксперименте планируется достигнуть точности в измерении ЭДМ протона на уровне  $10^{-29} e \cdot \text{см}$ , что превосходит предыдущие эксперименты на два порядка. Скорость увеличения вертикальной поляризации линейно зависит от величины ЭДМ, поэтому этот эксперимент является прямым способом измерения электрического дипольного момента. В процессе движения пучка в кольце вертикальная поляризация должна увеличиться до величины, которую способен измерить поляриметр, но, так как скорость изменения поляризации (при  $|d_p| = 10^{-29}$  и напряженности электрического поля  $\sim 10$  МВ/м) составляет 3,2 нрад/с [101], требуется удержание поляризованного пучка частиц в течение порядка 1000 с, что соответствует  $10^9$  оборотов. Сохранение горизонтальной поляризации на про-

тяжении столь долгого времени в ускорителе является сложной задачей, которая требует первоочередного решения, так как при потере поляризации в горизонтальной плоскости ведет к прекращению роста вертикальной поляризации. Следовательно, время сохранения горизонтальной поляризации является фактором, ограничивающим чувствительность предложенного эксперимента.

В качестве предварительного эксперимента по обнаружению ЭДМ в Институте ядерной физики г. Юлих предложено провести эксперимент на базе ускорителя COSY<sup>20</sup> [70]. Ускорительный комплекс COSY является накопительным кольцом для протонов и дейтронов в диапазоне энергий от 40 МэВ до 2,5 ГэВ. Длина ускорителя составляет 183 метра. Схема ускорителя приведена на рис. 3. Ускоритель позволяет работать с поляризованными пучками протонов и дейтронов, а также производить исследования поляризации при помощи детектора EDDA (на рис. 4). В 2005 году Ю. Ф. Орлов, У. Морзе (W. Morse) и Я. Семерцидис (Y. Semertzidis) предложили метод измерения ЭДМ, основанный на резонансном методе изменения горизонтальной проекции спина в магнитном кольце. Для измерения ЭДМ в ускоритель инжектируется пучок частиц с вертикальной поляризацией, а за счет встроенного в кольцо элемента, создающего горизонтальное электрическое ВЧ-поле, происходит резонансная раскачка горизонтальной поляризации пучка, которая изме-

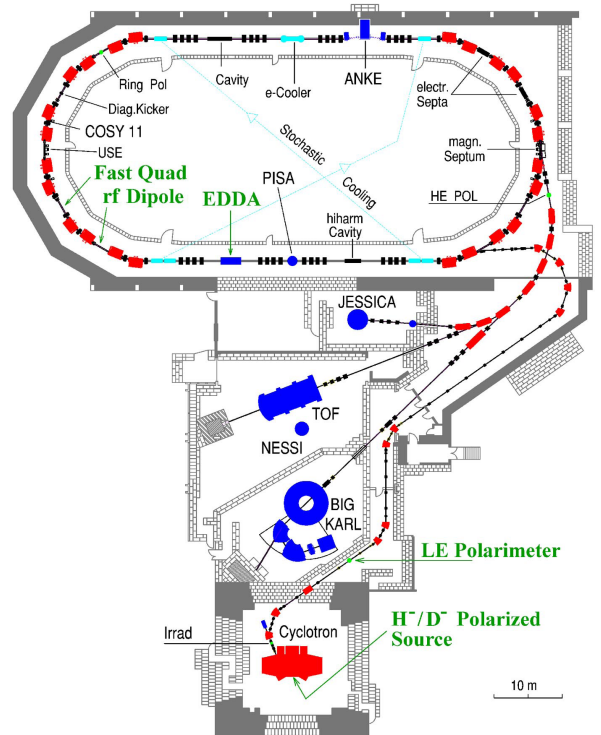


Рис. 3. Схема ускорителя COSY [70]

труется исследованию поляризации при помощи детектора EDDA (на рис. 4). В 2005 году Ю. Ф. Орлов, У. Морзе (W. Morse) и Я. Семерцидис (Y. Semertzidis) предложили метод измерения ЭДМ, основанный на резонансном методе изменения горизонтальной проекции спина в магнитном кольце. Для измерения ЭДМ в ускоритель инжектируется пучок частиц с вертикальной поляризацией, а за счет встроенного в кольцо элемента, создающего горизонтальное электрическое ВЧ-поле, происходит резонансная раскачка горизонтальной поляризации пучка, которая изме-

<sup>20</sup>COSY — Cooler Synchrotron — Охлаждающий синхротрон

ряется поляриметром. Этот метод требует крайне высокой точности в задании частоты электрического поля, что демонстрируется в Главе 1.

Также на базе ускорителя COSY проводятся эксперименты с целью изучения поведения поляризованных пучков в ускорителе для будущего эксперимента по измерению ЭДМ в электростатическом кольце [67, 66].

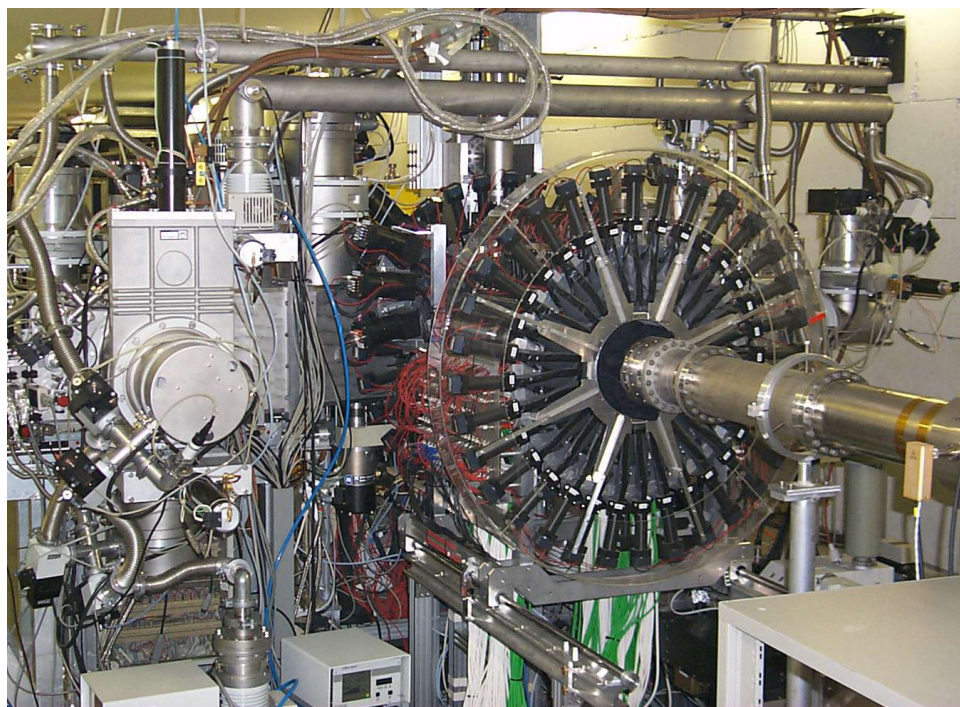


Рис. 4. Детектор EDDA, установленный в COSY

Разработка ускорителя подразумевает изучение динамики пучка перед этапом технического проектирования. Изучение динамики пучков проводится с разными целями, в первую очередь можно выделить исследования с целью получить решение уравнений движения с высокой точностью в течение короткого периода времени, а также исследования для анализа эволюции пучка в течение длительного периода времени. Изучение периодических структур, таких как синхротронов и накопительных колец, является одной из основных задач физики пучков. Все периодические структуры обеспечивают сохранение частиц в канале на протяжении длительного времени, т.е. движение частиц устойчиво и происходит в пределах фи-

зической апертуры ускорителя. За многолетнюю историю создания циклических ускорителей была развита обширная теория ускорителей и создан соответствующий математический аппарат для исследования динамики пучков заряженных частиц. Большой вклад в развитие вопросов динамики пучков внесли А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, А. Драгт (A. Dragt), и другие. Развитие динамики поляризованных пучков связано с именами новосибирской школы ядерной физики, в первую очередь с работами А. М. Кондратенко и Я. С. Дербенева. В качестве литературы, затрагивающей данную тематику, можно указать ряд работ [47, 123, 37, 64] в совокупности с приведенной в них библиографией.

Для исследований движения заряженных частиц в управляющих полях разработано множество программ численного моделирования, таких как Для моделирования длительной эволюции пучка частиц, что является необходимым при разработке ускорителя для измерения ЭДМ, накладываются особые требования к используемым методам численного моделирования, такие как симплектичность и сохранение энергии [15, 37]. Одним из методов изучения длительной динамики является подход, основанный на использовании матричных отображений [40, 22, 18]. Преимуществом данного подхода является высокая скорость вычислений, что позволяет изучать длительную эволюцию пучков.

В диссертации для исследования динамики пучка в электростатическом ускорителе применяется программа COSY Infinity [18], основанная на построении матричных отображений методами дифференциальной алгебры [37, 13]. Кроме того используются методы численного решения дифференциальных уравнений для исследования модели резонансного метода измерения ЭДМ. Для упрощения работы с программами моделирования и анализа данных разработан комплекс программ RSX, предоставляющий единый интерфейс для моделирования динамики пучков.



**Целью диссертационной работы** является разработка проблемно-ориентированной системы управления динамикой частиц в циклическом ускорителе, предназначенном для измерения электрического дипольного момента элементарных частиц. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие основные задачи:

- 1) провести системный анализ, моделирование и оптимизацию управляющего поля пучком частиц с учетом поляризационных эффектов с целью построения эффективной математической модели ускорителя;
- 2) разработать структуру программных модулей, реализующих математическую модель, и выполнить программную реализацию соответствующей проблемно-ориентированной системы;
- 3) провести серию численных экспериментов с целью оптимизации разработанной модели, с использованием разработанного программного обеспечения, реализующее предложенные модели, методы, алгоритмы, и методику;
- 4) разработать алгоритмическое обеспечение поддержки принятия решений в процессе процесса моделирования, основанное на предоставлении адекватной графической информации;
- 5) исследовать особенности влияния управляющих параметров ускорителя с целью оптимизации длительной эволюции пучка частиц (за времена порядка тысячи секунд - более  $10^9$  оборотов) с учетом поляризационных эффектов;
- 6) исследовать эффекты декогеренции спина в электростатическом кольце.

Основными **методами исследования** являются методы математического и компьютерного моделирования и численного эксперимента.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа изложена на 126 страницах машинописного текста и состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка литературы, включающего 124 наименования. Работа содержит 37 рисунков и 2 приложения на 12 листах.

**Первая глава** содержит теоретическое описание метода «замороженного спина» для измерения ЭДМ протона в накопительных кольцах, показана необходимость сохранения горизонтальной поляризации, рассмотрены эффекты, приводящие к декогеренции спина. Также в главе построена математическая модель резонансного метода обнаружения ЭДМ и показана необходимость стабилизации ВЧ-поля на уровне  $10^{-15}$  при использовании поляриметра с чувствительностью  $10^{-3}$ .

**Вторая глава** содержит подробное описание метода численного моделирования спин-орбитальной движения пучка заряженных частиц в электромагнитных полях, применяемый для изучения длительной эволюции пучка в накопительном кольце. Метод основан на применении матричных отображений, для построения которых используются методы дифференциальной алгебры.

**Третья глава** содержит описание программы COSY Infinity, реализующий математические модели, представленные в Главе 2. Также глава содержит описание разработанного в рамках диссертационного исследования программного комплекса, применяемого для численного моделирования движения частиц и анализа полученных данных.

**Четвертая глава** содержит результаты численного моделирования динамики пучка в электростатическом ускорителе, исследован метод переменных дефлекторов для увеличения времени декогеренции спина. Также приведены результаты моделирования пучка на высокопроизводительном вычислительном кластере с учетом влияния ЭДМ.

**Научная новизна результатов** состоит в разработке численно-аналитического подхода к исследованию динамики спина частиц в ускорителях с большим временем жизни пучка. Впервые исследован метод измерения электрического дипольного момента протона с использованием электростатического накопительного кольца и метод резонансного поиска электрического дипольного момента в магнитном кольце. Исследованы эффекты декогеренции спина частиц из-за различных факторов. Разработан комплекс программ, предназначенный для численного моделирования спин-орбитальной динамики пучков и анализа полученных данных. Все представленные в диссертационной работе результаты и положения являются новыми.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- 1) математическая модель спин-орбитального движения в накопительном кольце для поиска электрического дипольного момента протона и результаты численного моделирования при больших временах удержания пучка;
- 2) специальный программный комплекс, предназначенный для повышения эффективности, надежности и качества моделирования динамики спина, и допускающий распараллеливание вычислительных процессов;
- 3) методы и инструменты поддержки принятия решения, основанные на предоставлении адекватной графической информации с учетом структурно-параметрического представления управляющих параметров ускорителя;
- 4) результаты исследования системных связей и закономерностей функционирования управляющих систем ускорителя на основные характеристики пучка частиц с использованием инструментов обработки информации.

**Апробация работы.** Основные теоретические и практические результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных семинарах и конференциях:

- семинар по поиску электрического дипольного момента элементарных частиц, Бад Хоннеф, Германия, 2011;
- II международная конференция по ускорителям частиц IPAC2011, Сан-Себастьян, Испания;
- VII семинар по методам Тейлора, Ки-Уэст, Флорида, США, 2011;
- III международная конференция по ускорителям частиц IPAC2012, Новый Орлеан, Луизиана, США;
- 11 международная конференция по вычислительной физике ICAP12, Росток, Германия;
- семинар по поиску электрического дипольного момента при помощи накопительных колец, Тренто, Италия, 2012;
- IV международная конференция по ускорителям частиц IPAC2013, Шанхай, Китай;
- 1, 2, 3 семинары коллаборации JEDI, Юлих, Германия, 2013–2014;
- V международная конференция по ускорителям частиц IPAC2014, Дрезден, Германия.

Апробация разработанного программного комплекса проводилась в Институте ядерной физики (Institute für Kernphysik) г. Юлих, Германия.

**Публикации по теме работы.** По материалам диссертации опубликованы работы [122, 121, 115, 95, 53, 93, 96, 117, 116, 94, 114, 91, 92]. Работы [122, 121] опубликованы в рецензируемых изданиях, входящих в перечень ВАК. Работы [116, 94, 95, 53, 115, 96, 117, 114, 91, 92] опубликованы в изданиях, входящих в системы цитирования Scopus или Springer.

# ГЛАВА 1

## Метод поиска электрического дипольного момента с использованием накопительного кольца

**Первая глава** основана на публикациях [116, 94, 96, 93, 95, 53, 122, 91, 92] и состоит из четырех разделов. В ней приведены уравнения Лоренца и уравнения Максвелла для электромагнитного поля, формулируются задачи динамики спина частицы, возникающие при длительном движении пучка в накопительном кольце, вводится понятие времени когеренции спина. Разработана теория резонансного метода обнаружения ЭДМ, а также описан метод прямого измерения ЭДМ протона в электростатическом кольце.

### 1.1 Основные уравнения

Движение заряженной частицы в произвольных электромагнитных полях задается *уравнением Ньютона–Лоренца*

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right), \quad (1.1.1)$$

где  $\mathbf{p}$  — импульс частицы,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы электрического и магнитного поля,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $q$  — заряд частицы,  $c$  — скорость света,  $t$  — время.

Обозначим за  $\boldsymbol{\beta}$  скорость частицы относительно скорости света:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c},$$

а за  $\gamma$  — Лоренц-фактор:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Магнитное и электрическое поле определяются векторным  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  и скалярным  $V(\mathbf{x}, t)$  потенциалами

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Здесь и далее будем использовать СГС систему единиц измерения.

В отсутствии сторонних зарядов и токов векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

условию калибровки Лоренца

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

а также уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= 0, \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Уравнение Ньютона–Лоренца (1.1.1) совместно с электромагнитными

полями в ускорителе позволяют определить положение частицы в любой момент времени. Среди множества траекторий в накопительном кольце можно выбрать замкнутую *равновесную траекторию*. Длину равновесной траектории будем обозначать  $L_{\text{cir}}$ . Частица, движущаяся по равновесной траектории с относительной скоростью  $\beta_0$ , совершает полный оборот за время  $T_{\text{rev}} = L_{\text{cir}}/c\beta_0$ , частоту обращения будем обозначать  $f_{\text{rev}} = 1/T_{\text{rev}}$ .

Движение заряженной частицы в ускорителе будем описывать в *криволинейной системе координат*  $(x, y, s)$ , связанной с равновесной траекторией. Оси  $x, y$ , выберем так, чтобы они соответственно совпадали с осями  $x, z$  лабораторной системы координат в момент времени  $t = 0$ , а временную координату  $t$  заменим на длину  $s = \beta ct$ , измеряемую вдоль равновесной траектории.

Частица, не являющаяся равновесной, совершает горизонтальные и вертикальные колебания с частотами  $\nu_x$  и  $\nu_y$  соответственно, называемые *бетатронными колебаниями*. Линеаризованные уравнения для поперечного движения частицы с зарядом  $e$  и импульсом  $p = p_0(1 + \delta p/p_0)$ , где  $p_0$  — импульс равновесной частицы, в магнитном поле  $B$  имеют вид уравнений Хилла [31]:

$$\begin{aligned}x'' - \left(k - \frac{1}{\rho^2}\right)x &= \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0}, \\y'' + ky &= 0,\end{aligned}$$

где  $\rho(s)$  — радиус кривизны равновесной орбиты,  $k(s) = e/p_0 \partial B_y / \partial x$ .

Здесь и далее дифференцирование по времени будем обозначать как  $dx/dt = \dot{x}$ , по длине как  $dx/ds = x'$ .

Спин частицы — квантовая величина и носит вероятностный характер, но можно описать движение спина с помощью уравнений классической физики (учитывая, что «спин» — суть квантовый оператор). Уравнение дви-

жения спина описывается уравнением Томаса–Баргмана–Мишеля–Телегди (Т–БМТ) [54, 90]:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{S}}{dt} &= \mathbf{d} \times \mathbf{E}^* + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \\ E_x^* &= \gamma(E_x + \beta B_y), \quad E_y^* = \gamma(E_y - \beta B_x), \quad E_z^* = E_z, \\ B_x^* &= \gamma(B_x + \beta E_y), \quad B_y^* = \gamma(B_y - \beta E_x), \quad B_z^* = B_z,\end{aligned}\tag{1.1.5}$$

где  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\mathbf{d}$  — магнитный и электрический дипольный моменты соответственно. В подвижной системе координат, связанной с равновесной частицей, уравнение (1.1) можно переписать в виде [101]:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{S}}{dt} &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= -\frac{e}{m} \left\{ G\mathbf{B} + \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) \boldsymbol{\beta} \times \frac{\mathbf{E}}{c} + \frac{\eta}{2} \left( \frac{\mathbf{E}}{c} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{B} \right) \right\},\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

где  $G = (g - 2)/2$  — аномальный магнитный момент частицы,  $g$  — гиромагнитное соотношение,  $\eta$  — безразмерный коэффициент, задаваемый соотношением  $d = \eta e \hbar / 4mc$ , и  $\Omega$  — частота прецессии спина относительно импульса равновесной частицы.

## 1.2 Метод «замороженного спина» для поиска электрического дипольного момента

В 2004 году предложен метод измерения ЭДМ с помощью специальным образом спроектированного накопительного кольца [42]. Накопительное кольцо, состоящее из электростатических элементов, и не содержащее магнитных элементов, позволяет непосредственно измерить величину ЭДМ протона. Далее рассмотрим движение поляризованного пучка протонов в электростатическом кольце.



В электростатическом кольце всюду  $\mathbf{B} = 0$ , поэтому уравнение (1.1.6) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}}{dt} &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= -\frac{e}{m} \left\{ \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) \boldsymbol{\beta} \times \frac{\mathbf{E}}{c} + \frac{\eta \mathbf{E}}{2c} \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Гиромагнитное соотношение протона равно  $g_p = 5,585686(50)$  [86], т.е. аномальный магнитный фактор положителен:  $G_p = (g_p - 2)/2 \approx 1,793$ . Энергия равновесной частицы и, соответственно, фактор Лоренца может быть выбрана при проектировании ускорителя, и в случае

$$\gamma_{\text{mag}}^2 = \frac{1}{G_p} + 1 \approx 1,558 \quad (1.2.2)$$

уравнение (1.2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}}{dt} &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= -\frac{e}{m} \cdot \frac{\eta}{2} \cdot \frac{\mathbf{E}}{c}. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Энергию протонов, для которых верно соотношение (1.2.2), будем называть «магической энергией», импульс протонов с Лоренц-фактором  $\gamma_{\text{mag}}$  обозначим за  $p_{\text{mag}} \approx 0,7 \text{ ГэВ}/c$ , что соответствует энергии 232 МэВ. Электростатическое накопительное кольцо с равновесной частицей, удовлетворяющей (1.2.2), будем называть «магическим кольцом». Как видно из уравнения (1.2.3), для равновесной частицы частота прецессии спина  $\boldsymbol{\Omega}$  зависит только от ЭДМ протона.

Уравнение (1.2.1) можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dS_x}{dt} &= \Omega_y S_z - \Omega_z S_y, \\ \frac{dS_y}{dt} &= \Omega_z S_x - \Omega_x S_z, \\ \frac{dS_z}{dt} &= \Omega_x S_y - \Omega_y S_x.\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

Для частиц с энергией  $\gamma = \gamma_{\text{mag}}$  имеем:

$$\begin{aligned}\Omega_x &= -\frac{e}{m} \frac{\eta}{2c} E_x, \\ \Omega_y &= -\frac{e}{m} \frac{\eta}{2c} E_y, \\ \Omega_z &= -\frac{e}{m} \frac{\eta}{2c} E_z.\end{aligned}\tag{1.2.5}$$

В электростатическом накопительном кольце для поворота частиц в горизонтальной плоскости используются электростатические дефлекторы, в которых электрическое поле лежит в горизонтальной плоскости. Если положить отсутствие краевых полей, то электрическое поле в кольце может быть записано в виде  $\mathbf{E}(\mathbf{s}) = (E_x(s), 0, 0)$ . Таким образом угловая скорость вращения спина частиц с «магической энергией» в идеальном кольце равна  $\boldsymbol{\Omega} = (-e/m \cdot \eta/2c \cdot E_x, 0, 0)$ , и уравнение движения спина (1.2.4) принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{dS_x}{dt} &= 0, \\ \frac{dS_y}{dt} &= -\Omega_x S_z, \\ \frac{dS_z}{dt} &= \Omega_x S_y.\end{aligned}\tag{1.2.6}$$

В эксперименте по прямому измерению ЭДМ предлагается использовать горизонтально поляризованный пучок, т.е.  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z) = (0, 0, 1)^1$ .

---

<sup>1</sup>для обозначения вектор-столбцов будем использовать запись вектора в круглых скобках

Для частиц с начальной поляризацией  $S_z(0) = 1$  решение (1.2.6) имеет вид:

$$\begin{aligned} S_x(t) &= 0, \\ S_y(t) &= -\sin(\Omega_x t), \\ S_z(t) &= \cos(\Omega_x t). \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

В планируемом эксперименте по измерению ЭДМ протона предполагается обнаружение ЭДМ на уровне  $d_p = 10^{-29} e \cdot \text{см}$ , т.е. безразмерный коэффициент  $\eta$  вычисляется следующим образом:

$$\eta = \frac{4m_p c d_p}{e \hbar} = \frac{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ г} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с} \cdot 10^{-29} e \cdot \text{см}}{e \cdot 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}} = 1,9 \cdot 10^{-15}. \tag{1.2.8}$$

Примем электрическую напряженность между обкладками дефлектора за  $E = 10,5 \text{ МВ/м} = 3,5 \cdot 10^2 \text{ СГС/см}$ , тогда из (1.2.3) следует, что угловая частота вращения спина частицы с «магической» энергией равна

$$\begin{aligned} \Omega_x &= -\frac{4,8 \cdot 10^{-10} \text{ СГС} \cdot 1,9 \cdot 10^{-15}}{1,67 \cdot 10^{-24} \text{ г} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}} \cdot 3,5 \cdot 10^2 \text{ СГС/см} = -3,2 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}, \\ \Omega_y &= 0, \\ \Omega_z &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Таким образом, из (1.2.7) следует, что вертикальная компонента спина «магического» протона в поле  $10,5 \text{ МВ/м}$  осциллирует в вертикальной плоскости с частотой  $\Omega_x = 3,2 \text{ нрад/с}$ .

Из (1.2.5) и (1.2.7) можно заметить следующее:

- вертикальная компонента спина  $S_y$  линейно растет во времени;
- эффект от ЭДМ прямо пропорционален электрическому полю в кольце;
- за время  $10^3 \text{ с}$  возникает вертикальная поляризация пучка  $3,2 \text{ мрад}$ , которую можно измерить при помощи сверхточного поляриметра.

В представленных выше уравнениях предполагалось отсутствие у частиц в пучке разброса по энергии:  $\gamma = \gamma_{\text{mag}}$ . В реальном пучке это не так, поэтому со временем горизонтальная поляризация теряется. Процесс горизонтальной деполяризации пучка рассматривается в следующем разделе.

Из (1.2.6) следует, что вертикальная компонента  $S_y$  возрастает только тогда, когда  $S_x > 0$ , а при  $S_x < 0$  вертикальная компонента убывает. Для прямого измерения ЭДМ (измерения вертикальной поляризации через  $10^3$  с) требуется обеспечить сохранение горизонтальной поляризации пучка в течение всего периода измерения, не менее  $10^3$  с для ЭДМ протона на уровне  $d_p = 10^{-29} e \cdot \text{см}$ .

Следуя [90] промежуток времени, за который среднее квадратичное отклонение горизонтальных проекций спина  $S_x$  в пучке достигает 1 рад, будем называть *временем декогеренции спина* (SCT — spin coherence time). В предполагаемом эксперименте [42] накопительное кольцо должно обеспечивать SCT не менее 1000 с.

### 1.3 Деполяризация пучка в «магическом» кольце

В этом разделе рассмотрим электростатическое кольцо для протонов с «магической» энергией  $\gamma = \gamma_{\text{mag}} = 1,558$ . Исключим из уравнения (1.2.1) слагаемое, содержащее  $\eta$ -фактор:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}}{dt} &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= -\frac{e}{m} \left\{ \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) \boldsymbol{\beta} \times \frac{\mathbf{E}}{c} \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Вертикальная скорость  $\beta_y$  и продольная скорость  $\beta_x$  в циклическом ускорителе, вызванные бетатронными колебаниями, много меньше горизонтальной скорости  $\beta_z$ , т.е.  $\boldsymbol{\beta} \approx (0, 0, \beta_z)$ . Для простоты положим также

отсутствие вертикального и продольного электрического поля:  $E_y(s) = 0$ ,  $E_z(s) = 0$ . Тогда  $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$  и вектор частот  $\mathbf{\Omega}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{\Omega} = \left( 0, -\frac{e}{mc} \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) \beta_z E_x, 0 \right).$$

Т.е. спин частицы вращается в горизонтальной плоскости  $XZ$  с частотой  $\nu_{sz}$ :

$$\nu_{sz} = \frac{e}{2\pi m_0 c^2} L_{\text{cir}} E_x \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right), \quad (1.3.2)$$

В случае частицы с энергией отличной от «магической», множитель  $(1/(\gamma^2 - 1) - G)$  отличен от нуля, и поэтому спин вращается с частотой, зависящей от энергии частицы. Разложим  $G - 1/(\gamma^2 - 1)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $p = p_m$ . Для этого рассмотрим  $f(\gamma(p))$ :

$$f(\gamma(p)) = G - \frac{1}{\gamma^2 - 1}.$$

Учитывая, что

$$\gamma = \frac{E}{m} = \frac{\sqrt{p^2 + m_0^2}}{m_0},$$

получаем

$$f(p) = G - \frac{m_0^2}{p^2}.$$

Таким образом, импульс «магической» частицы равен

$$p_{\text{mag}} = \frac{m_0}{\sqrt{G}}.$$

Дифференцируя  $f(p)$  по  $p$  получаем

$$f'(p) = 2\frac{m_0^2}{p^3}, \quad f''(p) = -6\frac{m_0^2}{p^4},$$

следовательно

$$f'(p_{\text{mag}}) = 2G \frac{1}{p_{\text{mag}}}, \quad f''(p_{\text{mag}}) = -6G \frac{1}{p_{\text{mag}}^2}.$$

Получаем искомое разложение:

$$\left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right)_{p_{\text{mag}} + \Delta p} = 0 - 2G \frac{\Delta p}{p_{\text{mag}}} + 3G \left( \frac{\Delta p}{p_{\text{mag}}} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \frac{\Delta p}{p_{\text{mag}}} \right)^3. \quad (1.3.3)$$

Из (1.3.2) и (1.3.3) следует, что в качестве первого приближения некогерентность спиновой частоты может быть оценена с помощью простой формулы

$$\nu_{sz} = -2 \frac{e \bar{E}_x L_{\text{cir}}}{m_0 c^2 \gamma} G \frac{\Delta p}{p},$$

где  $\bar{E}_x$  — усредненное значение продольного электрического поля в ускорителе. Определим время декогеренции спина, следуя [42], как время, за которое среднее квадратичное отклонение ориентаций спиновых векторов, входящих в пучок, достигнет одного радиана. При разбросе начального импульса  $\Delta p/p = 5 \cdot 10^{-5}$  ( $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$ , где  $K_0$  — кинетическая энергия равновесной частицы, а  $\Delta K$  — разница между энергией частицы и  $K_0$ ), время декогеренции спина меньше одной миллисекунды, что составляет несколько тысяч оборотов.

В работе [69] было предложено использовать высокочастотное поле с целью усреднения разброса по энергии относительно «магического» уровня. При наличии ВЧ поля спиновая частота модулируется синхротронной частотой  $\nu_z$ , которая на два порядка выше, чем спиновая частота  $\nu_{sz}$ . Таким образом, спин начинает осциллировать с малой амплитудой  $\Phi_{\text{max}} \sim (\nu_s/\nu_{sz})$  относительно центрального положения. Теперь разложим (1.3.2) в ряд Тейлора до второго порядка нелинейности. Принимая во внимание, что в разложение (1.3.3) входит член второго порядка  $(\Delta p/p)^2$ , центральное поло-

жение спина медленно смещается (спин поворачивается в горизонтальной плоскости). Усредняя по времени (1.3.3), этот член дает ненулевой вклад в частоту спина:

$$\begin{aligned} \nu_{sz} &= \frac{e\bar{E}_x L_{\text{cir}}}{m_0 c^2 \gamma} \left[ -2G \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_m \cdot \cos(\nu_z \varphi) + 3G \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_m^2 \cdot \cos^2(\nu_z \varphi) \right] = \\ &= 3 \frac{e\bar{E}_x L_{\text{cir}}}{m_0 c^2 \gamma} G \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_m^2, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

где за  $(\dots)_m$  обозначено среднее значение величины в скобках.

Осциллирующая компонента спина всегда по модулю меньше  $\Phi_{\text{max}}$ , поэтому нам интересна лишь медленно растущая составляющая спиновой частоты. Она зависит от квадрата величины разброса по импульсу  $\Delta p/p$  и определяет некогерентность спиновой частоты. После усреднения по времени, член  $\Delta p/p$  дает нулевой вклад в результирующую частоту спина.

В пучке, кроме разброса по энергии, также существуют частицы с ненулевым отклонением от осей  $x$  и  $y$ . Для рассмотрения зависимости  $\nu_{sx}$  от начальных  $x$  и  $y$  представим отклонение спиновой частоты с помощью конечных разностей до второго порядка:

$$\delta\nu_{sz} = \frac{e}{m_0 c^2 \gamma} \delta \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) L_{\text{orb}} E_x \left[ 1 + \frac{\delta L_{\text{orb}}}{L_{\text{orb}}} + \frac{\delta E_x}{E_x} + \gamma \delta \left( \frac{1}{\gamma} \right) \right], \quad (1.3.5)$$

где  $L_{\text{orb}}$  — длина орбиты частицы. Представим каждый член формулы (1.3.5) в виде ряда Тейлора по степеням  $\Delta p/p$ :

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) &= -2G \frac{\Delta p}{p} + 3G \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2 + \dots, \\ \frac{\delta L_{\text{orb}}}{L_{\text{orb}}} &= \alpha_1 \frac{\Delta p}{p} + \alpha_2 \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2 + \dots, \\ \frac{\delta E_x}{E_x} &= -k_1 \frac{x}{R} + k_2 \left( \frac{x}{R} \right)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

$$\gamma\delta\left(\frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^3} \left(\frac{\Delta p}{p}\right) + \frac{(\gamma^2 - 1)^2}{2\gamma^5} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \dots,$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — коэффициенты расширения орбиты первого и второго порядка соответственно [123],  $k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты разложения электрического поля в окрестности равновесной траектории. Например, для цилиндрического дефлектора коэффициенты разложения  $k_1 = k_2 = 1$ .

Также уравнение (1.3.5) может быть записано в виде

$$\delta\nu_{sz} = \frac{eL_{\text{orb}}E_xG}{m_0\gamma c^2} \left[ F_2\left(\alpha_1, k_1, k_2, \frac{x}{R}\right) \cdot \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + 2F_1\left(k_1, k_2, \frac{x}{R}\right) \cdot \frac{\Delta p}{p} \right], \quad (1.3.7)$$

где

$$F_2(\alpha, k_1, k_2, \frac{x}{R}) = \frac{1 + 3\gamma^2}{\gamma^2} k_2 \left(\frac{x}{R}\right)^2 - \frac{1 + 3\gamma^2}{\gamma^2} k_1 \frac{x}{R} + \frac{5\gamma^2 - 1}{\gamma^2} - 2\alpha,$$

$$F_1(k_1, k_2, \frac{x}{R}) = k_1 \frac{x}{R} + k_2 \left(\frac{x}{R}\right)^2.$$

Иными словами, время жизни поляризованного пучка зависит от квадрата разброса частиц по импульсу  $(\Delta p/p)^2$ , от коэффициента расширения орбиты второго порядка  $\alpha_2$ , который зависит от выбранной структуры ускорителя, и от разложения поля  $E_x$ . В работах [94, 96] предложен способ увеличения времени декогеренции спина до нескольких тысяч секунд при помощи электростатических дефлекторов специальной формы. Изменяя коэффициенты разложения поля  $k_1$ ,  $k_2$  от дефлектора к дефлектору, возможно обеспечить увеличение времени жизни горизонтально поляризованного пучка, что будет рассмотрено в разделе 4.2.

#### 1.4 Резонансный метод измерения ЭДМ

Рассмотрим теперь метод измерения ЭДМ протона или дейтрона, предложенный в [78]. Данный метод основан на измерении горизонтальной ком-



поненты спина  $S_z$  изначально вертикально поляризованного пучка в результате взаимодействия ЭДМ с горизонтальным электрическим ВЧ-полем в магнитном кольце. Этот метод предложен в качестве предварительного эксперимента по измерению ЭДМ и реализуется в ускорителе COSY [66, 67, 55, 56].

Перепишем уравнение (1.1.6) в виде системы

$$\begin{aligned}\Omega_x &= -\frac{e}{m\gamma} \left[ \gamma G B_x - \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) \cdot \gamma \left( \beta_z \frac{E_y}{c} - \beta_y \frac{E_z}{c} \right) + \frac{\eta}{2} \gamma \left( \frac{E_x}{c} - \beta_z B_y + \beta_x B_z \right) \right], \\ \Omega_y &= -\frac{e}{m\gamma} \left[ \gamma G B_y - \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) \cdot \gamma \left( \beta_x \frac{E_z}{c} - \beta_z \frac{E_x}{c} \right) + \frac{\eta}{2} \gamma \left( \frac{E_y}{c} - \beta_x B_z + \beta_z B_x \right) \right], \\ \Omega_z &= -\frac{e}{m\gamma} \left[ \gamma G B_z - \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) \cdot \gamma \left( \beta_y \frac{E_x}{c} - \beta_x \frac{E_y}{c} \right) + \frac{\eta}{2} \gamma \left( \frac{E_z}{c} - \beta_x B_y + \beta_y B_x \right) \right].\end{aligned}$$

Будем рассматривать движение пучка частиц в «идеальном» магнитном накопительном кольце с ведущим магнитным полем без краевых полей  $\mathbf{B} = (0, B_y, 0)$ . Предположим наличие горизонтального электрического поля, также без краевых полей:  $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ . Примем во внимание тот факт, что вертикальная и горизонтальная скорости много меньше продольной:  $\beta_x, \beta_y \ll \beta_z$ , поэтому  $\boldsymbol{\beta} \approx (0, 0, \beta_z)$ .

Тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}\Omega_x &= -\frac{e}{m\gamma} \cdot \frac{\eta}{2} \gamma \left( \frac{E_x}{c} - \beta_z B_y \right), \\ \Omega_y &= -\frac{e}{m\gamma} \left[ \gamma G B_y + \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) \cdot \gamma \cdot \beta_z \frac{E_x}{c} \right], \\ \Omega_z &= 0,\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

при этом

$$\begin{aligned}\frac{dS_x}{dt} &= \Omega_y S_z, \\ \frac{dS_y}{dt} &= -\Omega_x S_z, \\ \frac{dS_z}{dt} &= \Omega_x S_y - \Omega_y S_x.\end{aligned}\tag{1.4.2}$$

В случае вертикально поляризованного пучка  $S_x = S_z = 0$ ,  $S_y = 1$  и решение уравнения (1.4.2) имеет вид

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \frac{\Omega_x \Omega_y}{\Omega_{xy}^2} (1 - \cos \Omega_{xy} t), \\ S_y(t) &= 1 - \frac{\Omega_x^2}{\Omega_{xy}^2} (1 - \cos \Omega_{xy} t), \\ S_z(t) &= \frac{\Omega_x}{\Omega_{xy}} \sin \Omega_{xy} t, \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

где  $\Omega_{xy} = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2}$ .

В случае отсутствия ЭДМ  $\eta = 0$  и  $S(y) = 1$ , то есть вертикальная поляризация сохраняется. При наличии ЭДМ на уровне  $d_p = 10^{-29} e \cdot \text{см}$  получаем  $\eta = 1,9 \cdot 10^{-15}$  (1.2.8), а амплитуда осциллирующей спина при  $E_x = 0$  определяется соотношением  $\Omega_x/\Omega_{xy} \approx \eta/2G \approx 10^{-15}$ , что невозможно измерить при помощи существующих методов. Для увеличения спиновых осцилляций предложено [78] использовать горизонтальное электрическое ВЧ-поле  $E(t) = E_{\text{rf}} \cdot \cos(2\pi f_{\text{rf}} \cdot t + \psi)$ , где  $E_{\text{rf}}$ ,  $f_{\text{rf}}$ ,  $\psi$  — амплитуда, частота и фаза поля соответственно.

Положим  $\tau = 2\pi t/T_{\text{rev}}$ , то есть величина  $\tau/2\pi$  есть количество оборотов за время  $t$ . Тогда

$$d\tau = d\left(\frac{2\pi t}{T_{\text{rev}}}\right) = d\left(2\pi \cdot t \cdot \frac{eB}{2\pi m\gamma}\right) = \frac{eB_y}{m\gamma} dt$$

и уравнения (1.4.1), (1.4.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dS_x}{d\tau} &= -\left[\gamma G + \left(\frac{1}{\gamma^2 - 1} - G\right) \gamma \beta_z \cdot \frac{E_x}{cB_y}\right] S_z, \\ \frac{dS_y}{d\tau} &= \left[\frac{\eta}{2} \gamma \cdot \frac{E_x}{cB_y} - \frac{\eta}{2} \gamma \beta_z\right] S_z, \\ \frac{dS_z}{d\tau} &= -\left[\frac{\eta}{2} \gamma \cdot \frac{E_x}{cB_y} - \frac{\eta}{2} \gamma \beta_z\right] S_y + \left[\gamma G + \left(\frac{1}{\gamma^2 - 1} - G\right) \gamma \beta_z \cdot \frac{E_x}{cB_y}\right] S_x. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Будем называть величину  $\nu_s = \gamma G$  спиновой частотой; при отсутствии электрического поля (и ЭДМ) спин частицы совершает  $2\pi\nu_s$  поворотов в горизонтальной плоскости за один оборот в кольце.

Электрическое ВЧ-поле, создаваемое дефлектором длиной  $l_{\text{rf}}$ , может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} E_x &= E(t) \cdot E(s), \\ E(t) &= E_{\text{rf}} \cdot \cos(2\pi f_{\text{rf}} \cdot t + \psi), \\ E(s) &= \begin{cases} 1, & s \in \left[-\frac{l_{\text{rf}}}{2}, \frac{l_{\text{rf}}}{2}\right], \\ 0, & s \notin \left[-\frac{l_{\text{rf}}}{2}, \frac{l_{\text{rf}}}{2}\right]. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как функция  $E(s)$  периодическая с периодом  $l_{\text{rf}}$ , то ее можно представить в виде разложения в ряд Фурье:

$$E(s) = \frac{l_{\text{rf}}}{L_{\text{cir}}} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi l_{\text{rf}}/L_{\text{cir}})}{n\pi l_{\text{rf}}/L_{\text{cir}}} \cos\left(\frac{2\pi n}{L_{\text{cir}}} \cdot s\right) \right].$$

Учитывая, что  $l_{\text{rf}} \ll L_{\text{cir}}$ , а также  $f_{\text{rev}} = c\beta/L_{\text{cir}}$  получим

$$E(s) = \frac{l_{\text{rf}}}{L_{\text{cir}}} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n f_{\text{rev}} \cdot t) \right].$$

Обозначив за  $\nu_{\text{rf}}$  соотношение  $f_{\text{rf}}/f_{\text{rev}}$ , перепишем (1.4.4) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dS_x}{d\tau} &= -[\nu_s + \alpha \cos \Psi(\tau)] S_z, \\ \frac{dS_y}{d\tau} &= -[\nu_e - h \cos \Psi(\tau)] S_z, \\ \frac{dS_y}{d\tau} &= [\nu_e - h \cos \Psi(\tau)] S_y + [\nu_s + \alpha \cos \Psi(\tau)] S_x, \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha &= \left( \frac{1}{\gamma^2 - 1} - G \right) \gamma \beta_z \cdot \frac{E_{\text{rf}} \cdot l_{\text{rf}}}{c B_y L_{\text{cir}}}, \\ h &= \frac{\eta}{2} \gamma \cdot \frac{E_{\text{rf}} \cdot l_{\text{rf}}}{c B_y L_{\text{cir}}}, \\ \nu_e &= \frac{\eta}{2} \gamma \beta_z, \\ \Psi(\tau) &= (\nu_{\text{rf}} \pm n) \tau + \psi.\end{aligned}$$

Отметим, что частота  $\nu_e$  зависит от величины ЭДМ частицы.

Оценим численные значения  $\alpha$ ,  $h$ ,  $\nu_e$  и  $\nu_s$  для пучка протонов с энергией 100 МэВ:

$$\begin{aligned}\alpha &\approx 1,4 \cdot 10^{-4}, \\ h &\approx 1,25 \cdot 10^{-19}, \\ \nu_s &= 1,98, \\ \nu_e &\approx 0,47 \cdot 10^{-15}.\end{aligned}$$

**Условия резонанса.** Рассмотрим систему уравнений движения спина (1.4.5) при  $S_{x,z} \ll 1$ , что верно для эксперимента с начальной поляризацией  $S_y = 1$ . В силу малости  $\alpha$  и  $h$  система упрощается до

$$\begin{aligned}\frac{dS_x}{d\tau} &= -\nu_s \cdot S_z, \\ \frac{dS_y}{d\tau} &= -\nu_e \cdot S_z, \\ \frac{dS_z}{d\tau} &= \nu_e \cdot S_y + \nu_s \cdot S_x.\end{aligned}\tag{1.4.6}$$

Продифференцировав третье уравнение системы по  $\tau$  и подставив в него значения для  $dS_x$ ,  $dS_y$  получаем

$$\frac{d^2 S_z}{d\tau^2} + (\nu_s^2 + \nu_e^2) S_z = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} S_x(\tau) &= -F \cdot \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{1 + \nu_e^2/\nu_s^2} \cdot \nu_s \tau \right) \right], \\ S_y(\tau) &= 1 - F^2 \cdot \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{1 + \nu_e^2/\nu_s^2} \cdot \nu_s \tau \right) \right], \\ S_z(\tau) &= F \cdot \sin \left( \sqrt{1 + \nu_e^2/\nu_s^2} \cdot \nu_s \tau \right), \end{aligned}$$

где

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_e^2/\nu_s^2}} \cdot \frac{\nu_e}{\nu_s}.$$

При  $\nu_e \approx 0,47 \cdot 10^{-15}$ ,  $\nu_s = 1,98$  находим значение  $F$ :

$$F \approx 2,4 \cdot 10^{-16}.$$

Теперь решим (1.4.5) при реальных значениях  $\alpha, h > 0$ . Для этого продифференцируем третье уравнение системы (1.4.5) и получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 S_z}{d\tau^2} + (\nu_s^2 + \nu_e^2) S_z - \\ - [2(h\nu_e - \alpha\nu_s) \cos \Psi(\tau) - (h^2 + \alpha^2) \cos^2 \Psi(\tau)] \cdot S_z - \\ - h(\nu_{\text{rf}} \pm n) \sin \Psi(\tau) \cdot S_y + \alpha(\nu_{\text{rf}} \pm n) \sin \Psi(\tau) \cdot S_x = 0, \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Оценим численно коэффициенты в этом уравнении для  $n = 0$ . Получим

$$\begin{aligned} h\nu_e - \alpha\nu_s &\approx 1,25 \cdot 10^{-19} \cdot 0,47 \cdot 10^{-15} - 1,4 \cdot 10^{-4} \cdot 1,98 \approx -\alpha\nu_s \approx -2,8 \cdot 10^{-4}, \\ h^2 + \alpha^2 &\approx 1,6 \cdot 10^{-38} + 1,96 \cdot 10^{-8} \approx \alpha^2 \approx 2 \cdot 10^{-8}, \\ h\nu_{\text{rf}} &\approx 2,5 \cdot 10^{-19}, \\ \alpha\nu_{\text{rf}} &\approx 2,8 \cdot 10^{-4}, \\ \nu_s^2 + \nu_e^2 &\approx 3,92 + 1,6 \cdot 10^{-38} \approx \nu_s \approx 3,92. \end{aligned}$$

Уравнение (1.4.7) можно переписать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 S_z}{d\tau^2} + \nu_s^2 S_z = f(\tau, S_x, S_y, S_z), \quad (1.4.8)$$

с периодической правой частью

$$f(\tau, S_x, S_y, S_z) = - [2\alpha\nu_s \cos \Psi(\tau) + \alpha^2 \cos^2 \Psi(\tau)] \cdot S_z + \\ + h(\nu_{\text{rf}} \pm n) \sin \Psi(\tau) \cdot S_y - \alpha(\nu_{\text{rf}} \pm n) \sin \Psi(\tau) \cdot S_x.$$

Решим уравнение (1.4.8) методом Боголюбова-Митропольского [120]. В качестве первого приближения будем искать решение в виде

$$S_z(\tau) = a(\tau) \cdot \cos \vartheta, \quad \vartheta = \nu_s \tau + \theta, \\ \frac{da(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{2\pi\nu_s} \int_0^{2\pi} f(\tau, \hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) \sin \vartheta d\tau, \\ \frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} = \nu_s - \frac{1}{2\pi a \nu_s} \int_0^{2\pi} f(\tau, \hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) \cos \vartheta d\tau,$$

где в качестве начального приближения  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$ ,  $\hat{S}_z$  выбраны выражения

$$\hat{S}_x(\tau) = -F \cdot (1 - \cos(\nu_s \tau)), \\ \hat{S}_y(\tau) = 1 - F^2 \cdot (1 - \cos(\nu_s \tau)), \\ \hat{S}_z(\tau) = F \cdot \sin(\nu_s \tau).$$

Очевидно, что для раскачки колебаний компоненты  $S_z$  необходимо выполнение условия

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} \neq 0$$

ИЛИ

$$\frac{1}{2\pi\nu_s} \int_0^{2\pi} [(2\alpha\nu_s \cos \Phi(\tau) + \alpha^2 \cos^2 \Psi(\tau)) \cdot S_z - h(\nu_{\text{rf}} \pm n) \sin \Psi(\tau) \cdot S_y + \alpha(\nu_{\text{rf}} \pm n) \sin \Psi(\tau) \cdot S_x] \sin \vartheta d\tau \neq 0.$$

Выполнение этого неравенства возможно в следующих случаях:

- 1)  $\int_0^{2\pi} 2\alpha\nu_s \cos [(\nu_{\text{rf}} \pm n) \tau + \psi] \sin(\nu_s \tau) \sin(\nu_s \tau + \theta) d\tau \neq 0;$
- 2)  $\int_0^{2\pi} \alpha^2 \nu_s \cos^2 [(\nu_{\text{rf}} \pm n) \tau + \psi] \sin(\nu_s \tau) \sin(\nu_s \tau + \theta) d\tau \neq 0;$
- 3)  $\int_0^{2\pi} h(\nu_{\text{rf}} \pm n) \sin [(\nu_{\text{rf}} \pm n) \tau + \psi] \sin(\nu_s \tau + \theta) d\tau \neq 0;$
- 4)  $\int_0^{2\pi} \alpha(\nu_{\text{rf}} \pm n) \sin [(\nu_{\text{rf}} \pm n) \tau + \psi] \sin(\nu_s \tau + \theta) d\tau \neq 0;$
- 5)  $\int_0^{2\pi} \alpha(\nu_{\text{rf}} \pm n) \sin [(\nu_{\text{rf}} \pm n) \tau + \psi] \cos(\nu_s \tau) \sin(\nu_s \tau + \theta) d\tau \neq 0.$

Пользуясь известными тригонометрическими соотношениями для произведения синусов получим резонансные условия соответственно каждому случаю:

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| 1) $\nu_{\text{rf}} \pm n = 2\nu_s;$    | 4) $\nu_{\text{rf}} \pm n = \nu_s;$  |
| 2) $2(\nu_{\text{rf}} \pm n) = 2\nu_s;$ | 5) $\nu_{\text{rf}} \pm n = 2\nu_s.$ |
| 3) $\nu_{\text{rf}} \pm n = \nu_s;$     |                                      |

Видно, что существует два резонансных условия:  $\nu_{\text{rf}} \pm n = 2\nu_s$  (случаи 1 и 5) и  $\nu_{\text{rf}} \pm n = \nu_s$  (случаи 2–4).

При условии  $\nu_{\text{rf}} \pm n = 2\nu_s$  спиновая компонента  $S_z$  возрастает пропорционально  $da(\tau)/d\tau \sim \alpha\nu_s$  и  $da(\tau)/d\tau \sim \alpha\nu_{\text{rf}}$ . В случае  $\nu_{\text{rf}} \pm n = \nu_s$  должен на-

блюдается рост  $S_z$  пропорционально  $da(\tau)/d\tau \sim \alpha^2$ ,  $da(\tau)/d\tau \sim h(\nu_{\text{rf}} \pm n)$ ,  
 $da(\tau)/d\tau \sim (\nu_{\text{rf}} \pm n)$ .

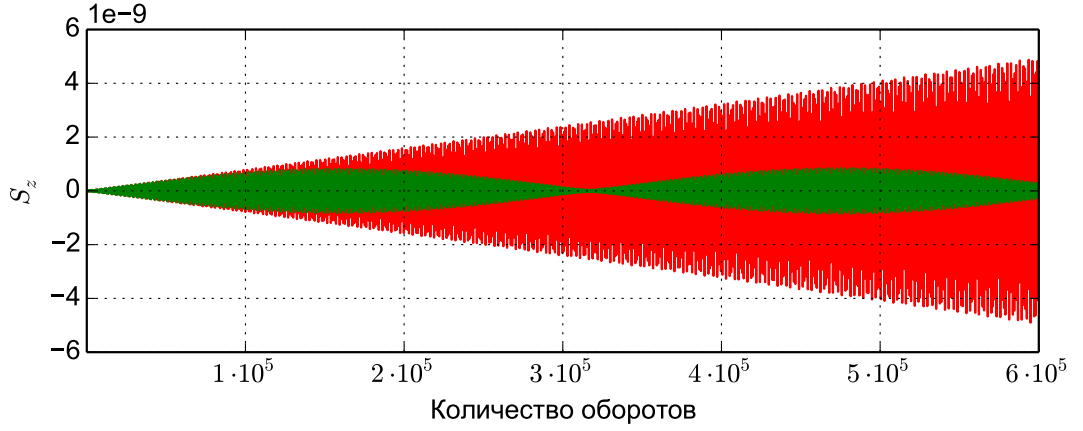


Рис. 1.1. Рост горизонтальной компоненты спина в резонансном (изображено красным) и нерезонансном (изображено зеленым) случаях

Для проверки полученных условий резонанса уравнение (1.4.5) можно проинтегрировать численно. На рис. 1.1 представлены результаты численного интегрирования методом Рунге-Кутты 4 порядка уравнения (1.4.5) для протонов с энергией 100 МэВ в случае резонанса  $\nu_{\text{rf}} \pm n = \nu_s$  и в случае отсутствия резонанса  $\nu_{\text{rf}} \pm n \neq \nu_s$ . Как видно из рисунка, в обоих случаях горизонтальная проекция спина совершает быстрые осцилляции с периодом  $T_f$ , при этом амплитуда горизонтальных спиновых осцилляций начинает возрастать, но в нерезонансном случае после достижения  $a_{\text{max}}$  амплитуда осцилляций начинает уменьшаться и через период  $T_e$  достигает нуля. Таким образом амплитуда быстрых осцилляций совершает медленные колебания с периодом  $T_e$ , будем называть  $T_e$  *периодом огибающей*. В случае резонанса амплитуда осцилляций продолжает рост и достигает 1 за большое количество оборотов. При помощи поляриметра возможно измерить горизонтальную поляризацию при  $S_z > 10^{-3}$ ; так как скорость резонансного роста амплитуды колебаний очень мала, необходимо удерживать пучок в ускорителе длительное время. При этом условия резонанса



$\nu_{\text{rf}} \pm n = \nu_s$  должны соблюдаться с крайне высокой степенью точности, в противном случае амплитуда осцилляций  $S_z$  не возрастет до предела чувствительности поляриметра. Далее рассмотрим рост амплитуды осцилляций при условии неточного попадания в резонансные условия.

**Движение спина при нарушении условий резонанса.** Перепишем систему уравнений (1.4.5) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{dS_x}{d\tau} &= -\nu_s [1 + \varepsilon_y \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi)] S_z, \\ \frac{dS_y}{d\tau} &= -f_e \nu_s [1 + \varepsilon_x \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi)] S_z, \\ \frac{dS_z}{d\tau} &= f_e \nu_s [1 + \varepsilon_x \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi)] S_y + \nu_s [1 + \varepsilon_y \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi)] S_x,\end{aligned}\tag{1.4.9}$$

где  $\varepsilon_y = \alpha/n\nu_s$ ,  $\varepsilon_x = -h/\nu_e$ ,  $f_e = \nu_e/\nu_s$  и  $\nu_{\text{RF}} = \nu_{\text{rf}} \pm n$ . При рассмотрении протонов с энергией 100 МэВ для ЭДМ  $d_p = 10^{-29} e \cdot \text{см}$  получим численные значения  $\varepsilon_y = 0,7 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_x = -2,6 \cdot 10^{-4}$ ,  $f_e = 0,24 \cdot 10^{-15}$ .

В случае  $\varepsilon_x = 0$ ,  $\varepsilon_y = 0$  система упрощается до системы (1.4.6), которую можно записать в виде

$$\frac{d^2 S_z}{d\tau^2} + \nu_s^2 (1 + f_e^2) S_z = 0.$$

Из этого уравнения следует, что спин осциллирует в горизонтальной плоскости с частотой  $\nu_f = \nu_s \sqrt{1 + f_e^2}$ . Будем называть величину  $\nu_f$  *фундаментальной частотой*, поскольку это частота быстрых осцилляций компоненты  $S_z$ . В случае  $\varepsilon_x, \varepsilon_y \neq 0$  из системы (1.4.9) следует, что спиновая частота  $\nu_f$  меняется на величину  $\Delta\nu_f \sim O(\varepsilon_x^2, \varepsilon_y^2)$ .

При помощи численного исследования системы уравнений (1.4.9) можно получить следующие зависимости периода огибающей  $T_e$  в зависимости от начальных  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, f_e, \delta$ :

- период огибающей  $T_e$  уменьшается при увеличении  $f_e$ ;
- период огибающей обратно пропорционален величине  $|\varepsilon_y - \varepsilon_x|$ , а ам-

плитуда огибающей  $a_{\max}$  прямо пропорциональна  $|\varepsilon_y - \varepsilon_x|$ ;

- при  $\varepsilon_y = \varepsilon_x$  не происходит резонансного роста осцилляций  $S_z$ , этот следует из симметрии уравнений (1.4.9) относительно  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_x$ ;
- при увеличении  $\delta$  период огибающей  $T_e$  уменьшается.

Для изучения поведения системы в нерезонансных условиях введем в рассмотрение величину  $\delta$ , которая характеризует относительную расстройку резонанса:  $\nu_{\text{RF}} = \nu_s(1 \pm \delta)$ . Рассмотрим упрощенную систему (1.4.8) при  $\alpha = 0$ :

$$\frac{d^2 S_z}{d\tau^2} + \nu_s^2 S_z = h\nu_{\text{RF}} \cdot \sin(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi)$$

с начальными условиями

$$\left. \frac{dS_z}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \nu_e, \quad S_z(\tau)|_{\tau=0} = 0.$$

Решив это уравнение получаем

$$S_z(\tau) = \frac{(2\nu_e\nu_s\delta + \nu_e\nu_s\delta^2 + h + h\delta) \sin \nu_s\tau - h \sin \nu_s(1 + \delta)\tau}{\nu_s^2\delta(2 + \delta)}.$$

При неточном резонансе  $\delta \ll 1$ , поэтому

$$S_z(n) = \frac{(2\nu_e\nu_s + h\nu_s) \sin 2\pi\nu_s n}{2\nu_s^2} - h\pi n \cos 2\pi\nu_s n,$$

где  $n = \tau/2\pi$  — номер оборота частицы в ускорителе. Это выражение состоит из двух слагаемых: нерезонансной и резонансной части. Такую упрощенную формулу можно использовать для описания амплитуды осцилляций при малых  $n$ . Нерезонансная часть соответствует быстрым колебаниям  $S_z$ , а амплитуда резонансных колебаний увеличивается при увеличении  $n$ . При ЭДМ  $d_p = 10^{-29} e \cdot \text{см}$  амплитуда колебаний возрастает с очень малой

скоростью:  $dS_z/dn = h\pi \approx 8 \cdot 10^{-19}$ .

Скорость роста амплитуды колебаний определяет требования к поляризованному пучку в эксперименте и возможную расстройку частот  $\delta$ . Начальный рост амплитуды, определяемый формулой (1.4), не зависит от расстройки  $\delta$ . Тем не менее, решая численно уравнения (1.4.5), можно получить зависимость максимальной амплитуды огибающей  $a_{\max}$  от  $\delta$ . На рис. 1.2 представлена зависимость амплитуды  $a_{\max}$  от расстройки частот  $\delta$ . График показывает максимально достижимую горизонтальную проекцию  $S_z$  при разных  $\delta$ . Горизонтальными линиями отмечены нижний ( $S_z > 10^{-3}$ , на рисунке синим) и верхний ( $S_z > 10^{-6}$ , на рисунке зеленым) пределы точности поляриметра. Как видно из графика, при использовании поляриметра с точностью  $S_z > 10^{-3}$  необходимо стабилизировать расстройку частот на уровне  $10^{-15}$ .

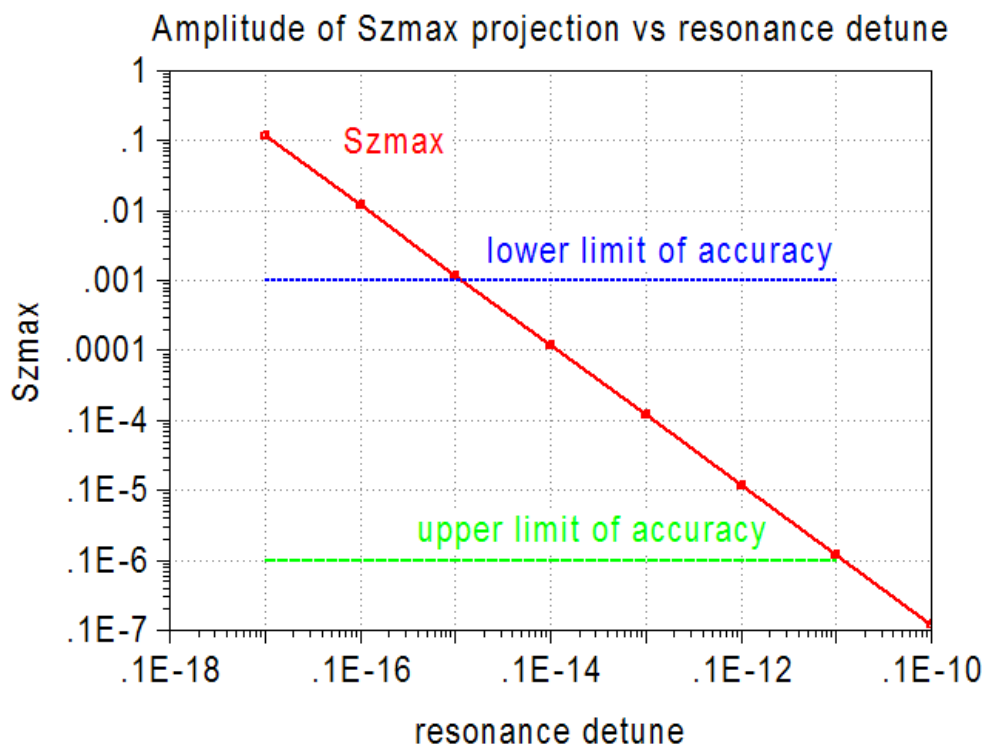


Рис. 1.2. Зависимость максимальной амплитуды  $a_{\max}$  горизонтальной проекции спина от относительной расстройки частот  $\delta$

**Резонанс при переменном магнитном поле.** Рассмотрим теперь систему уравнений (1.4.1,1.4.2) в случае вертикального магнитного ВЧ-поля  $B_y = B_{y_0}(1 + \varepsilon_{\text{RFB}} \cdot \cos \nu_{\text{RF}}\tau)$ . Если электрическое поле отсутствует  $E_x = 0$ , то вектор частот (1.4.1) упрощается до

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \frac{e}{m\gamma} \cdot \frac{\eta}{2} \cdot \gamma\beta_z B_{y_0}(1 + \varepsilon_{\text{RFB}} \cdot \cos \nu_{\text{RF}}\tau), \\ \Omega_y &= -\frac{e}{m\gamma} \cdot \gamma G B_{y_0}(1 + \varepsilon_{\text{RFB}} \cdot \cos \nu_{\text{RF}}\tau), \\ \Omega_z &= 0,\end{aligned}$$

а система уравнений (1.4.9) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{dS_x}{d\tau} &= -\nu_s [1 + \varepsilon_{\text{RFB}} \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi)] S_z, \\ \frac{dS_y}{d\tau} &= -f_e \nu_s [1 + \varepsilon_{\text{RFB}} \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi)] S_z, \\ \frac{dS_z}{d\tau} &= f_e \nu_s [1 + \varepsilon_{\text{RFB}} \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi)] S_y + \nu_s [1 + \varepsilon_{\text{RFB}} \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi)] S_x.\end{aligned}$$

Этот случай соответствует системе (1.4.9), где  $\varepsilon_y = \varepsilon_x$ , при котором, в силу симметрии уравнений, не происходит резонансного роста амплитуды колебаний. Таким образом, при помощи магнитного ВЧ-поля при отсутствии электрического поля, измерение ЭДМ невозможно.

Рассмотрим теперь случай магнитного и электрического ВЧ-полей, действующих одновременно<sup>2</sup>. Система уравнений (1.4.9) принимает следую-

---

<sup>2</sup>такой элемент ускорителя называется фильтром Вина (Wien filter)

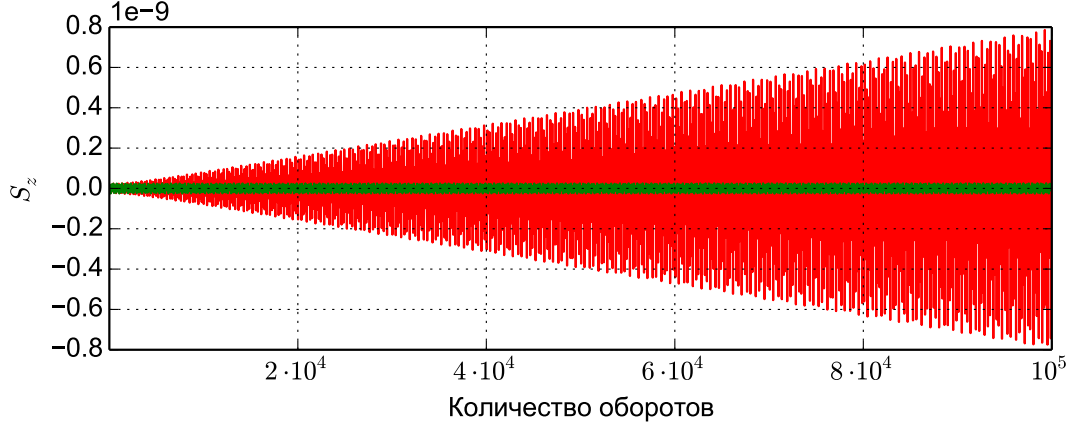


Рис. 1.3. Горизонтальная проекция спина при магнитном ВЧ-поле (изображено зеленым) и при случае ВЧ-фильтра Вина (изображено красным)

щий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_x}{d\tau} &= -\nu_s \left[ 1 + \left( \varepsilon_{\text{RFB}} + \frac{\alpha}{\nu_s} \right) \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi) \right] S_z, \\
 \frac{dS_y}{d\tau} &= -f_e \nu_s \left[ 1 + \left( \varepsilon_{\text{RFB}} - \frac{h}{\nu_e} \right) \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi) \right] S_z, \\
 \frac{dS_z}{d\tau} &= f_e \nu_s \left[ 1 + \left( \varepsilon_{\text{RFB}} - \frac{h}{\nu_e} \right) \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi) \right] S_y + \\
 &\quad + \nu_s \left[ 1 + \left( \varepsilon_{\text{RFB}} + \frac{\alpha}{\nu_s} \right) \cos(\nu_{\text{RF}}\tau + \psi) \right] S_x.
 \end{aligned}$$

При этом  $\varepsilon_y - \varepsilon_x = (\varepsilon_{\text{RFB}} + \alpha/\nu_s) - (\varepsilon_{\text{RFB}} + h/\nu_e) = \alpha/n\nu_s + h/\nu_e$ , т. е. случай эквивалентен рассмотренному выше случаю электрического ВЧ-поля.

Этот случай имеет практическое значение: в ускорителе COSY проводятся эксперименты [67, 66, 55, 56] с использованием ВЧ-фильтра Вина в качестве предварительного эксперимента по измерению ЭДМ. При использовании электрического ВЧ-поля происходит изменение орбиты пучка, проходящего через ВЧ-дефлектор, а в фильтре Вина при одновременном использовании электрического ВЧ-поля и перпендикулярного ему магнитного ВЧ-поля возможно компенсировать изменение орбиты. На рис.1.3 представлены результаты численного решения осцилляций горизонтальной

проекции спина  $S_z$  при использовании ВЧ-фильтра Вина (красным) и при использовании магнитного ВЧ-поля (синим). Как видно из рисунка, при отсутствии электрического поля, резонансного роста амплитуды колебаний  $S_z$  не происходит.

**Основные результаты главы.** В данной главе приведены уравнения спин-орбитального движения частицы в электромагнитных полях. Описан метод измерения ЭДМ протона с использованием электростатического накопительного кольца и показано, что для успешного измерения ЭДМ требуется длительное сохранение поляризации пучка в кольце при проведении эксперимента. Построена математическая модель спин-орбитального движения в накопительном кольце для поиска ЭДМ. Развита теория резонансного метода обнаружения ЭДМ, основанного на использовании ВЧ-поля в магнитном кольце. Показана необходимость стабилизации ВЧ-поля на уровне  $10^{-15}$  при использовании поляриметра с чувствительностью  $10^{-3}$ .

## ГЛАВА 2

# Численное моделирование спин-орбитального движения

Вторая глава посвящена математическому моделированию движения заряженных частиц в управляющих полях. Одним из методов численного моделирования является метод матричных отображений, который используется при изучении длительной эволюции пучка. В этой главе вводится понятие дифференциальной алгебры, показано, как происходит дифференцирование при помощи алгебраических операций. Приводятся канонические уравнения движения заряженных частиц в управляющих полях, понятие оператора эволюции динамических систем и его применение для численного моделирования спин-орбитального движения.

### 2.1 Минимальная дифференциальная алгебра

В этом разделе будем рассматривать пары действительных чисел  $(q_0, q_1)$ ,  $(r_0, r_1), (s_0, s_1) \in \mathbb{R}^2$ . Следуя [20], введем следующим образом операции *сложения*

$$(q_0, q_1) + (r_0, r_1) = (q_0 + r_0, q_1 + r_1),$$

*умножения на скаляр*  $t \in \mathbb{R}$

$$t \cdot (q_0, q_1) = (t \cdot q_0, t \cdot q_1)$$

и умножения на вектор  $(r_0, r_1)$

$$(q_0, q_1) \cdot (r_0, r_1) = (q_0 \cdot r_0, q_0 \cdot r_1 + q_1 \cdot r_0).$$

Множество всех пар  $(q_0, q_1)$  с введенными выше операциями является *алгеброй*, которую будем обозначать  ${}_1D_1$ . Алгебра  ${}_1D_1$  является *линейным пространством* в  $\mathbb{R}^2$ . За  $d$  обозначим пару чисел  $(0, 1)$ ; отметим, что  $d \cdot d = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0, 0)$ .

Легко видеть, что алгебра  ${}_1D_1$  является коммутативным кольцом относительно операций сложения и умножения с единичным элементом  $(1, 0)$ , вследствие ассоциативности векторного произведения

$$(q_0, q_1) \cdot ((r_0, r_1) \cdot (s_0, s_1)) = ((q_0, q_1) \cdot (r_0, r_1)) \cdot (s_0, s_1)$$

и дистрибутивности векторного произведения относительно сложения

$$(q_0, q_1) \cdot ((r_0, r_1) + (s_0, s_1)) = (q_0, q_1) \cdot (r_0, r_1) + (q_0, q_1) \cdot (s_0, s_1).$$

Алгебра  ${}_1D_1$  является *моноидом* относительно векторного умножения, а не группой, т.к. обратный элемент для  $(q_0, q_1)$  существует тогда и только тогда, когда  $q_0 \neq 0$ . В этом случае

$$(q_0, q_1)^{-1} = \left( \frac{1}{q_0}, \frac{-q_1}{q_0^2} \right). \quad (2.1.1)$$

Отметим также, что при  $q_0 > 0$  существует корень из  $(q_0, q_1)$ :

$$\sqrt{(q_0, q_1)} = \left( \sqrt{q_0}, \frac{q_1}{2\sqrt{q_0}} \right). \quad (2.1.2)$$



На алгебре  ${}_1D_1$  может быть введено отношение порядка следующим образом:

$$(q_0, q_1) < (r_0, r_1), \text{ если } q_0 < r_0 \text{ или } q_0 = r_0, q_1 < r_1;$$

$$(q_0, q_1) > (r_0, r_1), \text{ если } (r_0, r_1) < (q_0, q_1);$$

$$(q_0, q_1) = (r_0, r_1), \text{ если } q_0 = r_0, q_1 = r_1.$$

Из определения отношения порядка очевидно, что алгебра  ${}_1D_1$  является вполне упорядоченным множеством. Отношение порядка совместимо с введенными операциями сложения и умножения:

$$\text{если } (q_0, q_1) < (r_0, r_1), \text{ то } (q_0, q_1) + (s_0, s_1) < (r_0, r_1) + (s_0, s_1);$$

$$\text{если } (q_0, q_1) < (r_0, r_1), (s_0, s_1) > (0, 0), \text{ то } (q_0, q_1) \cdot (s_0, s_1) < (r_0, r_1) \cdot (s_0, s_1);$$

$$\text{если } (q_0, q_1) < (r_0, r_1), (s_0, s_1) < (0, 0), \text{ то } (q_0, q_1) \cdot (s_0, s_1) > (r_0, r_1) \cdot (s_0, s_1).$$

Отметим, что  $d$  положительно, но меньше любого положительного числа  $(0, 0) < d = (0, 1) < (r, 0) \forall r > 0$ , поэтому будем говорить, что  $d$  является *бесконечно малым* или *дифференциалом*. Т.к.  $(q_0, q_1) = (q_0, 0) + (0, q_1) = q_0 + d \cdot q_1$ , то  $q_0$  будем называть *действительной частью*  $(q_0, q_1)$ , а  $q_1$  — *дифференциальной частью*. Можно показать, что для любого  $n > 1$  не существует такое  $(q_0, q_1) \in {}_1D_1$ , что  $(q_0, q_1)^n = d$ .

Можно определить операцию *дифференцирования* как отображение  $\partial : {}_1D_1 \rightarrow {}_1D_1$  следующим образом:

$$\partial(q_0, q_1) = (0, q_1).$$

Очевидны следующие свойства дифференцирования:

$$\partial((q_0, q_1) + (r_0, r_1)) = \partial(q_0 + r_0, q_1 + r_1) = (0, q_1 + r_1) = \partial(q_0, q_1) + \partial(r_0, r_1)$$

и

$$\begin{aligned} \partial((q_0, q_1) \cdot (r_0, r_1)) &= \partial(q_0 \cdot r_0, q_0 \cdot r_1 + q_1 \cdot r_0) = (0, q_0 \cdot r_1 + q_1 \cdot r_0) = \\ &= \partial(q_0, q_1) \cdot (r_0, r_1) + (q_0, q_1) \cdot \partial(r_0, r_1). \end{aligned}$$

Алгебра  $({}_1D_1, \partial)$  называется *дифференциальной алгеброй*. Главным применением дифференциальной алгебры в численном моделировании для задач динамики пучков является автоматическое вычисление производных. Вычисление производных основано на следующем наблюдении. Допустим, что нам известны значения функций  $f$  и  $g$  и их производных в нуле. Рассмотрим следующие вектора из  ${}_1D_1$ :  $(f(0), f'(0))$  и  $(g(0), g'(0))$ . Очевидно, что производная функции  $f \cdot g$  в нуле является дифференциальной частью произведения

$$(f(0), f'(0)) \cdot (g(0), g'(0)) = (f(0) \cdot g(0), f'(0) \cdot g(0) + f(0) \cdot g'(0)).$$

Таким образом, если два вектора содержат значения функций и значения производных, то произведение этих векторов содержит значение и производную произведения исходных функций.

Проиллюстрируем это на простом примере вычисления производной функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + (2/x)}$$

при  $x = 4$ . Для этого вычислим значение  $f(x)$  в точке  $(q_0, q_1) = (4, 1)$ . Принимая во внимание выражение для вычисления обратной величины (2.1.1)

и выражение для вычисления корня (2.1.2), получим:

$$\begin{aligned} f((4, 1)) &= \frac{1}{\sqrt{(4, 1)} + 2/(4, 1)} = \frac{1}{(2, 1/4) + 2 \cdot (1/4, -1/4^2)} = \\ &= \frac{1}{(2, 1/4) + (1/2, -1/8)} = \frac{1}{(5/2, 1/8)} = \left( \frac{2}{5}, \frac{-1/8}{(5/2)^2} \right) = \\ &= \left( \frac{2}{5}, -\frac{1}{50} \right). \end{aligned}$$

Таким образом  $f'(4) = -1/50$ , что совпадает со значением производной, вычисленной аналитически:

$$f'(x) = -\frac{1/(2\sqrt{x}) - 2/x^2}{(\sqrt{x} + 2/x)^2}, \quad f'(4) = -\frac{1}{50}.$$

На классе дифференцируемых функций  $C^1(\mathbb{R})$  введем следующим образом операцию  $[.] : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow {}_1D_1$ :

$$[f(x)] = (f(x), f'(x)).$$

Очевидно, что

$$[f + g] = [f] + [g],$$

$$[f \cdot g] = [f] \cdot [g],$$

$$[x] = x + d, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Можно показать, что  $[f(x)] = f([x])$ , поэтому в приведенном выше примере  $f((4 + d)) = (f(4), f'(4))$ .

Этот метод вычисления производных может быть обобщен для вычисления производных более сложных функций, вводя правила вычисления функций  $g_i$  на алгебре  ${}_1D_1$ . Например можно показать, что  $\sin(q_0, q_1) =$

$(\sin(q_0), q_1 \cos(q_0)), \exp(q_0, q_1) = (\exp(q_0), q_1 \exp(q_0))$ , или, более обще,

$$g_i((q_0, q_1)) = (g_i(q_0), q_1 g_i'(q_0)).$$

Любая функция  $f(x)$ , представимая в виде счетного количества сложений и перемножений функций  $g_i$  на  ${}_1D_1$ , удовлетворяет равенству

$$[f(x)] = f([x]).$$

Таким образом можно записать следующее равенство:

$$(f(r), f'(r)) = f(r + d), \quad \forall r \in \mathbb{R} \subset {}_1D_1, \quad (2.1.3)$$

т.е. значение производной функции  $f$  в точке  $r$  равно дифференциальной части  $f(r + d)$ .

**Дифференциальная алгебра  ${}_nD_v$ .** Рассмотрим теперь пространство  $C^n(\mathbb{R}^v)$   $n$ -раз непрерывно дифференцируемых вещественных функций  $v$  аргументов. На пространстве  $C^n(\mathbb{R}^v)$  можно ввести операцию эквивалентности  $=_n$  следующим образом:  $f =_n g$  тогда и только тогда, когда  $f(0) = g(0)$  и все частные производные вплоть до порядка  $n$  равны. Операция  $=_n$  разбивает  $C^n(\mathbb{R}^v)$  на классы эквивалентности; все функции эквивалентные  $f$  будем обозначать  $[f]$ . Обозначим множество всех классов эквивалентности на  $C^n(\mathbb{R}^v)$  за  ${}_nD_v$ .

Введем в  ${}_nD_v$  операции сложения, умножения и умножения на скаляр:

$$[f] + [g] = [f + g],$$

$$t \cdot [f] = [t \cdot f],$$

$$[f] \cdot [g] = [f \cdot g].$$

Таким образом  ${}_n D_v$  образует алгебру. Каждому  $k = \overline{1, v}$  сопоставим отображение  $\partial_k : {}_n D_v \rightarrow {}_n D_v$  следующим образом:

$$\partial_k[f] = \left[ p_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} \right],$$

где

$$p_k(x_1, \dots, x_v) = x_k.$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \partial_k([f] + [g]) &= \partial_k[f] + \partial_k[g], \\ \partial_k([f] \cdot [g]) &= [f] \cdot \partial_k[g] + \partial_k[f] \cdot [g], \end{aligned}$$

т. е.  $\partial_k$  является оператором дифференцирования по  $x_k$ , а  $({}_n D_v, \partial_1, \dots, \partial_v)$  образуют *дифференциальную алгебру*, при  $n = 1, v = 1$  получаем представленную выше дифференциальную алгебру  $({}_1 D_1, \partial)$ .

Определим бесконечно малые  $d_k$  таким образом:

$$d_k = [x_k].$$

В классе эквивалентности  $[f]$  функции  $f \in C^n(\mathbb{R}^v)$  можно выделить многочлен Тейлора  $T_f$  порядка  $n$  в окрестности 0:

$$[f] = [T_f].$$

Обозначим коэффициенты разложения Тейлора за  $c_{j_1, \dots, j_v}$ :

$$T_f(x_1, \dots, x_v) = \sum_{j_1 + \dots + j_v \leq n} c_{j_1, \dots, j_v} x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_v^{j_v},$$

где

$$c_{j_1, \dots, j_v} = \frac{1}{j_1! \cdot \dots \cdot j_v!} \cdot \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_v} f}{\partial x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \partial x_v^{j_v}}.$$

Таким образом любая  $[f]$  может быть представима в виде

$$[f] = [Tf] = \left[ \sum_{j_1 + \dots + j_v \leq n} c_{j_1, \dots, j_v} x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_v^{j_v} \right] = \sum_{j_1 + \dots + j_v \leq n} c_{j_1, \dots, j_v} d_1^{j_1} \cdot \dots \cdot d_v^{j_v},$$

то есть множество  $(1, d_k : k = \overline{1, v})$  является базисом  ${}_n D_v$ . Размерность  $N(n, v)$  базиса есть число сочетаний из  $(n + v)$  по  $v$ :

$$N(n, v) = \dim {}_n D_v = \frac{(n + v)!}{n!v!}.$$

Аналогично случаю для  ${}_1 D_1$ , алгебра  ${}_n D_v$  может быть линейно упорядочена [12] таким образом, что

$$0 < d_k < r \quad \forall r > 0, r \in \mathbb{R}.$$

Будем называть *глубиной*  $[f] \in {}_n D_v$  величину

$$\lambda([f]) = \begin{cases} \text{порядок первой ненулевой производной } f, & [f] \neq 0, \\ n + 1, & [f] = 0, \end{cases}.$$

Глубина  $[f]$  показывает порядок нелинейности разложения. Очевидно, что для любых  $a, b \in {}_n D_v$  верно следующее:

$$\begin{aligned} \lambda(a \cdot b) &= \min(\lambda(a) + \lambda(b), n + 1), \\ \lambda(a + b) &\geq \min(\lambda(a), \lambda(b)). \end{aligned}$$

Рассмотрим отображение  $(O) : M \rightarrow M$ , где  $M \subset {}_nD_v$ . Будем называть такое отображение *сжимающим*, если

$$\lambda(\mathcal{O}(a) - \mathcal{O}(b)) > \lambda(a - b) \quad \forall a, b \in M, \quad a \neq b.$$

Для сжимающих отображений верна следующая теорема о неподвижной точке [12].

**Теорема.** *Для любого сжимающего оператора  $\mathcal{O} : M \rightarrow M$  существует единственная точка  $a \in M$  такая, что*

$$a = \mathcal{O}(a).$$

*Более того, можно показать, что если  $a_0$  — любая точка из  $M$ , то последовательность*

$$a_k = \mathcal{O}(a_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

*сходится за конечное (за  $(n + 1)$ ) число шагов к неподвижной точке  $a$ .*

Это утверждение имеет практическую ценность для автоматического дифференцирования.

Покажем, например, способ вычисления всех частных производных порядка  $n$  функции  $1/f$  в точке  $0$ , если известно значение  $f(0) \neq 0$  и значения частных производных до  $n$  порядка. В терминологии дифференциальной алгебры необходимо найти  $[1/f]$  по известному  $a = [f] \in {}_nD_v$ . Положим  $a_0 = f(0)$ ; тогда  $\lambda(a - a_0) > 0$ . Обозначим  $b = [1/f]$  и  $a \cdot b = 1$ . Заметим, что  $(a - a_0) \cdot b + a_0 \cdot b = 1$  или  $b = 1/a_0 \cdot (1 - (a - a_0) \cdot b)$ . Определим отображение  $\mathcal{O}$  следующим образом:

$$\mathcal{O}(b) = \frac{1}{a_0}(1 - (a - a_0) \cdot b).$$

Это отображение является сжимающим, так как если  $c_1 \neq c_2$ ,  $c_1, c_2 \in {}_n D_v$ , то

$$\begin{aligned} \lambda(\mathcal{O}(c_1) - \mathcal{O}(c_2)) &= \lambda\left(\frac{a - a_0}{a_0} \cdot (c_1 - c_2)\right) = \\ &= \min\left(\lambda\left(\frac{a - a_0}{a_0}\right) + \lambda(c_1 - c_2), n + 1\right) > \lambda(c_1 - c_2). \end{aligned}$$

Таким образом неподвижная точка отображения  $\mathcal{O}$  существует и может быть найдена за  $n + 1$  шагов, то есть после  $n + 1$  алгебраических операций будут найдены частные производные порядка  $n$  искомой функции  $1/f$  в точке 0.

Таким же образом алгебраическим способом по известному  $[f]$  может быть найдено  $[\sqrt{f}]$ , используя сжимающее отображение

$$\mathcal{O} = \frac{a - b^2}{2\sqrt{a_0}}.$$

В [20] приведен аналогичный способ нахождения производных композиции произвольных дифференцируемых функций при помощи дифференциальной алгебры, что реализовано для автоматического дифференцирования в программе COSY Infinity [18].

## 2.2 Матричные отображения

Рассмотрим динамическую систему, задаваемую с помощью дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, t), \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2.1)$$

т.е. такую систему, что для любого начального условия  $\mathbf{z}_1$  во время  $t_1$  существует единственное решение  $\mathbf{z}(t)$ :  $\mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1$ . Для заданного времени  $t_1$  можно определить функцию  $\mathcal{M}_{t_1 \rightarrow t_2}$  такую, что  $\mathbf{z}(t_2) = \mathcal{M}_{t_1, t_2}(\mathbf{z}_1)$ .



Следуя [20], функцию  $\mathcal{M}_{t_1 \rightarrow t_2}$ , которая описывает эволюцию динамической системы из  $t_1$  в  $t_2$ , будем называть *матричным отображением* (transfer map). Очевидно, что матричные отображения обладают следующим свойством:

$$\mathcal{M}_{t_1 \rightarrow t_3} = \mathcal{M}_{t_2 \rightarrow t_3} \circ \mathcal{M}_{t_1 \rightarrow t_2}.$$

Обозначим за  $\mathcal{I}$  *тождественное отображение*, не изменяющее состояние системы:

$$\mathcal{I} = \mathcal{M}_{t_2 \rightarrow t_1} \circ \mathcal{M}_{t_1 \rightarrow t_2}.$$

В случае стационарной динамической системы, т.е. в случае, когда система дифференциальных уравнений (2.2.1) не зависит от времени  $t$ , матричное отображение зависит только от  $\Delta t = t_2 - t_1$  выполняется *групповое свойство*:

$$\mathcal{M}_{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \mathcal{M}_{\Delta t_2} \circ \mathcal{M}_{\Delta t_1}.$$

В динамике пучков часто рассматриваются периодические динамические системы, в этом случае матричное отображение имеет период  $\Delta t$ :

$$\mathcal{M}_{t \rightarrow t + \Delta t} = \mathcal{M}_{t + \Delta t \rightarrow t + 2\Delta t}.$$

В случае периодической системы с периодом  $\Delta t$  достаточно рассматривать эволюцию системы на протяжении  $\Delta t$ .

Накопительное кольцо является примером периодической системы с периодом  $T_{\text{rev}}$ , изучение движения пучка в накопительном кольце может быть сведено к построению матричного отображения системы за один оборот.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\mathbf{z}}{ds} = f(\mathbf{z}, s), \quad (2.2.2)$$

где  $\mathbf{z} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)$ . Такое уравнение задает динамическую систему в шестимерном фазовом пространстве. По известным начальным значениям в точке  $s = s_0$ , значения  $r_i$  могут быть представлены в виде

$$r_i = m_{i,s_0 \rightarrow s}(r_1, \dots, r_6), i = \overline{1, 6} \quad (2.2.3)$$

Шесть функций  $m_{i,s_0 \rightarrow s}$  являются элементами матричного отображения  $\mathcal{M}_{s_0 \rightarrow s}$  движения этой системы из  $s_0$  в  $s$ . Уравнения движения динамической системы 2.2.2 могут быть переписаны в виде

$$r'_i = f_i(s, r_1, \dots, r_6), i = \overline{1, 6}. \quad (2.2.4)$$

Элементы матричного отображения  $\mathcal{M}_{s_0 \rightarrow s}$  быть представлены в виде следующего разложения:

$$m_{i,s_0 \rightarrow s} = \sum_{j=1}^6 \left( r_j \left( (r_i, r_j) + \sum_{k=j}^6 r_k \left( (r_i, r_j r_k) + \sum_{l=k}^6 r_l(\dots) \right) \right) \right), \quad (2.2.5)$$

где за  $(r_i, r_j)$ ,  $(r_i, r_j r_k)$ ,  $\dots$  обозначены неизвестные коэффициенты разложения.

Функции  $f_i(s, r_1, \dots, r_6)$  могут быть записаны в виде разложения в степенной ряд

$$f_i(s, r_1, \dots, r_6) = \sum_{j=1}^6 \left( r_j \left( (r'_i, r_j) + \sum_{k=j}^6 r_k \left( (r'_i, r_j r_k) + \sum_{l=k}^6 r_l(\dots) \right) \right) \right), \quad (2.2.6)$$

где коэффициенты  $(r'_i, r_j)$ ,  $(r'_i, r_j r_k)$  известны.

Подставляя разложение Тейлора  $r_i$  (2.2.3) в разложение для  $r'_i$  (2.2.4) и сравнивая коэффициенты можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций  $(r_i, r_j)$ ,  $(r_i, r_j r_k)$ ,  $(r_i, r_j r_k r_l)$ ,  $\dots$  Такая система уравнений может быть решена для требуемо-

го момента времени  $s$ . Зная коэффициенты разложения в формуле (2.2.5), также можно записать матричное отображение  $\mathcal{M}_{s_0 \rightarrow s}$  в широко используемой нотации TRANSPORT [21]:

$$r_i(s) = \sum_{j=1}^6 R_{ij} r_j(0) + \sum_{j,k=1}^6 T_{ijk} r_j(0) r_k(0) + \sum_{i,j,k=1}^6 U_{ijkl} r_j(0) r_k(0) r_l(0) + \dots,$$

где  $R_{ij} = (r_i, r_j)$ ,  $T_{ijk} = (r_i, r_j r_k)$ ,  $U_{ijkl} = (r_i, r_j r_k r_l)$  в приведенных выше обозначениях. Матрицы  $R$ ,  $T$ ,  $U$  соответствуют линейной, квадратичной и кубической частям матричного отображения  $\mathcal{M}_{0 \rightarrow s}$ . Следует отметить, что получение элементов  $\mathcal{M}$  для высоких порядков нелинейности является сложной вычислительной задачей.

Движение частицы в управляющих полях описывается дифференциальным уравнением (2.2.2), на правую часть которого можно наложить некоторые ограничения (в зависимости от управляющего элемента), и коэффициенты матричного отображения могут быть вычислены аналитически. Аналитические представления матричных отображений для основных элементов ускорителей известны для третьего порядка нелинейности [39, 38]; получение аналитических представлений более высоких порядков сопряжено с большими вычислительными трудностями при разложении  $f_i$  в ряды и сопоставлении коэффициентов для составления систем уравнений. Используя методы дифференциальной алгебры и методы численного интегрирования можно получить представление матричных отображений высоких порядков нелинейности, что будет рассмотрено в следующем разделе.

## 2.3 Применение методов дифференциальной алгебры для построения отображений

Рассмотрим способ применения методов дифференциальной алгебры для практического построения отображений произвольных элементов ускорителя. Отметим, что, кроме редких случаев простых систем, невозможно получить матричное отображение ускорителя в аналитическом виде. Тем не менее, используя численное интегрирование, возможно вычислить траекторию движения заряженной частицы из начального состояния в конечное.

**Уравнения движения.** Как и в Главе 1, вместо декартовой системы координат будем далее использовать криволинейную систему координат, связанную с равновесной траекторией. В качестве независимой переменной будем использовать длину  $s$ , измеряемую вдоль равновесной траектории. За  $h(s)$  обозначим мгновенную кривизну равновесной траектории, радиус кривизны будем обозначать  $\rho(s)$ . Положение частицы в циклическом ускорителе также может быть определено с помощью угла в горизонтальной плоскости

$$\alpha = \int_{s_0}^s h ds.$$

Следуя [16, 13], для описания движения будем использовать следующие координаты:

$$\begin{aligned} r_1 &= x, & r_2 &= a = p_x/p_0, \\ r_3 &= y, & r_4 &= b = p_y/p_0, \\ r_5 &= l = v_0(t - t_0), & r_6 &= \delta_K = (K - K_0)/K_0, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где  $p_0$ ,  $K_0$ ,  $v_0$ ,  $t_0$  — импульс, кинетическая энергия, скорость и время движения равновесной частицы соответственно,  $x$ ,  $y$ ,  $p_x$ ,  $p_y$  — координаты ча-

стицы в движущейся системе координат.

Уравнения движения в декартовой системе координат имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \mathbf{F}, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{\mathbf{P}}{\sqrt{1 + \mathbf{P}^2/m^2c^2}},$$

где  $\mathbf{P}$  — импульс частицы в декартовых координатах. Перепишем уравнение для импульса в интегральной форме:

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}(s_0) + \int_{t(s_0)}^{t(s)} \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{P}(s_0) + \int_{s_0}^s \mathbf{F}(s)t' ds,$$

где  $t' = dt/ds$ .

Далее перейдем к координатам, связанным с равновесной траекторией:

$$\mathbf{p} = \Theta(s) \cdot \left( \mathbf{P}(s_0) + \int_{s_0}^s \mathbf{F}(s)t' ds \right), \quad (2.3.2)$$

где  $\Theta(s)$  — матрица поворота, имеющая вид

$$\Theta(s) = \begin{pmatrix} \cos\left(\int_{s_0}^s h ds\right) & 0 & \sin\left(\int_{s_0}^s h ds\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\int_{s_0}^s h ds\right) & 0 & \cos\left(\int_{s_0}^s h ds\right) \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя (2.3.2) по  $s$ , получим уравнение движения в подвижной системе координат:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{F}t' + (0, h, 0) \times \mathbf{p}. \quad (2.3.3)$$

Рассмотрим движение частицы за  $\Delta s$ . За этот промежуток частица перемещается на расстояние  $(1 + hx)\Delta s$ , т.е. отношение угла наклона тра-

ектории этой частицы к равновесной траектории есть  $\Delta x / ((1 + hx)\Delta s)$ . С другой стороны, отношение угла наклона траектории частицы к равновесной есть  $p_x/p_z$ , поэтому

$$x' = (1 + hx)\frac{p_x}{p_z}, y' = (1 + hx)\frac{p_y}{p_z}.$$

В первом порядке приближения также

$$\Delta t = \frac{1}{v}\sqrt{\Delta s^2(1 + hx)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Из двух предыдущих уравнений следует

$$t' = (1 + hx)\frac{1}{v}\sqrt{1 + \frac{p_x^2 + p_y^2}{p_z^2}} = (1 + hx)\frac{1}{v}\frac{p}{p_z}. \quad (2.3.4)$$

В случае движения частицы в электромагнитных полях на нее действует сила Ньютона-Лоренца:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Из (2.3.1) следует, что мгновенная кинетическая энергия частицы

$$K = K_0(1 + \delta K) - qV(x, y, s),$$

где  $V$  — электрический потенциал (1.1.2).

Введем релятивистский коэффициент  $\zeta$  следующим образом:

$$\zeta = \frac{K}{mc^2}.$$

Так как  $K = mc^2((1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1)$ , можно записать  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 1 + \zeta$ ,

откуда

$$\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\zeta(2+\zeta)}}{1+\zeta}. \quad (2.3.5)$$

Из уравнения (2.3.5) и выражения для импульса  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2} = m\mathbf{v}(1+\zeta)$  получим

$$\frac{p}{mc} = \sqrt{\zeta(2+\zeta)}. \quad (2.3.6)$$

Уравнения (2.3.5), (2.3.6) позволяют получить скорость и импульс частицы, зная величину  $\zeta$ . Разделив (2.3.6) на (2.3.5) получим

$$\frac{p}{v} = m(1+\zeta). \quad (2.3.7)$$

Из уравнений (2.3.4) и (2.3.7) получаем уравнение движения для  $l$ :

$$l' = v_0 t' = (1+hx) \frac{p/v}{p_0/v_0} \frac{p_0}{p_z} = (1+hx) \frac{1+\zeta}{1+\zeta_0} \frac{p_0}{p_z}. \quad (2.3.8)$$

Найдем отношение  $p_z/p_0$ , учитывая определения (2.3.1) и уравнение (2.3.6):

$$\frac{p_z}{p_0} = \sqrt{\frac{p^2}{p_0^2} - a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{\zeta(2+\zeta)}{\zeta_0(2+\zeta_0)} - a^2 - b^2}. \quad (2.3.9)$$

Теперь уравнение (2.3.3), учитывая (2.3.4) и (2.3.8), принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{p_x}{p_0}, \frac{p_y}{p_0}, \frac{p_z}{p_0} \right) &= q \frac{\mathbf{E}}{p_0} \frac{t'}{p_0} + q \frac{\mathbf{v}}{vp_0} \times \mathbf{B} (1+hx) \frac{p}{p_z} + h \left( \frac{p_z}{p_0}, 0, -\frac{p_x}{p_0} \right) = \\ &= \left( \frac{\mathbf{E}}{\chi_E} l' + \frac{\mathbf{p}}{p_0} \times \frac{\mathbf{B}}{\chi_B} (1+hx) \frac{p_0}{p_z} \right) + h \left( \frac{p_z}{p_0}, 0, -\frac{p_x}{p_0} \right) = \\ &= \left( \frac{1+\zeta}{1+\zeta_0} \frac{p_0}{p_z} \frac{\mathbf{E}}{\chi_E} + \left( a \frac{p_0}{p_z}, b \frac{p_0}{p_z}, 1 \right) \frac{\mathbf{B}}{\chi_B} \right) + h \left( \frac{p_z}{p_0}, 0, -\frac{p_x}{p_0} \right), \end{aligned}$$

где  $\chi_E = p_0 v_0 / q$ ,  $\chi_B = p_0 / q$  — электрическая и магнитная жесткости соответственно.

Таким образом, уравнения движения частицы в подвижной системе координат можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
x' &= a(1 + hx) \frac{p_0}{p_z}, \\
y' &= b(1 + hx) \frac{p_0}{p_z}, \\
l' &= (1 + hx) \frac{1 + \zeta p_0}{1 + \zeta_0 p_z}, \\
a' &= \left( \frac{1 + \zeta p_0 E_x}{1 + \zeta_0 p_z \chi_E} - \frac{B_y}{\chi_B} + b \frac{p_0 B_z}{p_z \chi_B} \right) (1 + hx) + h \frac{p_z}{p_0}, \\
b' &= \left( \frac{1 + \zeta p_0 E_y}{1 + \zeta_0 p_z \chi_E} - \frac{B_x}{\chi_B} + a \frac{p_0 B_z}{p_z \chi_B} \right) (1 + hx),
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

где

$$\begin{aligned}
\zeta &= \frac{K_0 - qV(x, y, s)}{m_0 c^2}, \\
\frac{p_z}{p_0} &= \sqrt{\frac{\zeta(2 + \zeta)}{\zeta_0(2 + \zeta_0)} - a^2 - b^2}.
\end{aligned}$$

Движение спина определяется уравнением Т-БМТ (1.1), (1.1.6):

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{e}{\gamma m_0 c} \left( -(1 + G\gamma)\mathbf{B} + \frac{G}{1 + \gamma} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{B}) + \left( G + \frac{1}{1 + \gamma} \right) \mathbf{P} \times \frac{\mathbf{E}}{c} \right),$$

где  $G = (g - 2)/2$  — аномальный магнитный фактор,  $\mathbf{P} = \mathbf{p}/m_0 c$  — нормализованный импульс, и

В подвижной системе координат это уравнение принимает следующий вид [14]:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = t' \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S} + \mathbf{h} \times \mathbf{S}, \tag{2.3.11}$$

где  $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$  — вектор, состоящий из кривизн подвижной системы координат в плоскостях  $YZ$ ,  $XZ$  и  $XY$  соответственно.

Уравнения (2.3.10) и (2.3.11) определяют спин-орбитальное движение



частицы во внешних электромагнитных полях. Отметим, что эти уравнения не учитывают такие эффекты, как синхротронное излучение<sup>1</sup> и влияние спина на орбитальное движение<sup>2</sup>.

**Описание управляющих полей.** Электромагнитные поля удовлетворяют уравнениям Максвелла 1.1.4, кроме того,  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  и  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ . В этом случае электрический и магнитный потенциалы могут быть представлены в виде ряда:

$$V(x, y, s) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}(s) \frac{x^i y^j}{i!j!}. \quad (2.3.12)$$

Волновое уравнение (1.1.3) имеет вид уравнения Лапласа  $\Delta V = 0$  и в подвижной системе координат:

$$\Delta V = \frac{1}{1+hx} \frac{\partial}{\partial x} \left( (1+hx) \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1}{1+hx} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{1+hx} \frac{\partial V}{\partial s} \right) = 0.$$

Подставляя разложение поля (2.3.12) в уравнение Лапласа получим следующее рекуррентное соотношение для коэффициентов разложения поля  $a_{i,j}$  [13]:

$$\begin{aligned} a_{i,j+2} = & -a''_{i,j} - iha''_{i-1,j} + ih'a'_{i-1,j} - a_{i+2,j} - (3i+1)ha_{i+1,j} - \\ & - 3iha_{i-1,j+2} - i(3i-1)h^2a_{i,j} - 3i(i-1)h^2a_{i-2,j+2} - \\ & - i(i-1)^2h^3a_{i+1,j} - i(i-1)(i-2)h^3a_{i-3,j+2}, \quad (2.3.13) \end{aligned}$$

где  $a_{i,j} = 0$  для  $i, j < 0$ . Это соотношение позволяет вычислить все коэффициенты разложения поля  $a_{i,j}$ , зная лишь коэффициенты при  $j = 0, 1$ . В случае электрического потенциала  $a_{i,1} = 0$  и коэффициенты разложения

<sup>1</sup>синхротронное излучение — излучение, испускаемое заряженными частицами при движении в сильном магнитном поле

<sup>2</sup>эффект Штерна–Герлаха

поля можно найти, зная разложение  $E_x$  поля в горизонтальной плоскости. В случае магнитного поля  $a_{i,0} = 0$  и для нахождения коэффициентов разложения достаточно знать разложение поля  $B_y$ . Если поле не зависит от  $s$ , соотношения значительно упрощаются:

$$a_{i,j+2} = -a_{i+2,j} - ia_{i-1,j} - (i-1)a_{i+1,j}.$$

На практике при построении матричных отображений порядка  $n$  достаточно вычислить разложение полей до порядка  $n$  [12].

**Краевые поля.** При исследовании ускорительных колец важное значение имеют краевые поля элементов ускорителя. Краевые поля являются источниками нелинейных аберраций, влияют на динамическую апертуру и другие параметры ускорителя [17, 108]. Для учета краевых полей применяют различные математические модели [124, 25, 22]. Рассмотрим модель, применяемую в программе COSY Infinity, аппроксимирующую поле на оптической оси элемента с использованием функции Энге [18].

В этой модели магнитное поле  $\mathbf{B}(x, y, s)$  (или электрическое поле  $\mathbf{E}(x, y, s)$ ) элемента ускорителя с апертурой  $D$  и длиной  $L$  представляется в виде

$$\mathbf{B}(x, y, s) = \begin{cases} F(s) \cdot \mathbf{B}(x, y, l_0), & s \notin [l_0, l_0 + L], \\ \mathbf{B}(x, y, l_0), & s \in [l_0, l_0 + L], \end{cases}.$$

где  $l_0$  — положение  $s$  элемента в кольце, а функция  $F(s)$  называется *функцией Энге* и имеет следующий вид:

$$F(s) = \frac{1}{1 + \exp(a_1 + a_2 \cdot (s/D) + \dots + a_6 \cdot (s/D)^5)}. \quad (2.3.14)$$

Коэффициенты  $a_1, \dots, a_6$  зависят от аппаратной реализации элемента и определяются экспериментальным образом.

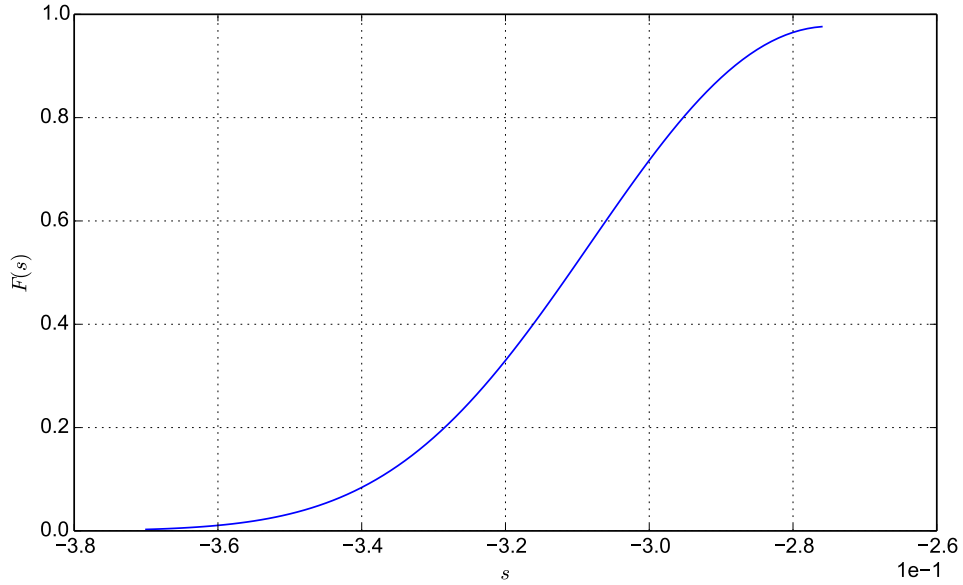


Рис. 2.1. График функции Энге для квадруполя HGQ

Например, для сверхпроводящих квадруполей HGQ<sup>3</sup> ускорителя ЛНС измеренные экспериментально коэффициенты [87] выглядят следующим образом:

$$a_1 = -0,939436, \quad a_2 = 3,824163, \quad a_3 = 3,882214,$$

$$a_4 = 1,776737, \quad a_5 = 0,296383, \quad a_6 = 0,013670.$$

График функции Энге с этими коэффициентами приведен на рис. 2.1.

Так как функция Энге непрерывно дифференцируема по  $s$  до любого порядка, коэффициенты разложения электрического и магнитного полей с краевыми полями в ряд (2.3.12) могут быть найдены, используя соотношения (2.3.13), при этом поля удовлетворяют уравнениям Максвелла (1.1.4).

**Решение уравнений движения.** Уравнения движения (2.3.10) имеют вид

$$\frac{d}{ds}\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, s). \quad (2.3.15)$$

Получить матричное отображение можно при помощи методов численного интегрирования, решив уравнение движения при помощи метода Рунге-

<sup>3</sup>HGQ — High-Gradient Quadrupole — квадруполь с большим градиентом до 215 Т/м, апертура 70 мм

Кутта и заменив все арифметические операции на операции с элементами дифференциальной алгебры  ${}_n D_v$ . Этот простой метод получения решений реализован в некоторых программах [74, 112, 33], но он имеет ряд недостатков, в частности точность вычисленных производных падает в зависимости от порядка вычислений, а также вычисление производных затруднительно по измеренным экспериментально данным [20].

Другой метод построения решений основан на вычислении оператора эволюции  $\exp(\Delta s L_{\mathbf{f}})$ . Для введения понятия оператора эволюции сначала определим производную Ли по функции  $\mathbf{f}$ .

Пусть  $g(s)$  есть произвольная функция в фазовом пространстве, а  $\mathbf{z}(s)$  — решение (2.3.15). Тогда

$$\frac{d}{ds}g = \nabla g \frac{d}{ds}\mathbf{z} + \frac{\partial g}{\partial s} = \nabla g \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial s}g = L_{\mathbf{f}}g,$$

где  $L_{\mathbf{f}} = \mathbf{f}\nabla + \partial_s$  — производная Ли по функции  $\mathbf{f}$ . Зная начальные координаты динамической системы  $\mathbf{z}_0$  можно получить координаты через  $\Delta s$ , используя производную Ли:

$$\mathbf{z}_{\Delta s} = \exp(\Delta s L_{\mathbf{f}})\mathbf{z}_0,$$

а  $\exp(\Delta s L_{\mathbf{f}})$  называется *оператором эволюции*. Производная Ли используется для построения матричных отображений:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} L_{\mathbf{f}}^i. \quad (2.3.16)$$

Уравнение движения спина (2.3.11) аналогичным образом задает производную Ли

$$L_{\mathbf{f}} = \mathbf{f}\nabla_{\mathbf{z}} + (W \cdot \mathbf{S})\nabla_{\mathbf{s}},$$

и можно построить матричное отображение для спина:

$$\mathbf{S} = \mathbb{A}(\mathbf{z})\mathbf{S}_0,$$

где  $\mathbb{A}(\mathbf{z}) \in SO(3)$ , то есть  $\mathbb{A}(\mathbf{z})$  — ортонормальная матрица, зависящая от фазовых координат.

Для построения матричного отображения (2.3.16) необходимо вычислить значения  $\mathbf{f}$  на  ${}_nD_v$  и производных  $\partial_s^k$ . Можно показать [20], что оператор  $\exp(\Delta s L_{\mathbf{f}})$  сходится на  ${}_nD_v$ , и для построения отображения порядка  $n$  требуется одно вычисление  $\mathbf{f}$  и  $n - 1$  операций дифференцирований. Этот метод построения отображений реализован в таких программах как MARYLIE [40] и COSY Infinity [18].

**Длительная эволюция пучка.** Вследствие теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема [23] матричное отображение  $\mathcal{M}$  динамической системы должно обладать свойством *симплектичности* [49]:

$$M \cdot J \cdot M^T = J,$$

где  $M = \partial \mathcal{M} / \partial \mathbf{z}$  — якобиан  $\mathcal{M}$ , а матрица  $J$  имеет следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Симплектические отображения могут быть описаны в компактном виде при помощи *производящих функций* [49] в смешанных координатах:

$$F_1(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_f), F_2(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_f), F_3(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_f), F_4(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f),$$

где  $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i$  — начальные координаты и импульс,  $\mathbf{q}_f, \mathbf{p}_f$  — конечные координаты и импульс соответственно. Производящие функции удовлетворяют следующим условиям:

$$(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) = J \cdot \nabla F_1,$$

$$(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_f) = J \cdot \nabla F_2,$$

$$(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_f) = J \cdot \nabla F_3,$$

$$(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_f) = J \cdot \nabla F_4.$$

Зная матричное отображение  $\mathcal{M}$  можно получить любую производящую функцию. Для примера приведем алгоритм нахождения производящей функции  $F_2$ . Положим  $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ , где  $\mathcal{M}_1$  — часть отображения, описывающее преобразование координат, и  $\mathcal{M}_2$  — часть отображения, описывающее преобразование импульсов. Разобьем таким же образом тождественное отображение  $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$ . Нам требуется найти  $\mathcal{F}$  такое, что  $(\mathbf{q}_f, \mathbf{p}_i) = \mathcal{F}(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_f)$ . Для этого введем отображение  $\mathcal{N} = (\mathcal{I}_1, \mathcal{M}_2)$ . Тогда

$$(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_f) = \mathcal{N}(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i).$$

Можно показать [20], что для существования производящей функции необходимо существование обратного  $\mathcal{N}$  отображения  $\mathcal{N}^{-1}$ . В этом случае

$$(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) = \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_f).$$

При помощи композиции  $(\mathcal{M}_1, \mathcal{I}_2)$  и  $\mathcal{N}^{-1}$  получаем искомое  $\mathcal{F}$ :

$$(\mathbf{q}_f, \mathbf{p}_i) = ((\mathcal{M}_1, \mathcal{I}_2) \circ \mathcal{N}^{-1})(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_f) = \mathcal{F}(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_f).$$

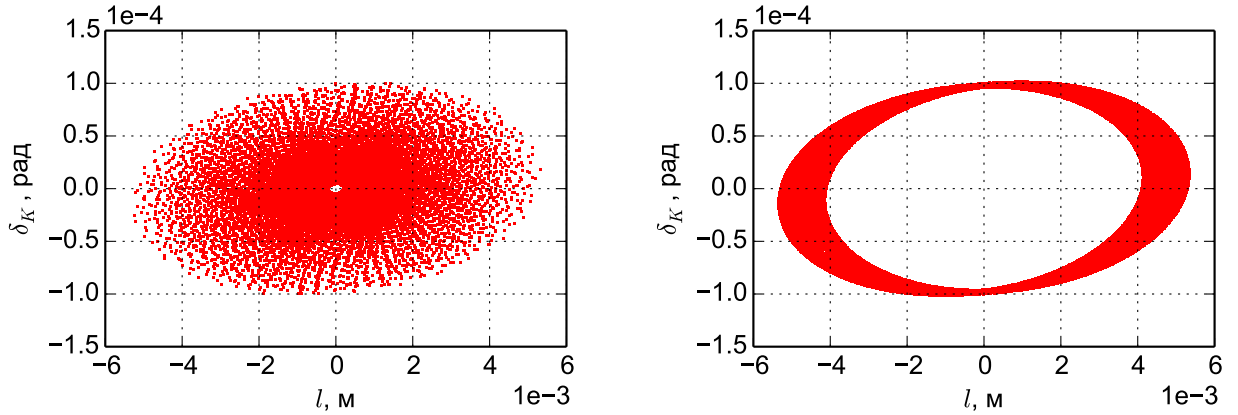
Производящая функция  $F_2$  есть не что иное как градиент  $\mathbf{F}$ :  $F_2 = \nabla \mathbf{F}$ . Аналогичным образом можно найти производящие функции другого типа; кроме того, при помощи этого алгоритма можно вычислить симплектическое преобразование  $\mathcal{M}$ , зная производящую функцию. Вычисление производящих функций легко производить алгебраически, используя методы, описанные в разделе (2.1).

Для симплектификации отображения  $\mathcal{M}$  порядка  $n$  предложен [15] следующий алгоритм:

- a) вычислить какую-либо производящую функцию порядка  $n$ , используя приведенный выше метод;
- b) по восстановленной производящей функции получить отображение  $\mathcal{M}_s$ , при этом порядок нелинейности этого отображения может быть выше, чем порядок исходного отображения  $\mathcal{M}$ .

Этот метод используется для получения симплектического отображения в программе COSY Infinity. Метод симплектификации используется в том числе для получения симплектического отображения по измеренным экспериментально данным [108].

Следует отметить, что на практике симплектичность отображений нарушается из-за ошибок округления с машинной точностью и из-за ошибок численного интегрирования, возникающих при рассмотрении элементов с краевыми полями. Нарушение симплектичности из-за своей малости в некоторых случаях не влияет на результаты моделирования, но для изучения траектории частицы на протяжении длительного периода вре-



(a) Нарушение симплектичности

(b) Симплектичный случай

Рис. 2.2. Траектория движения частицы за 100000 оборотов с начальным отклонением  $\delta_K = 10^{-3}$  в продольной фазовой плоскости  $l-\delta_K$

мени требуется соблюдение условий симплектичности, в противном случае невозможно обеспечить сохранение фазового объема в течение периода вычисления траектории. На рис. 2.2 представлена траектория частицы в ускорителе, найденная при помощи отображения, нарушающего условия симплектичности (a) и при помощи скорректированного отображения (b). Через 100000 оборотов при нарушении симплектичности фазовый объем значительно уменьшился, как видно из рис. 2.2а, что является неадекватным представлением реального движения частицы. В действительности частица совершает продольные осцилляции в плоскости  $l-\delta_K$  по замкнутой траектории, которая может быть найдена при помощи симплектического метода. Таким образом при изучении длительной эволюции пучка необходимо использовать симплектические методы решения уравнений движения.

**Основные результаты главы.** В данной главе формализован метод матричных отображений для изучения длительной эволюции спин-орбитального движения в задачах физики пучков, сформулированных в Главе 1. Для этого вводится понятие производной Ли и оператора эволюции динамической системы, а использование методов дифференциальной алгебры



позволяет существенно ускорить автоматическое вычисление частных производных, требуемое при построении матричного отображения системы. Уравнения движения заряженных частиц в управляющих полях приведены в форме, используемой для построения матричных отображений. Показано, что симплектичность матричного отображения является важным требованием к матричному отображению при изучении длительной эволюции пучка. Приведен способ симплектификации отображения, основанный на использовании производящих функций. Приведенные численные методы лежат в основе программы COSY Infinity для моделирования спин-орбитального движения.

## ГЛАВА 3

# Программный комплекс для моделирования спин-орбитальной динамики

В данной главе приводится описание разработанного в рамках диссертационного исследования комплекса программ для моделирования динамики пучков. Разработанный комплекс позволяет автоматизировать расчеты, возникающие при изучении ускорителей заряженных частиц. В качестве вычислительного ядра для численного моделирования спин-орбитального движения использована программа COSY Infinity, а описанный комплекс программ является надстройкой, которая позволяет пользователю эффективно использовать возможности вычислительного ядра, выполнять задачи в параллельном режиме, обрабатывать и хранить в базе данных результаты исследований. Основные результаты главы опубликованы в [115, 121, 114].

### 3.1 Программа моделирования COSY Infinity

Методы дифференциальной алгебры, представленные в Главе 2, позволяют производить расчеты циклических ускорителей с большой вычислительной эффективностью. Разработано несколько программных пакетов, использующих методы дифференциальной алгебры для расчетов динамики пучка, например MXYZTPLK [74], ZLIB [112], MARYLIE [40], COSY Infini-

ty [18]. Задачи, возникающие при проектировании накопительного кольца для эксперимента по поиску ЭДМ, требуют изучение динамики поляризованных пучков на протяжении длительного времени. Программа COSY Infinity, разработанная в Университете штата Мичиган (MSU — Michigan State University), предназначена для математического моделирования движения пучков в ускорителях частиц. Для изучения динамики пучков COSY Infinity позволяет строить матричные отображения произвольных порядков нелинейности, используя математические модели, представленные в Главе 2. В частности, программа позволяет производить операции над элементами алгебры  $_n D_v$ , используя специализированный язык программирования FOX. Язык программирования FOX является динамически типизированным языком с поддержкой таких типов переменных, как действительные и комплексные числа, интервалы, векторы, элементы дифференциальной алгебры, модели Тейлора [71].

Система COSY Infinity предоставляет следующие возможности:

- автоматическое дифференцирование функций;
- решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений;
- операции над числами Леви-Чивиты [98];
- модуль языка FOX для вычислений с произвольной точностью;
- пакет COSY-GO для глобальной оптимизации, основанный на моделях Тейлора и интервальных методах [71];
- пакет COSY-VI для верифицированного интегрирования, использующий приближенные алгебраические потоки и модели Тейлора [102];
- модуль `cosy.fox` для моделирования динамики пучков.

Модуль `cosy.fox` является частью пакета COSY Infinity и предназначен для моделирования движения заряженных частиц в электромагнитных полях.

Этот модуль используется для нахождения траекторий частиц в электромагнитных элементах, моделирования динамики спина частиц, моделирования нелинейных эффектов в ускорителях, вычисления параметров ускорителя, таких как частоты, хроматичности. В программе используется система координат (2.3.1).

COSY Infinity поддерживает большинство магнитных и электростатических элементов современных ускорителей:

- квадруполь, секступоль, октуполь и мультиполь произвольных порядков, как электростатические, так и магнитные;
- поворачивающие элементы: магниты и электростатические deflectors;
- статические фильтры Вина;
- ВЧ-резонаторы;
- соленоиды и другие элементы.

Возможно моделирование элементов с учетом краевых полей. Для модели краевых полей используются функции Энге (2.3.14).

Приведем пример программы на языке FOX для расчета траектории протона с энергией 1 ГэВ в магнитной ФODO-структуре (фокусирующий квадруполь — свободный промежуток — дефокусирующий квадруполь — свободный промежуток):

```

INCLUDE 'COSY';                                {использовать пакет cosy.fox}
PROCEDURE RUN;
OV 5 3 0;                                       {5 порядок вычислений, 3-мерное пространство}
RP 1000.0 1.00728462 1.0; {энергия и масса равновесной частицы: протоны 1ГэВ}
UM;                                             {задание единичного отображения}
MQ 0.2 1 0.01; {магнитный квадруполь, длина 20см, потенциал 1кВ, аперт. 1см}
DL 0.5;                                         {свободный промежуток длиной 0.5м}
MQ 0.2 -0.8 0.01;                             {дефокусирующий квадруполь}

```

```

DL 0.5;                                {свободный промежуток длиной 0.5м}
sr 0.001 0 0 0 0 0 0 0 1;             {задание начальных координат частицы: x=1мм}
tr 100000 1 1 2 1 2 0 0 -1000; {расчет траектории частицы за 100000 оборотов}
ENDPROCEDURE;
RUN;
END;

```

Опыт использования COSY Infinity в Институте ядерной физики г. Юлих показал корректность результатов, полученных с использованием программы [66]. Проведено сравнение результатов, полученных при помощи COSY Infinity и при помощи интегрирования уравнений движения [117, 53]. Тем не менее, следует отметить сложность использования программы и необходимость тщательной проверки полученных результатов. Кроме того, модуль динамики пучков `cosy.fox` при расчете движения не учитывает влияние ЭДМ частицы на движение спина.

В рамках диссертационного исследования был разработан комплекс программ RSX, предоставляющий графический интерфейс к COSY Infinity, построенный на идеологии виртуального ускорителя. Для расчетов задач, возникающих при проектировании ускорителя для измерения ЭДМ, в модуль `cosy.fox` были включены процедуры, позволяющие учитывать влияние ЭДМ на спин соответственно уравнениям (1.1.6).

### 3.2 Концепция виртуального ускорителя

Численное моделирование движения заряженных частиц в ускорителях играет важнейшую роль в разработке современных ускорительных комплексов. Проектирование установок для различных целей привело к пересмотру самого процесса разработки и обслуживания ускорителей. Существование таких сложных и дорогих систем невозможно без соответствующей вычислительной поддержки как на этапе проектирования, так и на

этапе функционирования. Для повышения эффективности вычислительных процессов были разработаны различные технологии (в первую очередь можно упомянуть проект EPICS [32]), позволяющие интегрировать программное и аппаратное обеспечение, используемое для разработки и функционирования управляющих систем больших научных установок, в один комплекс. Использование подобных комплексов возможно в случае соответствия математической модели реальным данным с экспериментальной установки.

Виртуальный ускоритель — суть комплекс программ, позволяющий предсказать поведение реального ускорителя при помощи различных методов численного моделирования, а также оценить требуемые настройки управляющей системы для достижения требуемого пучка, в зависимости от эксперимента. [119]. Для сложной системы управления численное моделирование является очень трудоемким процессом и вычислительные затраты требуют использования высокопроизводительных методов вычисления с использованием суперкомпьютерных кластеров или распределенных систем типа GRID [118]. В процессе разработки ускорителя рассматриваются различные эффекты, такие как вертикальная, горизонтальная и продольная устойчивость, влияние собственного заряда пучка на движение, рассеяние ускоряемых частиц на остаточном газе, синхротронное излучение и другие.

После появления первых вычислительных машин большая часть моделирования проводится на программах моделирования, одной из первых программ для моделирования движения в ускорителе был разработанный в 1979 году пакет TRANSPORT [22]; с тех пор было разработано множество других программ. Многие программы предназначены для расчетов специализированных задач, также существуют универсальные программы для моделирования динамики пучков. Все программы разработаны для

различных аппаратных платформ, но большинство из них может быть с легкостью портировано на современные архитектуры, так как большинство программ написаны на языке Fortran, который является распространенным языком программирования в научной среде и выпускается для различных операционных систем.

Для описания структуры ускорителя, т.е. расположения фокусирующих и дефокусирующих квадрупольей, поворачивающих магнитов, ВЧ-станций, свободных промежутков, секступольей, и других элементов, к сожалению не существует унифицированного формата; кроме того программы для моделирования используют различные системы координат, а также специфические форматы выходных данных. Предпринимаются попытки создания унифицированного языка, например проект AML<sup>1</sup> [88], SXF<sup>2</sup> [45], но на настоящее время эти языки не получили широкого распространения.

Таким образом, перед использованием какого-либо пакета для моделирования пользователь должен изучить специфику применения данного пакета в каждом конкретном случае. Концепция виртуального ускорителя позволяет использовать возможности программ для численного моделирования при помощи «одного окна», предоставляющего пользователю унифицированный интерфейс. Единый интерфейс может быть использован как при разработке ускорителя, так и при управлении функционирующей установкой.

Для управления реальными установками концепция виртуального ускорителя используется в таких комплексах, как DLCS<sup>3</sup> [50], TPS<sup>4</sup> [28], SNS<sup>5</sup> [99] и многих других. Разработка подобного программного обеспечения позволяет создать реалистичную среду для экспериментальных физиков.

---

<sup>1</sup>AML — Accelerator Markup Language — язык разметки ускорителя

<sup>2</sup>SXF — Standard eX-change Format — стандарт формата для обмена

<sup>3</sup>DLCS — Dalian Compact Light Source — компактный синхротронный источник в Даляне, Китай

<sup>4</sup>TPS — Taiwan photon source — синхротронный источник в Синьчжу, Тайвань

<sup>5</sup>SNS — Spallation Neutron Source — нейтронный источник, Оук-Ридж, Теннесси, США

### 3.3 Структура программного комплекса

Как описано в разделе 3.1, для изучения спин-орбитального движения в электростатическом ускорителе программа моделирования COSY Infinity является лучшим выбором из существующих пакетов, поэтому она была выбрана в качестве вычислительного ядра программного комплекса. Каждый элемент ускорителя может быть представлен в виде матричного отображения, которое является оператором преобразования фазового пространства. Матричные отображения каждого элемента вычисляются при помощи методов дифференциальной алгебры, как описано в разделе 2.3, отображение ускорителя вычисляется при помощи конкатенации отображений всех элементов. Полученное при помощи COSY Infinity матричное отображение всего кольца может быть использовано для вычисления численных характеристик структуры, таких как частоты бетатронных колебаний, хроматичность, коэффициент расширения орбиты и др. Также матричные отображения используются для вычисления траекторий частиц, что может быть проделано на многопроцессорных вычислительных кластерах. Перед использованием COSY Infinity пользователь должен изучить синтаксис описания элементов, особенности задания начальных данных пучка, использование матричных отображений для вычисления характеристик, что является трудоемким процессом.

После вычисления траекторий пучка обычно требуется провести анализ полученных данных. Например, при расчете электростатического накопительного кольца для поиска ЭДМ для каждого изменения начальной структуры требуется вычислить спиновые частоты и время декогеренции спина. Анализ данных вручную является длительным процессом, но вычисление многих величин может быть полностью автоматизировано. После анализа пользователь получает наглядное представление требуемых величин.



Для унификации доступа к моделирующему программному обеспечению был разработан программный комплекс RSX, предоставляющий пользовательский интерфейс к вычислительному ядру, подготовку исходных кодов для COSY Infinity, параллельное выполнение вычислительных задач, обработку данных, автоматизацию и хранение в базе данных результатов исследований.

**Проведение вычислительного эксперимента.** Для автоматизации вычислительного эксперимента программный комплекс позволяет пользователю задать структуру ускорителя, сохранить ее в базе данных и в линейном приближении вычислить характеристики структуры. Если полученные характеристики удовлетворяют пользователя, то система предоставляет пользователю возможность подробно изучить динамику пучка при помощи вычисления траекторий движения в ускорителе и дальнейшего анализа данных. Экспериментатор может выбрать начальное распределение частиц в пучке (нормальное или равномерное распределение частиц в фазовом пространстве), начальную поляризацию, количество оборотов пучка в кольце, выбрать метод симплектификации и порядок вычисления матричных отображений. По выбранным начальным параметрам и заданной структуре, программный комплекс создает корректный исходный файл на языке FOX для COSY Infinity и добавляет его в очередь на выполнение. Диспетчер процессов выбирает из очереди готовые к выполнению задачи и передает на конкретный вычислительный узел для выполнения; в случае успешного завершения процесса данные сохраняются в базе данных.

После моделирования движения в ускорителе программный комплекс предоставляет средства анализа данных, траектории движения могут быть графически представлены в виде фазового портрета, часто используется Фурье анализ для частотного анализа данных. Пользователь, изучив проанализированные данные, может поменять параметры ускорителя (из-

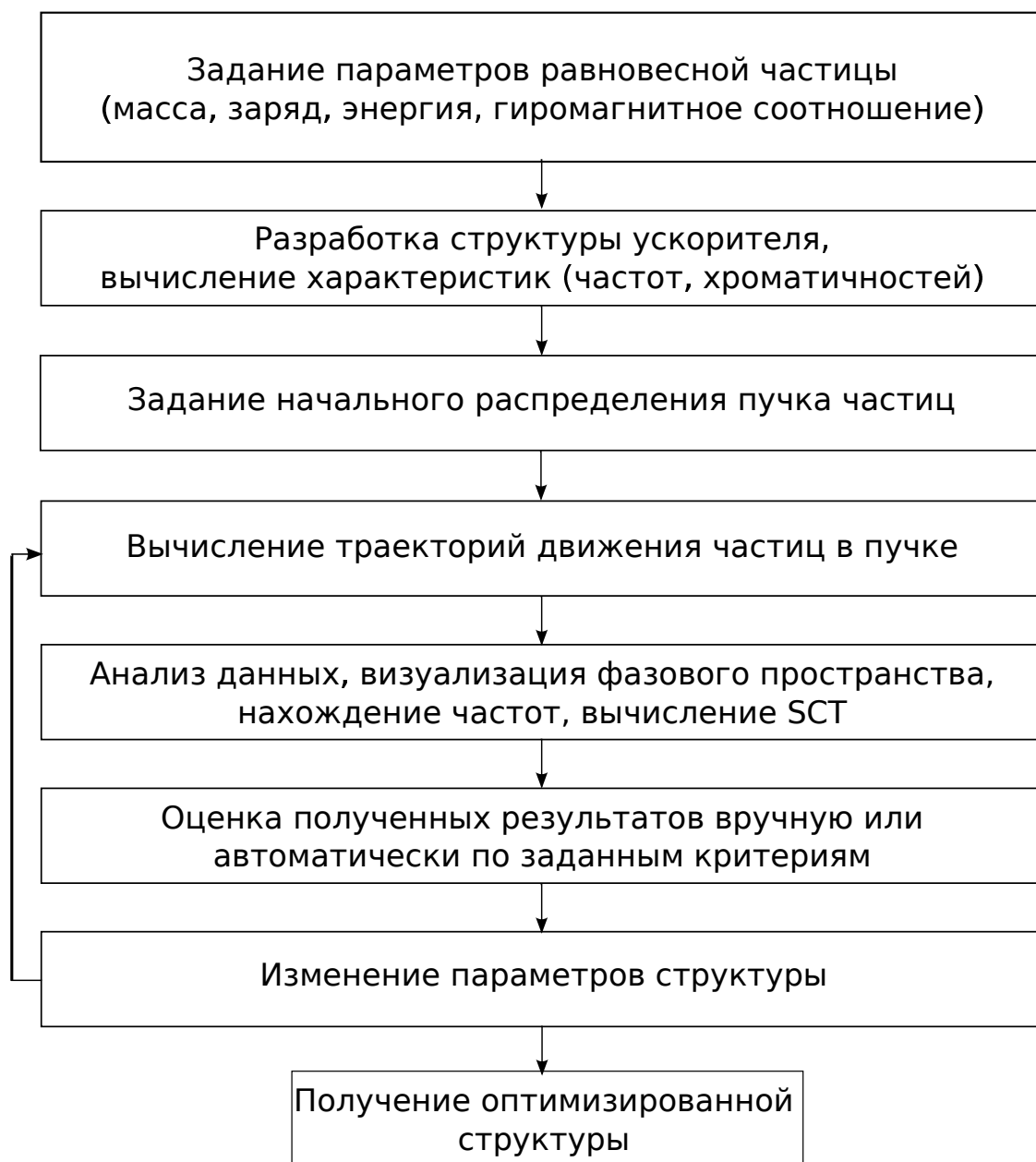


Рис. 3.1. Схема вычислительного эксперимента

менить силу квадрупольей, секступольей, частоту ВЧ-станции и т.п.) и повторить эксперимент. Кроме того, система RSX позволяет изменять параметры структуры ускорителя и проводить анализ данных автоматически, графически представляя зависимость полученных данных от измененного параметра. Автоматический подбор параметров используется для оптимизации структуры, максимизации или минимизации требуемых величин. Например при разработке структуры электростатического ускорителя для эксперимента по поиску ЭДМ требуется повысить время декогеренции спи-

на SCT, что может быть сделано подбором секступольных компонент в поворотных дефлекторах.

Схема проведения вычислительного эксперимента при разработке структуры ускорителя представлена на рис. 3.1.

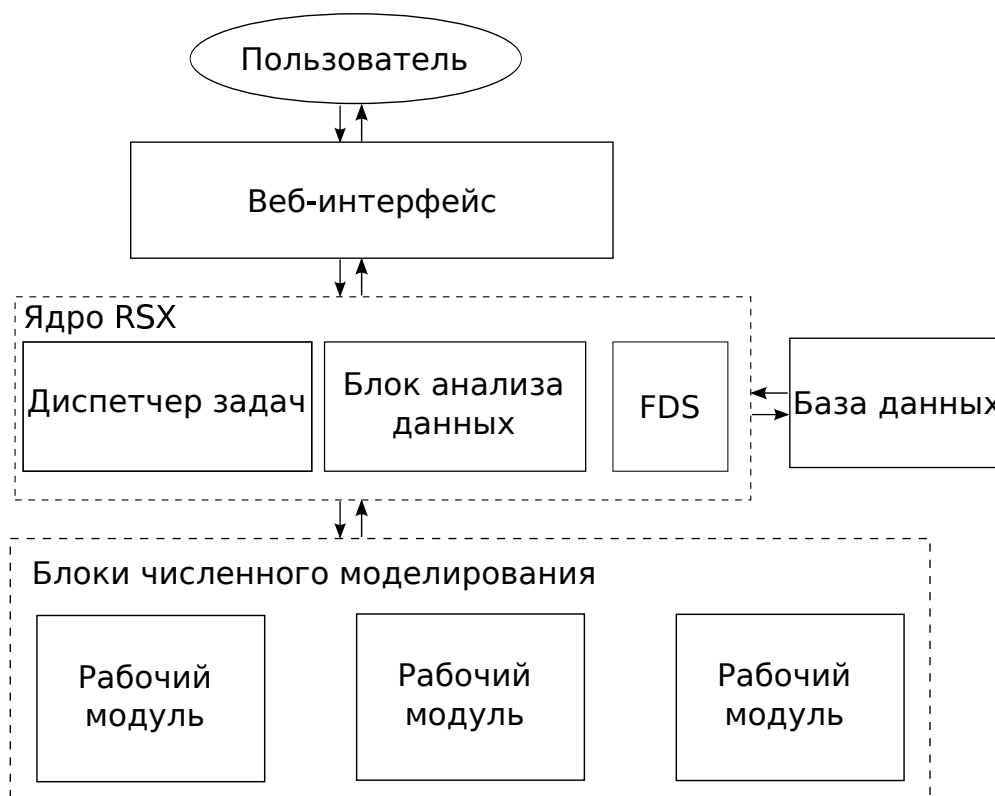


Рис. 3.2. Структура комплекса RSX

**Структура вычислительного комплекса.** Пользователь взаимодействует с программным комплексом при помощи веб-браузер через графический веб-интерфейс. Веб-интерфейс разработан с использованием современных технологий, таких как Django, XHTML, CSS, AJAX, jQuery. В качестве веб-сервера может быть использован любой сервер с поддержкой WSGI, например lighttpd. Веб-интерфейс взаимодействует с ядром программного комплекса по распространенной модели взаимодействия Model-View-Controller. Далее приведено подробное описание структуры разработанного комплекса программ. Структура программного комплекса представлена на рис. 3.2.

Ядро системы состоит из диспетчера задач, блока анализа данных и сервера распределения файлов (File Distribution Service — FDS). Каждое действие пользователя, требующее численного моделирования, является *задачей* (task) ядра, диспетчер задач сортирует задачи по приоритету и распределяет задачи по рабочим модулям (engine). Рабочими модулями могут являться любые машины, на которые установлен специальный сервис обработки задач. При первом обращении к рабочему модулю происходит компиляция из исходных кодов COSY Infinity — вычислительного ядра, затем компиляция пакета для моделирования динамики пучков COSY.bin. После компиляции вычислительного ядра рабочий модуль готов к выполнению задач, состоящих из исходного FOX-файла и метаданных, описывающих требуемое для выполнения количество процессоров, входные и выходные данные.

Рабочий модуль при завершении вычислительной задачи отправляет результаты выполнения диспетчеру задач, диспетчер проверяет корректность выполнения и добавляет результат в базу данных. Все выполненные задачи сохраняются для последующей обработки и предоставляются по запросу пользователя. Если виртуальный эксперимент был проведен ранее, то при необходимости результаты эксперимента будут извлечены из базы данных, без проведения повторного численного моделирования.

После проведения численного моделирования данные, полученные от рабочего модуля, могут быть обработаны. Обработка данных заключается в фильтрации и анализе данных. Фильтрация требуется чтобы исключить из рассмотрения нестабильные частицы с траекториями не попадающими в физическую апертуру канала. После фильтрации данные анализируются требуемым образом в зависимости от эксперимента, например проводится частотный анализ с целью поиска орбитальных или спиновых частот. Обработка данных и численное моделирование в некоторых случаях могут выполняться одновременно.

В качестве языка программирования выбран Python [84] — высокоуровневый язык программирования, широко используемый для многих задач, таких как анализ данных, разработка веб-сайтов и графических интерфейсов. Язык имеет простой синтаксис, поддерживает объектно-ориентированную парадигму программирования (ООП), большое количество сторонних библиотек для анализа и визуализации данных. Python входит в большинство дистрибутивов Linux, поэтому рабочие модули не требуют установки дополнительного программного обеспечения.

**Интерфейс программного комплекса.** Для унификации доступа к системе был разработан веб-интерфейс, предоставляющий пользователю возможность использовать комплекс RSX при помощи современных браузеров. Такой подход позволяет одинаково поддерживать все операционные системы, в т.ч. Microsoft Windows, GNU/Linux, Apple MacOS, при наличии браузера с поддержкой XHTML и JavaScript. Для разработки веб-приложений на языке программирования Python существует множество инструментариев, например Pylons [83], TurboGears [106], Zope [113], Twisted [65], CherryPy [27], Django [35] и многие другие. С учетом специфики требований комплекса RSX для разработки был выбран инструментарий Django. Этот инструментарий является одним из самых популярных средств разработки веб-сайтов для языка Python, он представляет собой реализацию концепции Model-View-Controller (MVC), имеет встроенный интерфейс управления пользователями, абстрагирует доступ к базе данных, поддерживает кэширование запросов, хорошо документирован.

Концепция Model-View-Controller была предложена в 1979 году [85]; она часто используется при разработке программ с графическим интерфейсом и заключается в разделении модели данных приложения (Model), пользовательского интерфейса (View) и взаимодействия с пользователем (Controller). Контроллер модели MVC соответствует представлению (View)

модели Django, логика представления модели MVC соответствует шаблонам (Template) модели Django. Каждая страница интерфейса, с которой взаимодействует пользователь, является отображением шаблона Django. Например, пучок частиц является моделью Django, а страница с визуализацией фазового пространства есть отображение шаблона.

Встроенный интерфейс управления пользователями позволяет обеспечить разделение рабочих пространств пользователей, чтобы каждый пользователь имел доступ только к своим виртуальным экспериментам. Кроме того, администратор системы имеет возможность добавить дополнительные вычислительные узлы в систему, ограничить количество используемых процессоров пользователями.

В Django реализована технология Object-relational-mapping (ORM, объектно-реляционное отображение), связывающая объекты языка Python и их представление в базе данных. Таким образом, разработчик, использующий методы объектно-ориентированного программирования, получает возможность сохранять объекты ООП в базе данных без затрат на написание кода. Каждая модель Django (структура ускорителя, пучок, начальное распределение частиц, виртуальный эксперимент) является классом Python, что значительно упрощает разработку системы.

Страницы интерфейса RSX используют XHTML 1.0 [107] в качестве языка разметки, а интерактивные элементы, такие как формы, ползунки, кнопки, разворачивающиеся списки, для работы используют библиотеку jQuery [105]. Библиотека jQuery используется для разработки интерактивных веб-страниц на языке JavaScript, предоставляя функции, не привязанные к конкретному браузеру и платформе. Таким образом обеспечивается кросс-платформенность интерактивных элементов интерфейса, что подтверждается проведенным тестированием на различных браузерах для различных операционных систем.

Для обмена данными между браузером пользователя и веб-сервером применяется технологии Ajax (Asynchronous JavaScript and XML — асинхронный JavaScript и XML) — фоновый обмен данными с сервером без перезагрузки страницы. Этот подход позволяет повысить скорость работы интерфейса и уменьшает количество данных, передаваемых по сети. В качестве примера использования данной технологии можно привести страницу с подбором параметра структуры ускорителя в линейном приближении: при переборе параметра (длины свободного промежутка, градиента квадруполя) в пределах от  $a$  до  $b$  с интервалом  $(b - a)/N$  клиентская часть отправляет в фоновом режиме  $N$  запросов и, при получении результатов расчетов, представляет пользователю зависимость характеристики ускорителя (бетатронные частоты, хроматичности, и т.д.) в реальном времени без перезагрузки страницы.

Для использования системы пользователь должен быть успешно аутентифицирован, аутентификация пользователя происходит на первом шаге работы с системой. При работе с системой пользователь должен задать параметры равновесной частицы, т. е. массу, энергию, заряд, аномальный магнитный момент. После задания параметров пользователь создаст структуру ускорителя, используя язык описания ускорителя, представленный в Приложении А. Для удобства пользователя также разработан модуль подсветки синтаксиса языка описания ускорителя для библиотеки CodeMirror [51]. При помощи CodeMirror реализовано поле ввода структуры ускорителя, что позволяет использовать подсветку процедур и управляющих конструкций. При создании структуры допускается использование свободных параметров элементов, например потенциал квадруполя может быть обозначен за  $Q\_STRENGTH$ , который будет являться свободным параметром. Значение свободных параметров структуры указывается отдельно (см. рис. В.19).

Далее система позволяет вычислить параметры ускорителя в линейном приближении, такие как длину, бетатронные, синхротронные и спиновые частоты, хроматичности и другие величины. Кроме того, может быть построен график зависимости какой-либо величины ускорителя в зависимости от свободного параметра, например, на рис. В.20 представлена зависимость бетатронных частот  $\nu_x, \nu_y$  от параметра Q\_STRENGTH. Полученные графики могут быть использованы для выбора оптимальной структуры кольца.

После подбора необходимых параметров система RSX позволяет провести моделирование движения частиц в созданном ускорителе. Для этого пользователь задает начальное распределение частиц в пучке, а также параметры моделирования, такие как порядок нелинейности при построении матричных отображений, количество оборотов, метод симплектификации.

Для моделирования система RSX создает файл для COSY Infinity на языке FOX и отправляет на выполнение свободному рабочему модулю. В случае, когда число частиц в начальном распределении превышает задаваемый пользователем максимум, система разбивает файл на несколько частей и отправляет их разным рабочим модулям. Таким образом большие вычислительные задачи выполняются параллельно на нескольких рабочих модулях. Кроме того, COSY Infinity не позволяет моделировать большое количество частиц одновременно из-за ограничений, связанных с распределением памяти. В случае успешного завершения вычислительных процессов происходит обработка и визуализация данных, что рассматривается в разделе 3.5.

Более подробное описание интерфейса программы приводится в Приложении В, там же приведены снимки экрана работающей системы.

**Рабочий модуль.** Непосредственно компьютерное моделирование выполняется при помощи *рабочих модулей*. Каждый модуль представляет из



себя программу на языке Python 2.6, которую можно установить на большинство компьютеров под управлением ОС GNU/Linux. На рис. 3.3 представлена схема рабочего модуля.

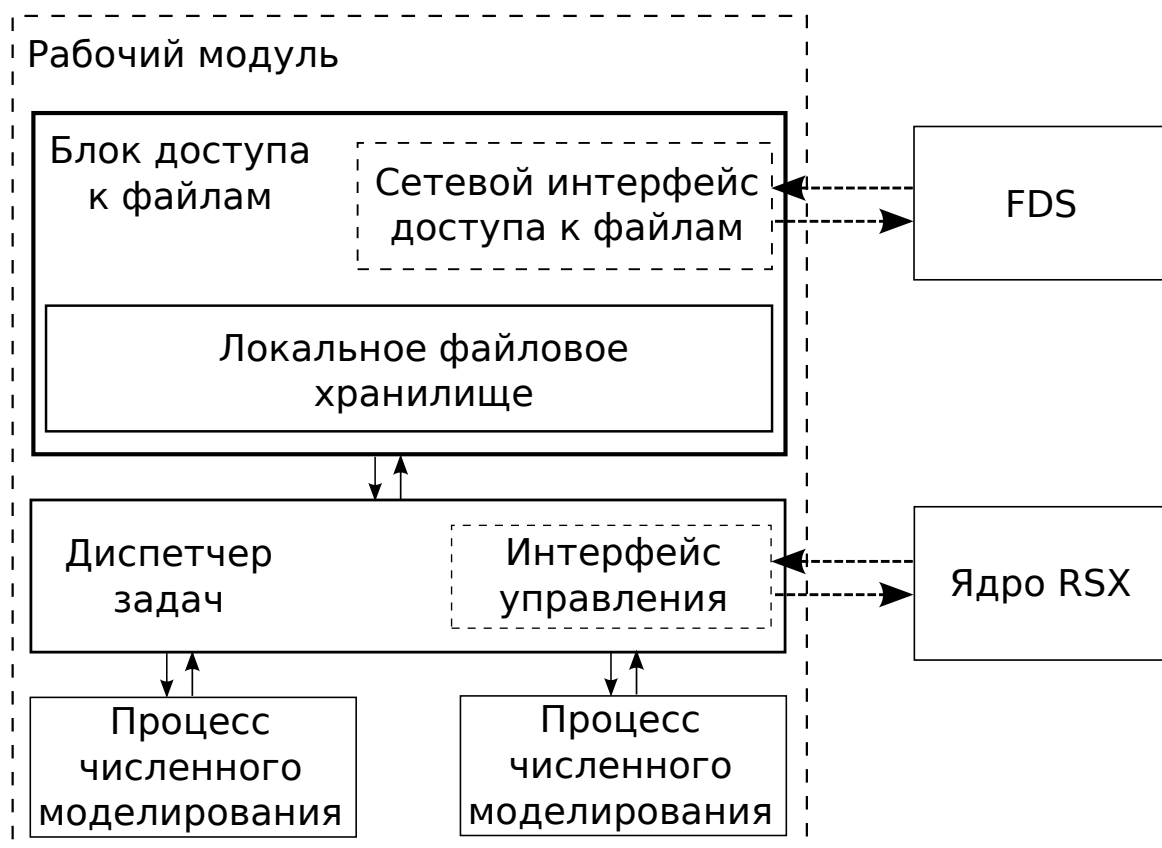


Рис. 3.3. Схема рабочего модуля RSX

Рабочий модуль имеет сетевой интерфейс управления, через который передаются вычислительные задачи, а также происходит обмен файлами. Сетевой интерфейс для обмена данными использует библиотеку RpyC [44], которая предоставляет протокол удаленного выполнения процедур (Remote Procedure Call — RPC). Полученные через интерфейс управления задачи содержат файлы на языке FOX, которые сохраняются в локальном файловом хранилище. После получения задач через сетевой интерфейс они обрабатываются диспетчером задач. Диспетчер задач управляет очередностью выполнения полученных задач в зависимости от приоритета и запрошенного количества процессоров. При установке рабочего модуля указывается максимальное разрешенное для использования количество процессоров, а

каждая задача запрашивает у диспетчера число потоков, которые она будет использовать.

При наличии свободных процессоров рабочий модуль отправляет задачу на выполнение. Для этого создается временная директория, в которую из локального файлового хранилища копируются интерпретатор COSY Infinity, пакет `cosy.fox`, а также другие файлы при необходимости. Если требуемый файл отсутствует в локальном хранилище, то отправляется запрос на сервер распределения файлов и требуемый файл копируется по сети. После создания директории со всеми требуемыми файлами запускается COSY Infinity. Результаты выполнения сохраняются в локальное хранилище, а временная рабочая директория удаляется. Информация о завершении выполнения отправляется ядру комплекса RSX.

**Сервер распределения файлов.** Если система содержит несколько рабочих модулей, то необходимо обеспечить доступ всех рабочих модулей к используемым файлам. Для хранения результатов моделирования и других файлов используется *сервер распределения файлов* (File distribution service — FDS). FDS представляет собой сервер, содержащий информацию о всех файлах и их местоположении в системе.

Например, после окончания компьютерного моделирования файл с результатами хранится на модуле А. Для использования этих результатов модуль В запрашивает у FDS расположение файла и получает сетевой адрес интерфейса управления модулем А. После определения сетевого адреса модуль В копирует запрошенный файл в локальное хранилище.

Один и тот же файл (например, исполняемый файл COSY Infinity) может храниться несколькими рабочими модулями. Файлы различаются по ключевой сумме MD5.

**База данных.** Все структуры ускорителей, начальных распределений частиц, результатов выполнения задач, создаваемых пользователем, сохра-

няются в единой базе данных. В качестве базы данных используется реляционная СУБД PostgreSQL [76].

Перед анализом структуры ускорителя происходит проверка наличия такой структуры в базе данных. Если структура анализировалась ранее, то повторный анализ не происходит, а система использует сохраненные ранее данные. Таким образом значительно ускоряется анализ ускорителя при поиске оптимальной структуры при помощи подбора свободных параметров.

Также в базе данных содержатся ссылки сервера распределения файлов.

### **3.4 Параллельное выполнение процессов**

Компьютерное моделирование длительной эволюции пучков в циклических ускорителях является сложной вычислительной задачей. Вычисление матричных отображений с учетом нелинейности высоких порядков занимает длительное время. Например, вычисление матричного отображения седьмого порядка электростатического ускорителя с включенным расчетом краевых полей занимает более шести часов процессорного времени.

COSY Infinity позволяет сохранять отображения в файл, и загружать из файла при необходимости. Таким образом для моделирования движения пучков частиц с различными начальными распределениями можно избежать повторного построения отображения. Однако же при изучении спиновой динамики матрицы спинового отображения не могут быть сохранены в файл и загружены. Для решения этой проблемы в пакет моделирования динамики пучков `cosy.fox` были включены соответствующие процедуры работы с отображениями спина. При моделировании спин-орбитальной динамики программный комплекс RSX сохраняет все полученные отображения

в базу данных и, при необходимости повторного использования (например, при моделировании движения разных пучков в одной и той же структуре), не строит матричное отображение заново. Таким образом многократно повышается скорость и удобство проведения компьютерных экспериментов, особенно при проведении моделирования с учетом высоких порядков нелинейности.

Также COSY Infinity поддерживает параллельное выполнение на архитектурах MPI (Message Passing Interface) [30]. MPI является стандартом высокопроизводительных вычислений, различные реализации стандарта поддерживаются большинством суперкомпьютерных кластеров. MPI предоставляет набор процедур для передачи сообщений между вычислительными процессами, выполняющимися в гомогенной среде. Пакет COSY Infinity содержит команду PLOOP...END PLOOP для одновременного выполнения циклов на нескольких MPI-процессах. Эта команда может использоваться для параллельного вычисления матричных отображений. Для этого необходимо разбить задание структуры на части, которые будут выполняться разными процессами, и объединить полученные отображения в матричное отображение всего кольца. Например, код для параллельного вычисления отображения ФОДО-структуры, приведенной в конце Приложения 1, может выглядеть следующим образом:

```
PLOOP I 1 NP;           { NP - количество процессов           }
  IF I=1;               { код для выполнения процессом 1     }
  UM; MQ 0.2 0.3 0.05; { единичная матрица и квадруполь       }
  DL 0.1;               { свободный промежуток                   }
  magnetic_bend 15 10 0.05; { поворотный магнит                       }
  DL 0.1;               { свободный промежуток                   }
  SMM MAPS I;          { сохранить матрицу в MAPS(*,I)         }
ENDIF;
```

```

IF I=2;                { код для выполнения процессом 2      }
UM; MQ 0.4 -0.3 0.05; { единичная матрица и квадруполь      }
DL 0.1;                { свободный промежуток                          }
magnetic_bend 15 10 0.05;{ поворотный магнит                          }
DL 0.1;                { свободный промежуток                          }
MQ 0.2 0.3 0.05;      { квадруполь                                    }
SMM MAPS I;           { сохранить матрицу в MAPS(*,I)              }
ENDIF;
ENDPLOOP MAPS;        { переменная MAPS доступна всем процессам }
IF is_root=1; UM;     { код для выполнения процессом 1          }
LOOP I 1 NP;          { применение последовательно матриц      }
PMM 6 MAPS I; AMM MAPS I;{ частей структуры MAPS(*,i)              }
ENDLOOP;              { и получение матрицы всего кольца        }
ENDIF;

```

Написание такого рода кодов вручную затруднительно, поэтому система RSX позволяет автоматически создавать код для выполнения на MPI версиях COSY Infinity. При распределении вычислительной нагрузки учитывается сложность вычисления элементов, т. к. вычисление отображения для квадруполя или ВЧ-резонатора происходит быстрее, чем для поворотного магнита или дефлектора.

После вычисления отображения обычно требуется провести моделирование движения пучка в полученной структуре. Расчет траектории частицы на протяжении  $N$  оборотов заключается в последовательном применении отображения к начальным координатам  $N$  раз. При рассмотрении задач длительной эволюции пучка, в котором частицы не оказывают влияния друг на друга (задачи без учета собственного заряда), возможно параллеливание вычислительных задач естественным образом по частицам, то есть различные части пучка рассчитываются разными процессами. Для

этого не требуется использование MPI-версии программы, управление процессами возможно при помощи комплекса RSX.

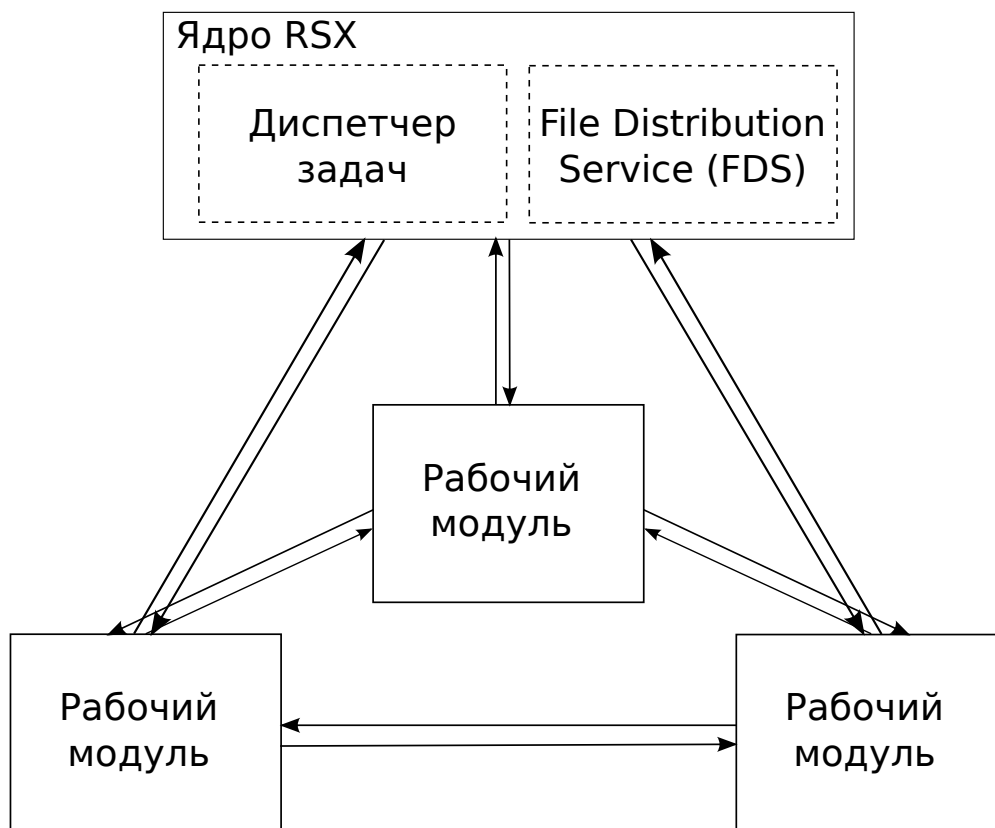


Рис. 3.4. Схема взаимодействия рабочих модулей

Для моделирования большого количества частиц комплекс RSX создаст, в зависимости от настроек, несколько вычислительных задач. Диспетчер задач ядра RSX отправляет задачи на выполнение свободным рабочим модулям. При необходимости происходит обмен файлами между рабочими модулями. Необходимость обмена файлами возникает в том случае, когда матричное отображение ускорителя сохранено на рабочем модуле А, а моделирование движения пучка проводится на рабочем модуле В. В этом случае рабочий модуль В запрашивает у FDS местоположение файла с матричным отображением, а затем, используя управляющий интерфейс модуля А, копирует файл. Взаимодействие рабочих модулей и ядра RSX изображено на рис. 3.4.

### 3.5 Обработка данных

В результате параллельного компьютерного моделирования полученные данные могут занимать значительный объем. Например, результаты моделирования движения пучка, состоящего из 40960 частиц, на протяжении  $10^8$  оборотов занимают более 3 ГБ дискового пространства. Обработка данных, полученных при помощи компьютерного моделирования движения пучка в накопительном кольце, подразумевает фильтрацию, проверку на корректность, анализ, визуализацию. Файл с результатами движения, полученный при помощи COSY Infinity, содержит большое количество вспомогательных строк и предупреждений. Необработанный файл с выводом орбитального движения имеет вид:

```
# number of rays:      3
# iteration  ray      X          A          Y          B          T          D
      0      0  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
      0      1  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
      0      2  0.3000000E-02  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00

      1      0  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
      1      1  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
      1      2 -0.1584425E-01 -0.2056017E-01  0.0000000E+00  0.0000000E+00 -0.1027591E-03  0.0000000E+00

*** WARNING IN POT1, ERROR NORM =
0.5746619043177931E-003

      2      0  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
      2      1  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
      2      2  0.4196950E-01  0.5828291E-01  0.0000000E+00  0.0000000E+00 -0.1052689E-02  0.0000000E+00
```

Файл с выводом спиновых проекций также содержит вспомогательные строки:

```
# number of spin vectors:      3
# iteration  vector  S_X          S_Y          S_Z
      0      0  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
      0      1  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.1000000E+01
      0      2  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.1000000E+01

      1      0  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
      1      1  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
      1      2  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
```

2	0	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00

В этих примерах имеют значение лишь три строки с выводом движения частицы, остальные строки необходимо отфильтровать при помощи специального скрипта. Комплекс RSX автоматически фильтрует результаты моделирования, после фильтрации в файле остаются лишь строки с результатами моделирования. Кроме того, так как COSY Infinity использует отдельные файлы для вывода орбитального и спинового движения, для упрощения последующей обработки данных и построения графиков RSX объединяет оба файла в один.

Некоторые частицы в пучке не входят в область устойчивости, т. е. их координаты через несколько оборотов превосходят физическую апертуру канала. Скрипт, входящий в состав RSX, сравнивает координаты частиц в файле с результатами вычислений с пределом, заданным пользователем, и, в случае превышения предела, исключает из рассмотрения такие частицы, таким образом оставляя лишь корректные результаты моделирования.

Каждый рабочий модуль моделирует небольшой блок частиц, поэтому после моделирования результаты должны быть объединены в общий файл. Рабочие модули производят фильтрацию результатов и проверку на корректность, а затем результаты, полученные разными рабочими модулями, объединяются в один файл для анализа. Таким образом полученный файл с результатами моделирования движения пучка, состоящего из 40960 частиц, на протяжении  $10^8$  оборотов занимает около 650 МБ дискового пространства.

Полученные данные обычно требуется графически представить пользователю. По полученным данным могут быть построены фазовые портреты движения в плоскостях  $X-A$ ,  $Y-B$ ,  $l-\delta K$ , а также графики осцилляции спиновых компонент  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$ . Для построения графиков в RSX использу-



ется программа Gnuplot [111], которая часто применяется в научной среде и позволяет проводить быстрое отображение большого объема данных. В Приложении В на рис. В.23 представлено изображение движения в фазовой плоскости  $Y-B$ , полученное при помощи Gnuplot. На рис. В.24 представлен график осцилляции проекции спина  $S_x$ , также полученный при помощи Gnuplot. Так как комплекс RSX использует Django, то полученные изображения могут быть сохранены при помощи кэширующей подсистемы, таким образом не требуется повторное построение изображений при запросе пользователя.

Также часто возникающей задачей является частотный анализ полученных данных. Для проведения частотного анализа используется быстрое преобразование Фурье библиотеки NumPy [57]. NumPy является открытой библиотекой для обработки больших массивов данных для языка Python. Используя преобразование Фурье можно по численным данным определить спектр бетатронных частот  $\nu_x, \nu_z$ , спиновых частот  $\xi_{xy}, \xi_{xz}, \xi_{yz}$ .

**Основные результаты главы.** В Главе 3 приводится описание разработанного комплекса программ RSX для изучения динамики пучков. Разработанный комплекс допускает распараллеливание вычислительных процессов и предоставляет единый интерфейс для изучения поведения движения частиц в ускорителях и предназначен для повышения эффективности, надежности и качества моделирования динамики спина. RSX также предоставляет методы и инструменты поддержки принятия решения, основанные на предоставлении адекватной графической информации с учетом структурно-параметрического представления управляющих параметров ускорителя. Интерфейс RSX разработан в соответствии с современной концепцией виртуального ускорителя. В данной главе также приводится описание программы COSY Infinity, которая используется в качестве вычислительного ядра в разработанной программе.

## ГЛАВА 4

### Результаты численного моделирования

**Четвертая глава** основана на публикациях [94, 116, 117, 96, 66, 93, 53, 95, 122, 91, 92] и содержит результаты проведенного численного моделирования различных накопительных колец, предложенных для увеличения времени декогеренции спина в эксперименте по поиску ЭДМ. Приведенные результаты сходятся с оценками, полученными при помощи математического аппарата, представленного в первой главе. Также приведены результаты полномасштабного численного моделирования на суперкомпьютерном кластере.

#### 4.1 Результаты численного моделирования электростатического кольца

В работе [116] было предложено несколько структур электростатических ускорителей. Рассмотрим накопительное кольцо, состоящее из двух арок с 32 ФODO-ячейками и отношением частот бетатронных колебаний  $\nu_x/\nu_y = 7,9/7,8$ . Длина ускорителя 155 метров, напряженность в отклоняющих цилиндрических дефлекторах составляет 170 МВ/м. На рис. 4.1 изображены функции  $\beta_x$  (красным),  $\beta_y$  (зеленым),  $D_x$  (синим) и  $D_y$  (черным).

Частицы с «магическим» уровнем энергии  $\gamma_{\text{mag}}$ , для которых верно соотношение (1.2.2), сохраняют начальную горизонтальную поляризацию

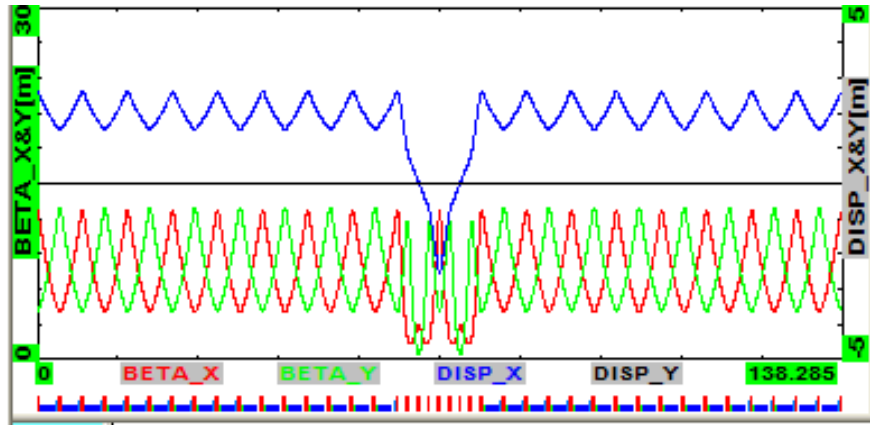


Рис. 4.1. Электростатический ускоритель с отношением бетатронных частот  $\nu_x/\nu_y = 7,9/7,8$

$S_z = 1.0$ , при моделировании без учета влияния ЭДМ. Спин частиц с энергией отличной от  $\gamma_{\text{mag}}$  за каждый оборот поворачивается в горизонтальной плоскости, таким образом происходит быстрая деполяризация пучка. На рис. 4.2 представлены проекции спинов  $S_x$  равновесной частицы (красным), с отклонением энергии от равновесной  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$  (синим) и  $\Delta K/K_0 = -10^{-4}$  (зеленым). Как видно из рисунка, за тысячу оборотов проекция спина «немагических» частиц достигает величины  $S_x = \pm 2 \cdot 10^{-2}$ , т. е. SCT составляет меньше одной миллисекунды.

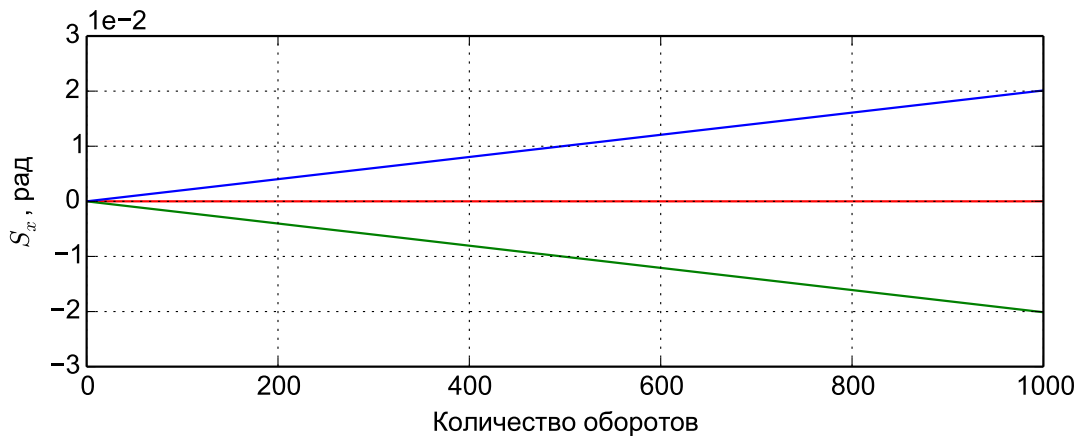


Рис. 4.2. Движение спина трех частиц с  $\Delta K/K_0 = 0$  (красным),  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$  (синим) и  $\Delta K/K_0 = -10^{-4}$  (зеленым)

В разделе 1.3 рассматривается способ увеличения SCT при помощи ВЧ-резонатора, из-за которого частицы совершают синхротронные колебания.

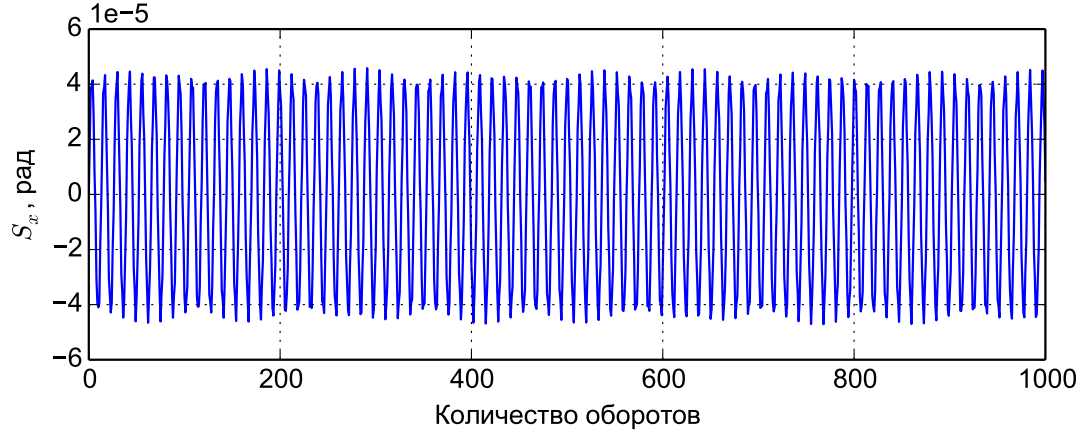


Рис. 4.3. Движение спина частицы с отклонением  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$

На рис. 4.3 представлена проекция спина  $S_x$  частицы с начальным отклонением энергии  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$  в ускорителе с включенным ВЧ-резонатором. Как видно из рисунка, из-за изменения энергии частицы спин совершает осцилляции в пределах  $\pm 4 \cdot 10^{-5}$ , однако при моделировании движения за более длительное время (см. рис. 4.4) видно, что спиновая компонента начинает нарастать. Это происходит из-за невозможности при помощи ВЧ-резонатора усреднить член при  $(\Delta p/p)^2$  в формуле (1.3.4).

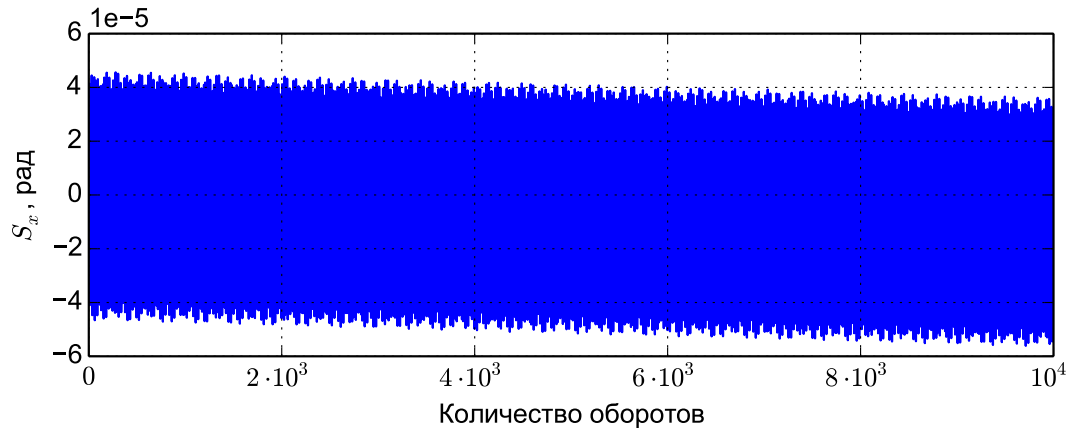


Рис. 4.4. Движение спина частицы с отклонением  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$

При рассмотрении частиц, имеющих не только начальное отклонение  $\Delta K/K_0$ , но и  $x \neq 0$ , оказывается, что в структуре с отношением частот  $\nu_x/\nu_y = 7,9/7,8$  происходит сдвиг равновесной энергии для таких частиц

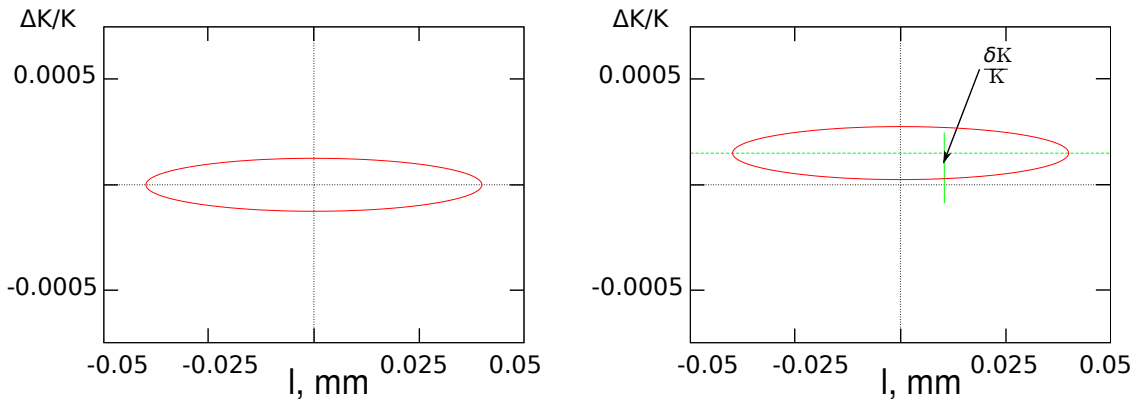


Рис. 4.5. Синхротронные осцилляции для частицы с  $x = 0$  (слева) и для частицы с  $x = 3$  мм (справа) при  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$

на величину  $\delta K/K$ , что представлено на рис. 4.5 В работе [116] предложена структура накопительного кольца с соотношением частот  $\nu_x/\nu_y = 1,31/0,64$ , которая изображена на рис. 4.6. Это накопительное кольцо, состоит из двух арок с 8 ФОДО-ячейками в каждой. Длина ускорителя также составляет 155 метров, напряженность в отклоняющих цилиндрических дефлекторах 170 МВ/м.

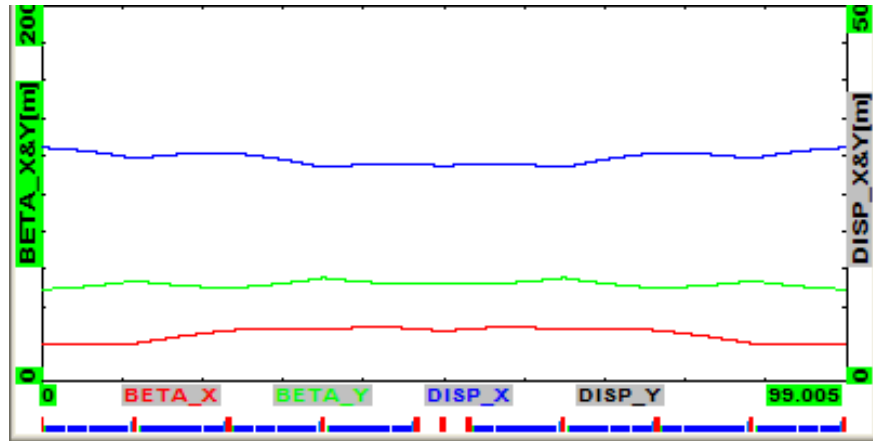


Рис. 4.6. Электростатический ускоритель с отношением бетатронных частот  $\nu_x/\nu_y = 1,31/0,64$

В этой структуре равновесный уровень энергии осциллирует для неосевых частиц. Продольная фазовая плоскость  $\Delta K/K_0 - l$  движения частицы с начальным смещением  $x = 3$  мм и  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$  представлена на рис.4.7 Из рисунка видно, что энергия частицы  $\Delta K/K_0$  осциллирует около нуля, таким образом увеличивается SCT до 500 секунд [94] для пучка с эмиттан-

сом  $2 \text{ мм} \cdot \text{мрад}$ , что является недостаточным при проведении эксперимента по измерению ЭДМ.

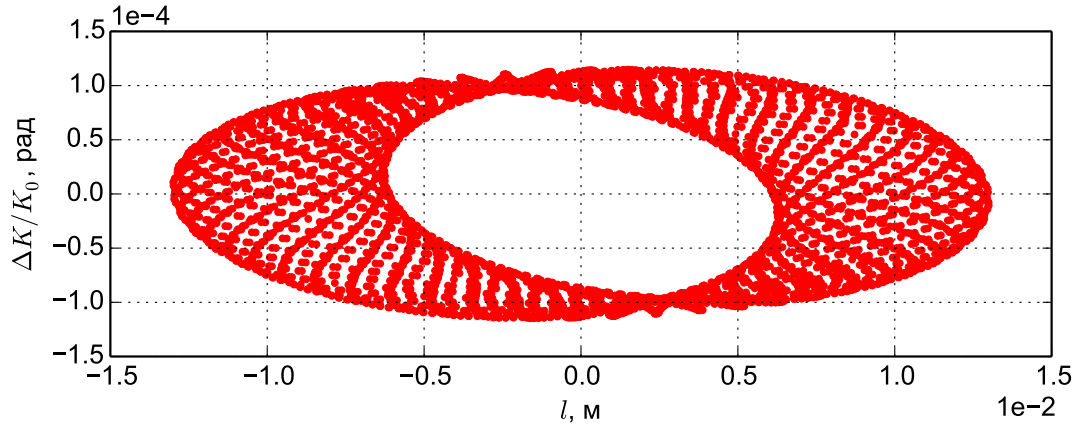


Рис. 4.7. Синхротронные осцилляции для частицы с начальным отклонением  $x = 3 \text{ мм}$  и  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$ , 5000 оборотов

**Влияние мультипольных компонент поля.** Из формулы (1.3.5) следует, что коэффициенты разложения поля  $\delta E_x/E$  влияют на спиновую частоту.

$$\frac{\delta E_x}{E_x} = -k_1 \frac{x}{R} + k_2 \left( \frac{x}{R} \right)^2 + \dots$$

Изменение коэффициентов разложения поля  $k_1, k_2, \dots, k_n$  возможно при помощи изменения формы deflectоров или при помощи введения дополнительных секступолей в кольцо. Проведенное моделирование показало, что спин очень чувствителен к изменению коэффициентов.

На рис. 4.8 изображены графики изменения  $S_x$  при коэффициентах разложения  $k_1 = 0,94, k_2 = -0,971, k_3 = 1,0, k_4 = -1,0, k_5 = 1,0$  для частиц с  $\Delta K/K_0 = \pm 10^{-4}$  и начальным отклонением от оси  $x = 3 \text{ мм}$ . На рис. 4.9 изображены графики изменения  $S_x$  для этих же частиц, но коэффициент разложения  $k_2 = -0,975$ . Как видно из этих рисунков, при изменении коэффициента разложения  $k_2$  на величину  $\sim 1\%$ , за  $5 \cdot 10^5$  оборотов ускорителя изменяется поведение спиновых компонент  $S_x$  различных частиц. При  $k_2 = -0,951$  происходит изменение  $S_x$  в положительную сторону, а

при  $k_2 = -0,971$  — в отрицательную. На этом факте основан метод увеличения SCT при помощи накопительного кольца с переменными дефлекторами, что будет рассмотрено в разделе 4.2.

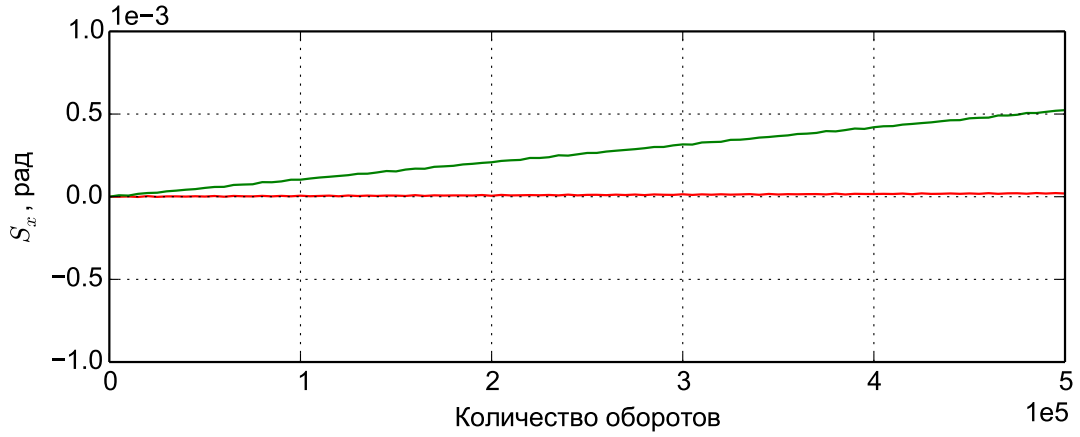


Рис. 4.8. Движение спина частиц с начальным смещением  $x = 3$  мм,  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$  (красным) и  $\Delta K/K_0 = -10^{-4}$  (зеленым) в накопительном кольце с дефлекторами  $k_1 = 0,94$ ,  $k_2 = -0,951$ ,  $k_3 = 1,0$ ,  $k_4 = -1,0$ ,  $k_5 = 1,0$

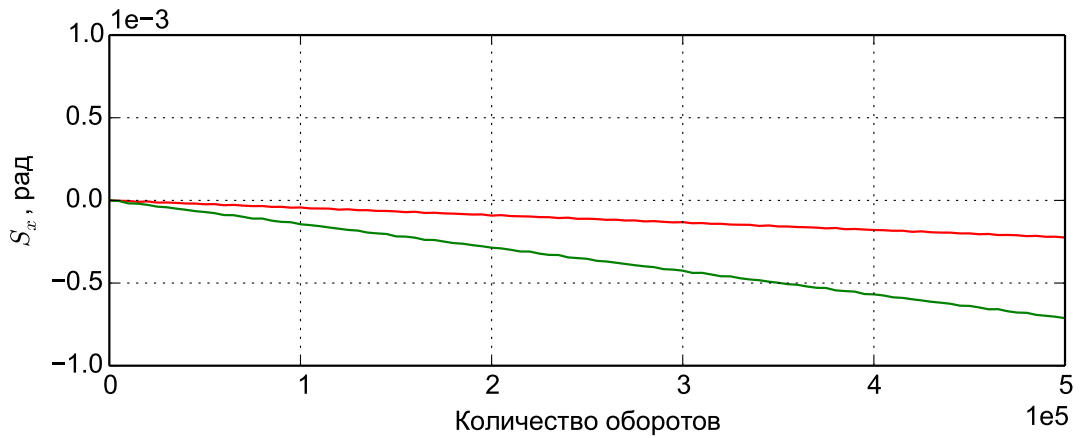


Рис. 4.9. Движение спина частиц с начальным смещением  $x = 3$  мм,  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$  (красным) и  $\Delta K/K_0 = -10^{-4}$  (зеленым) в накопительном кольце с дефлекторами  $k_1 = 0,94$ ,  $k_2 = -0,971$ ,  $k_3 = 1,0$ ,  $k_4 = -1,0$ ,  $k_5 = 1,0$

Выбирая значение секstupольных компонент в дефлекторах можно увеличить SCT до нескольких тысяч секунд, но значение коэффициентов должно быть подобрано очень точно. Оптимальными значениями при выборе с  $k_2$  с точностью до третьего знака после запятой являются дефлекторы с коэффициентами разложения поля  $k_1 = 0,94$ ,  $k_2 = -0,961$ ,  $k_3 = 1,0$ ,

$k_4 = -1, 0$ ,  $k_5 = 1, 0$ . На рис. 4.10 изображены графики изменения  $S_x$  для частиц с  $\Delta K/K_0 = \pm 10^{-4}$  и начальным отклонением от оси  $x = 3$  мм в структуре с оптимальными дефлекторами. При помощи секступолей в накопительном кольце таким же образом можно влиять на поведение спина.

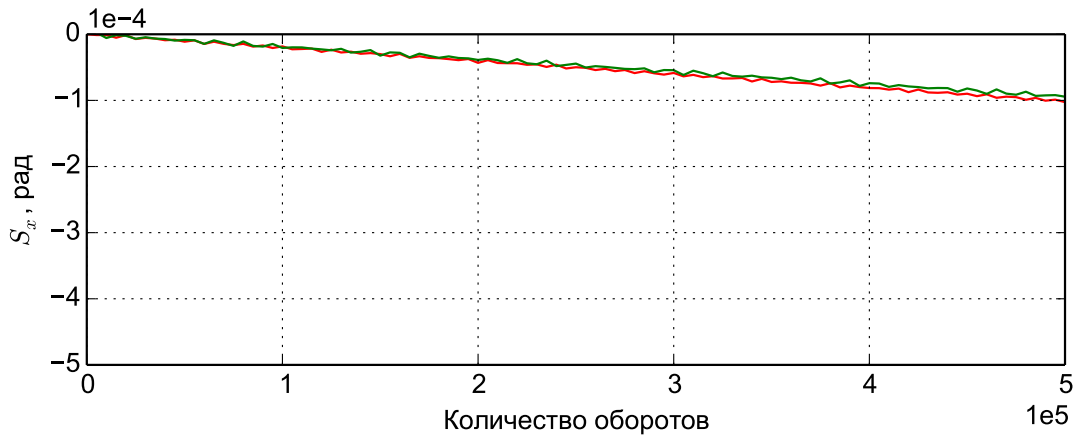


Рис. 4.10. Движение спина частиц с начальным смещением  $x = 3$  мм,  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$  (красным) и  $\Delta K/K_0 = -10^{-4}$  (зеленым) в накопительном кольце с дефлекторами  $k_1 = 0,94$ ,  $k_2 = -0,961$ ,  $k_3 = 1,0$ ,  $k_4 = -1,0$ ,  $k_5 = 1,0$

Из рис. 4.10 следует, что за  $5 \cdot 10^5$  оборотов спин частиц при  $\Delta K/K = \pm 10^{-4}$  достигнет величины  $S_x = -10^{-4}$  рад, т. е. за  $10^9$  оборотов горизонтальная компонента спина увеличится до  $S_x \approx 0,2$  рад. Таким образом, SCT всего пучка составляет  $\sim 5000$  секунд.

Влияние краевых полей также заключается в наличии дополнительной секступольной компоненты, которую можно компенсировать либо изменением разложения поля в дефлекторах, либо введением корректирующих секступолей.

Также проведено моделирование зависимости деполяризации пучка от начальных разброса координат  $x$ ,  $y$ . Для визуализации такого рода данных удобно использовать трехмерные изображения зависимости  $S_x$  от двух параметров: начальных отклонений  $x$  и  $y$ .



На рис. 4.11 представлен полученный при помощи комплекса программ RSX график зависимости проекции спина  $S_x$  после  $10^6$  оборотов в структуре ускорителя с дефлекторами  $k_1 = 0,94$ ,  $k_2 = -0,97378$ ,  $k_3 = 1,0$ ,  $k_4 = -1,0$ ,  $k_5 = 1,0$  от начальных координат  $x$ ,  $y$  при  $\Delta K/K = 2 \cdot 10^{-4}$ .

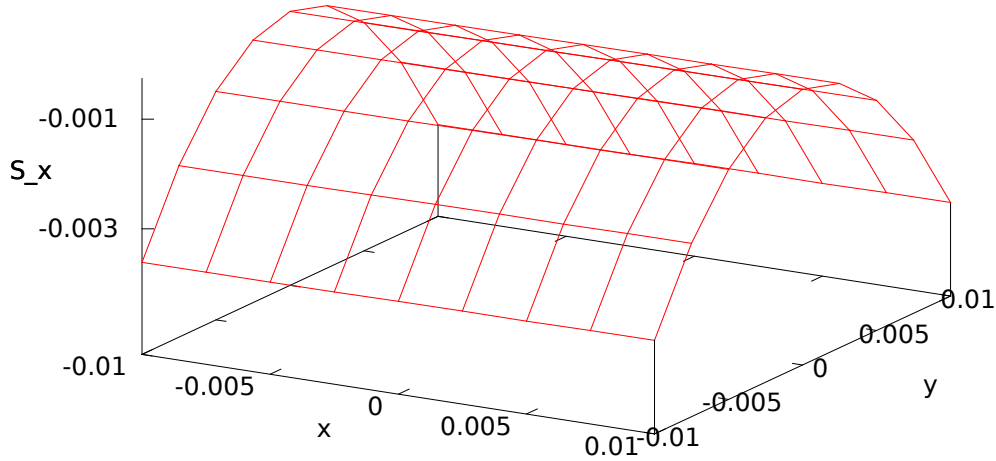


Рис. 4.11. Зависимость  $S_x$  от начальных отклонений  $x$ ,  $y$

Как видно из этого графика, существует квадратичная зависимость декогеренции спина от начальных  $x$ ,  $y$ , т. е. от удлинения орбиты, что подтверждается формулами (1.3.5) и (1.3.6).

## 4.2 Структура с переменными дефлекторами

В предыдущем разделе показано, что при помощи изменения разложения поля в дефлекторах можно увеличить SCT. Однако, с физической точки зрения затруднительно изготовить дефлекторы с требуемыми коэффициентами  $k_1, k_2, \dots$ . В работе [96] предложен метод переменных дефлекторов для увеличения SCT. Из формулы 1.3.7 следует, что спиновая абберация  $\delta\nu_s$  квадратично зависит от  $(x/R)$  и  $(\Delta p/p)$ . Изменение коэффициентов  $k_1, k_2$  может приводить к изменению знака  $\delta\nu_s$ . Полученные  $S_x$  в зависимости

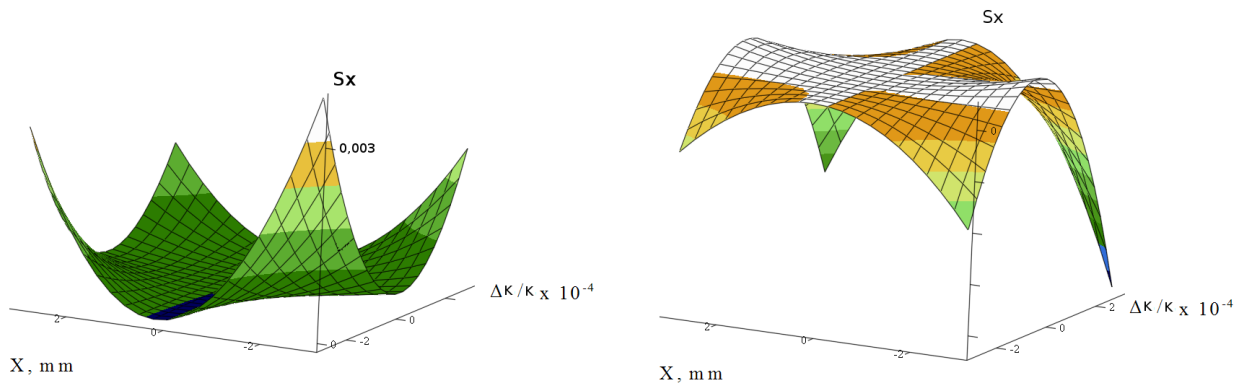


Рис. 4.12. Проекция спина  $S_x$  через  $10^5$  оборотов в структуре с дефлекторами  $k_1 = 0,94$ ,  $k_2 = -0,97 - 0,1$  (слева),  $k_2 = -0,97 + 0,1$  (справа),  $k_3 = 1,0$ ,  $k_4 = -1,0$ ,  $k_5 = 1,0$

от разных начальных  $x$  и  $\Delta K/K_0$  представлены на рис. 4.12. В отличие от рисунка 4.11, здесь приведена зависимость  $S_x$  от начального разброса по координате  $x$  и  $\Delta K/K$ . Как видно из рисунков, в зависимости от коэффициентов  $k_2$  знак  $S_x$  меняется на противоположный.

Основываясь на этом факте предложено использовать накопительное кольцо, состоящее из дефлекторов разного типа: дефлекторы с  $k_2 = k_{20} + \Delta k$ , и дефлекторы с  $k_2 = k_{20} - \Delta k$ . Таким образом спин частицы в дефлекторе с коэффициентами  $k_{20} + \Delta k$  изменяется в положительную сторону, а в дефлекторе с коэффициентами  $k_{20} - \Delta k$  в отрицательную.

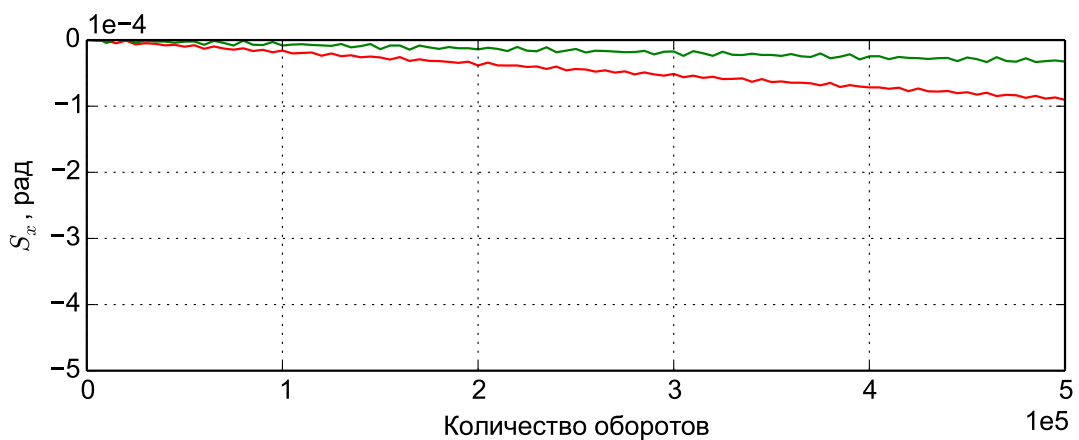


Рис. 4.13. Проекция спина  $S_x$  частиц с начальным смещением  $x = 3$  мм,  $\Delta K/K_0 = 10^{-4}$  (красным) и  $\Delta K/K_0 = -10^{-4}$  (зеленым) в структуре с переменными дефлекторами  $k_2 = 0,97 \pm 0,1$

В результате, при использовании структуры с переменными дефлекторами, также удастся достичь SCT длительностью более тысячи секунд. Движение спина в пучке в накопительном кольце с переменными дефлекторами представлено на рис. 4.13.

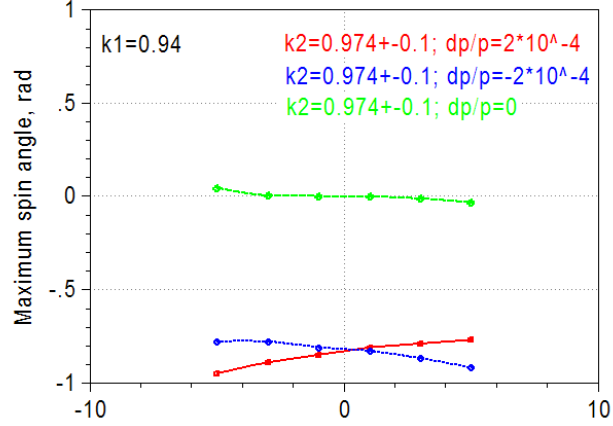


Рис. 4.14. Проекция спина  $S_x$  в зависимости от начального  $x$  через  $10^9$  оборотов в структуре с дефлекторами  $k_1 = 0,94$ ,  $k_2 = -0,974 \pm 0,1$ ,  $k_3 = 1,0$ ,  $k_4 = -1,0$ ,  $k_5 = 1,0$ ,  $\Delta p/p = 2 \cdot 10^{-4}$  (красным),  $\Delta p/p = -2 \cdot 10^{-4}$  (синим) и  $\Delta p/p = 0$  (зеленым)

Результаты моделирования движения частиц с различным отклонением энергии от равновесной в зависимости от  $x$  в течение  $10^9$  оборотов в оптимизированной структуре представлены на рис. 4.14. Как видно из рисунка, максимальное отклонение  $S_x$  не превосходит 1 рад, следовательно SCT превышает требуемую экспериментом величину 1000 секунд.

### 4.3 Результаты расчетов на суперкомпьютере

В рамках диссертационного исследования также было проведено моделирование движения пучка частиц в электростатическом ускорителе с учетом влияния ЭДМ на движение спина. Вычисления проводились в суперкомпьютерном центре исследовательского центра г. Юлих на кластере JUROPA. JUROPA состоит из 2208 вычислительных узлов, каждый узел построен на базе двух процессоров Intel Xeon X5570, каждый из которых

содержит четыре вычислительных ядра. Каждый узел оснащен 24 Гб оперативной памяти.

В качестве начального пучка были случайным образом выбраны 40960 частиц с нормальным распределением со средними квадратичными отклонениями начальных координат от равновесной частицы  $\sigma_x = 3 \cdot 10^{-3}$  м,  $\sigma_y = 3 \cdot 10^{-3}$  м,  $\sigma_{\Delta K/K_0} = 10^{-4}$ ,  $\sigma_{sx} = 10^{-3}$ ,  $\sigma_{sy} = 10^{-3}$ .

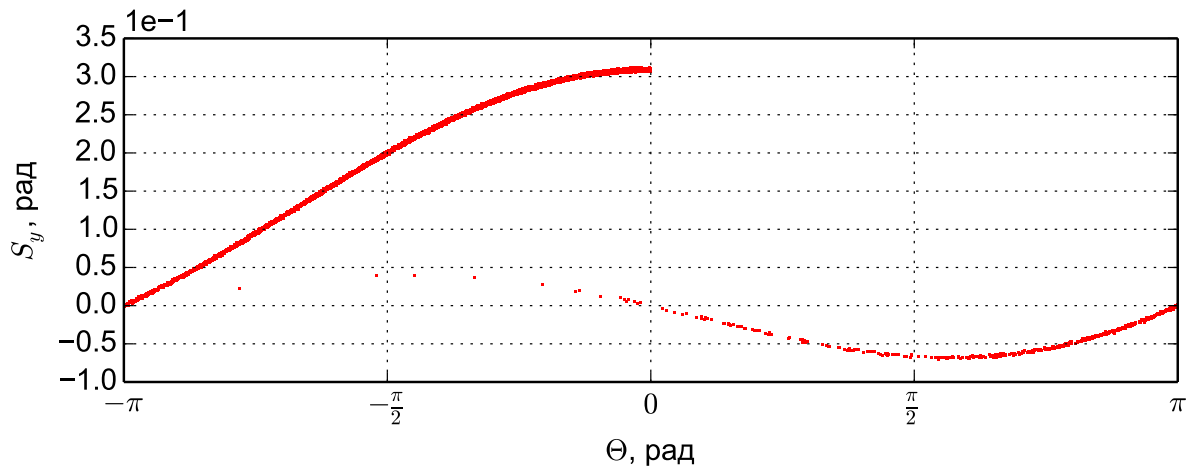


Рис. 4.15. Распределение спина в пучке с начальным  $\sigma_{\Delta K/K_0} = 10^{-4}$  после  $10^8$  оборотов

На рис. 4.15 изображено распределение спина в пучке через  $10^8$  оборотов в электростатическом ускорителе при ЭДМ  $d_p = 10^{-23} e \cdot \text{см}$ . За  $\Theta$  обозначен угол между проекцией спина на горизонтальную плоскость и импульсом,  $\text{tg } \Theta = S_x/S_z$ . Для равновесной частицы  $\Theta = 0$ . Пока для частицы  $-\pi/2 < \Theta < \pi/2$ , то  $S_y$  возрастает за счет взаимодействия ЭДМ с электрическим полем. На рисунке видно, что чем больше значение угла  $\Theta$  имеет спин частицы, тем меньше накопленная вертикальная компонента спина  $S_y$ .

Для сравнения приведен рис. 4.16, на котором изображен пучок с теми же начальными данными, но  $\sigma_{\Delta K/K_0} = 10^{-3}$ . Как видно из рисунка, пучок деполяризован гораздо сильнее (угол  $\Theta$  «разбросан» в пределах  $[-\pi..π]$ ), чем в пучке с меньшим разбросом по энергии.

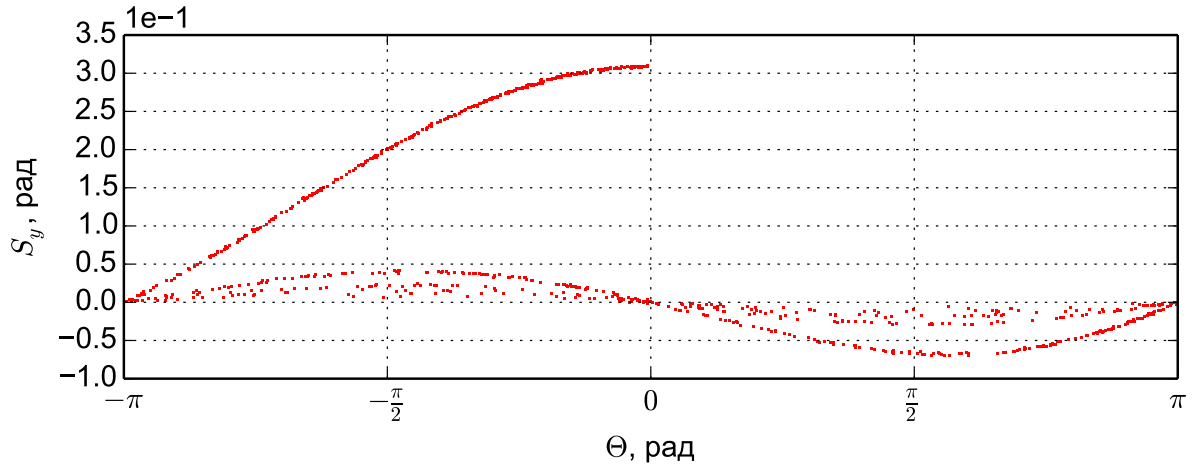


Рис. 4.16. Распределение спина в пучке с начальным  $\sigma_{\Delta K/K_0} = 10^{-3}$  после  $10^8$  оборотов

Таким образом, при достижении необходимого SCT в исследуемой структуре возможно измерение ЭДМ.

**Основные результаты главы.** В данной главе проведено численное моделирование предложенных в [116, 94] электростатических ускорителей для поиска ЭДМ. Показано, что движение спина в электростатическом кольце очень чувствительно к мультипольным компонентам полей поворачивающих дефлекторов. Проведено численное моделирование системных связей и закономерностей функционирования управляющих систем ускорителя (предложенной структуры кольца с переменными дефлекторами) с использованием инструментов обработки информации и показано, что время декогеренции спина может быть увеличено до нескольких тысяч секунд. Также приведены результаты численного моделирования пучка, состоящего из нескольких десятков тысяч частиц, проведенного на суперкомпьютерном кластере.

## Заключение

В диссертационной работе методами математического моделирования исследован новый метод поиска электрического дипольного момента протона с использованием электростатического накопительного кольца. В рамках предложенной ранее идеи «замороженного спина» изучено спин-орбитальное движение в электростатическом кольце. Также исследован метод резонансного обнаружения ЭДМ в магнитном кольце. Проведено моделирование декогеренции прецессии спина за времена порядка нескольких тысяч секунд с использованием высокопроизводительного вычислительного кластера. Изучены методы стабилизации декогеренции спина, основанные на использовании мультипольных полей. Предложенный в диссертационной работе программный комплекс позволил многократно ускорить проведение вычислительных экспериментов по формированию оптимальной структуры циклического ускорителя для измерения ЭДМ.

По результатам диссертации опубликованы работы [122, 115, 95, 53, 93, 96, 117, 116, 94, 121, 114, 91, 92]. В будущем планируется продолжать развитие разработанного программного комплекса с учетом требований не только эксперимента по поиску ЭДМ, но и других целей.

В заключение автор выражает признательность за научное влияние в процессе работы над диссертацией своим научным руководителям, доктору физико-математических наук, профессору Ю. В. Сеничеву и доктору физико-математических наук, профессору С. Н. Андрианову. Также автор благодарит директора Института ядерной физики г. Юлих, доктора естественных наук, профессора Р. Майера (R. Maier), за полезные обсуждения и поддержку работы.

## Список литературы

1. *Aaij R., Abellan Beteta C., Adeva B.* [и др.] Evidence for CP Violation in Time-Integrated  $D^0 \rightarrow h^- h^+$  Decay Rates // Phys.Rev.Lett. — 2012. — Март. — Т. 108. — С. 111602. — URL: <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.108.111602>.
2. *Abachi S., Abbott B., Abolins M.* [и др.] Search for High Mass Top Quark Production in  $p\bar{p}$  Collisions at  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Март. — Т. 74, вып. 13. — С. 2422–2426. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.2422>.
3. *Abe F., Akimoto H., Akopian A.* [и др.] Observation of Top Quark Production in  $p\bar{p}$  Collisions with the Collider Detector at Fermilab // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Апр. — Т. 74, вып. 14. — С. 2626–2631. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.2626>.
4. *Abe K., Abe K., Abe R.* [и др.] Observation of Large CP Violation in the Neutral B Meson System // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Авг. — Т. 87, вып. 9. — С. 091802. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.091802>.
5. *Abe K., Hayato Y., Iida T.* [и др.] The search for n-nbar oscillation in Super-Kamiokande I // ArXiv e-prints. — 2011. — Сент. — URL: <http://arxiv.org/abs/1109.4227>.
6. *Aguilar M., Alberti G., Alpat B.* [и др.] First Result from the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station: Precision Measurement of the Positron Fraction in Primary Cosmic Rays of 0.5–350 GeV // Phys.Rev.Lett. — 2013. — Апр. — Т. 110, № 14. — С. 141102. —

- URL: <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.110.141102>.
7. *Altarev I., Chesnevszkaya S., Feldmeier W.* [и др.] A next generation measurement of the electric dipole moment of the neutron at the FRM II // Il Nuovo Cimento. — 2012. — Т. 35. — URL: [http://www.universe-cluster.de/fierlinger/pdf/nedm\\_article\\_nuov\\_cim.pdf](http://www.universe-cluster.de/fierlinger/pdf/nedm_article_nuov_cim.pdf).
  8. *Aubert B., Boutigny D., Gaillard J.-M.* [и др.] Observation of CP Violation in the  $B^0$  Meson System // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Август. — Т. 87, вып. 9. — С. 091801. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.091801>.
  9. *Baker C. A., Doyle D. D., Geltenbort P.* [и др.] Improved Experimental Limit on the Electric Dipole Moment of the Neutron // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Сентябрь. — Т. 97, вып. 13. — С. 131801. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.131801>.
  10. *Becker-Szendy R., Bratton C. B., Cady D. R.* [и др.] Search for proton decay into  $e^+ + \pi^0$  in the IMB-3 detector // Phys. Rev. D. — 1990. — Ноябрь. — Т. 42, вып. 9. — С. 2974—2976. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.42.2974>.
  11. *Bennett G. W., Bousquet B., Brown H. N.* [и др.] Improved limit on the muon electric dipole moment // Phys. Rev. D. — 2009. — Сентябрь. — Т. 80, вып. 5. — С. 052008. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.052008>.
  12. *Berz M.* Arbitrary Order Description of Arbitrary Particle Optical Systems // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 1990. — Декабрь. — Т. 298, № 1. — С. 426—440. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016890029090646N>.
  13. *Berz M.* Computational Aspects of Optics Design and Simulation: COSY INFINITY // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research



- Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 1990. — Дек. — Т. 298, № 1. — С. 473—479. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016890029090649Q>.
14. *Berz M.* Modern Map Methods for Charged Particle Optics // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 1995. — Сент. — Т. 363, № 1. — С. 100—104. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0168900295003614>.
  15. *Berz M.* Symplectic Tracking Through Circular Accelerators With High Order Maps // Nonlinear Problems in Future Accelerators, eds. W. Scandale and G. Turchetti (World Scientific, Singapore, 1991). — 1991. — Апр. — С. 288—296. — URL: <http://bt.pa.msu.edu/cgi-bin/display.pl?name=caprimap>.
  16. *Berz M.* The Method of Power Series Tracking for the Mathematical Description of Beam Dynamics // Nuclear Instruments and Methods. — 1987. — Август. — Т. A258. — С. 431+. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0168900287909272>.
  17. *Berz M., Erdélyi B., Makino K.* Fringe field effects in small rings of large acceptance // Phys. Rev. ST Accel. Beams. — 2000. — Дек. — Т. 3, вып. 12. — С. 124001. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevSTAB.3.124001>.
  18. *Berz M., Makino K.* COSY INFINITY. — URL: [http://bt.pa.msu.edu/index\\_cosy.htm](http://bt.pa.msu.edu/index_cosy.htm).
  19. *Berz M., Makino K.* COSY INFINITY 9.1: Beam Physics Manual: тех. отч. ; Michigan State University. — Август. 2013. — MSUHEP-060804-rev.
  20. *Berz M., Makino K., Shamseddine K.* [и др.] Modern Map Methods in Particle Beam Physics. — Elsevier Science, 1999. — (Advances in imaging and electron physics). — ISBN 9780080577746. — URL: <http://bt.pa.msu.edu/cgi-bin/display.pl?name=AIEP108book>.

21. *Brown K.* A First- and Second-Order Matrix Theory for the Design of Beam Transport Systems and Charged Particle Spectrometers: тех. отч. ; SLAC. — Стэнфорд, Калифорния, США, июнь 1972. — SLAC-75. — URL: <http://www.slac.stanford.edu/pubs/slacreports/slac-r-075.html>.
22. *Brown K., Rothacker F.* TRANSPORT a Computer Program for Designing Charged Particle Beam Transport Systems: тех. отч. ; SLAC. — Стэнфорд, Калифорния, США, май 1983. — SLAC-91, Rev. 3. — URL: <http://lss.fnal.gov/archive/nal/fermilab-nal-091.pdf>.
23. *Buon J.* Beam phase space and emittance // CERN Reports. — 1994. — Дек. — С. 89—89. — URL: <http://cours.lal.in2p3.fr/ecoles/accelerateurs/Jbuon2.pdf>.
24. *Canetti L., Drewes M., Shaposhnikov M.* Matter and Antimatter in the Universe // New Journal of Physics. — 2012. — Сент. — Т. 14, № 9. — С. 095012. — URL: <http://stacks.iop.org/1367-2630/14/i=9/a=095012>.
25. *Channell P.* The Moment Approach to Charged Particle Beam Dynamics // Nuclear Science, IEEE Transactions on. — 1983. — Авг. — Т. 30, № 4. — С. 2607—2609. — ISSN 0018-9499. — URL: [http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs\\_all.jsp?arnumber=4332898](http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=4332898).
26. *Chatrchyan S., Khachatryan V., Sirunyan A.* [и др.] Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC // Physics Letters B. — 2012. — Сент. — Т. 716, № 1. — С. 30—61. — ISSN 0370-2693. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269312008581>.
27. *CherryPy team* CherryPy – A Minimalist Python Web Framework. — URL: <http://www.cherrypy.org/>.
28. *Chiu P., Kuo C., Chen J.* [и др.] Virtual Accelerator Development for the TPS // Proceedings of the 1st International Particle Accelerator Con-

- ference, IPAC'10, Киото, Япония. — Июнь 2010. — С. 2728—2730. — ISBN 978-92-9083-352-9. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC10/papers/wepeb019.pdf>.
29. *Christenson J., Cronin J., Fitch V.* [и др.] Evidence for the  $2\pi$  Decay of the  $K_2^0$  Meson // *Physical Review Letters*. — 1964. — Июль. — Т. 13. — С. 138—140. — URL: <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.13.138>.
30. *Clarke L., Glendinning I., Hempel R.* The MPI Message Passing Interface Standard // *Programming Environments for Massively Parallel Distributed Systems* / под ред. К. Decker, R. Rehmman. — Birkhäuser Basel, 1994. — С. 213—218. — (Monte Verità). — ISBN 978-3-0348-9668-9. — URL: [http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-0348-8534-8\\_21](http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-0348-8534-8_21).
31. *Courant E., Snyder H.* Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron // *Annals of Physics*. — 2000. — Апр. — Т. 281. — С. 360—408. — URL: <http://ab-abp-rlc.web.cern.ch/ab-abp-rlc/AP-literature/Courant-Snyder-1958.pdf>.
32. *Dalesio L. R., Kraimer M., Kozubal A.* EPICS architecture // *Proceedings of the 3rd International Conference on Accelerator and Large Experimental Physics Control Systems, ICALEPCS91, Цукуба, Япония*. — Ноябрь. 1991. — С. 92—15. — URL: [http://www.aps.anl.gov/epics/EpicsDocumentation/EpicsGeneral/EPICS\\_Architecture.ps](http://www.aps.anl.gov/epics/EpicsDocumentation/EpicsGeneral/EPICS_Architecture.ps).
33. *Davies W., Douglas S., Pusch G.* [и др.] The Chalk River differential algebra code "DACYC" and the role of differential and Lie algebras in understanding the orbit dynamics of cyclotrons.
34. *Dimopoulos S., Georgi H.* Softly broken supersymmetry and SU(5) // *Nuclear Physics B*. — 1981. — Дек. — Т. 193, № 1. — С. 150—162. — ISSN 0550-3213. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321381905228>.

35. *Django Software Foundation* Django. — 2005–2014. — URL: <http://djangoproject.com/>.
36. *Dmitriev V. F., Sen'kov R. A.* Schiff Moment of the Mercury Nucleus and the Proton Dipole Moment // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Ноябрь. — Т. 91, вып. 21. — С. 212303. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.212303>.
37. *Dragt A.* Lie Methods for Nonlinear Dynamics with Applications to Accelerator Physics. — University of Maryland, Center for Theoretical Physics, Department of Physics, 1997.
38. *Dragt A.* Numerical third-order transfer map for solenoid // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment.* — 1990. — Дек. — Т. 298, 1–3. — С. 441–459. — ISSN 0168-9002. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0168900290906470>.
39. *Dragt A., Neri F., Zeijts J. van* [и др.] Numerical Third Order Transfer Map for Combined Function Dipole // *Phys. Rev. D.* — 1989.
40. *Dragt A., Healy L., Neri F.* [и др.] MARYLIE 3.0. A Program for nonlinear analysis of accelerator and beamline lattices // *IEEE Trans.Nucl.Sci.* — 1985. — Октябрь. — Т. 32. — С. 2311–2313. — URL: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=4333896>.
41. *Fanti V., Lai A., Marras D.* [и др.] A New measurement of direct CP violation in two pion decays of the neutral kaon // *Phys.Lett.* — 1999. — Октябрь. — Т. B465. — С. 335–348. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399010308>.
42. *Farley F. J. M., Jungmann K., Miller J. P.* [и др.] New Method of Measuring Electric Dipole Moments in Storage Rings // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Июль. — Т. 93, вып. 5. — С. 052001. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.052001>.

43. *Farrar G. R., Shaposhnikov M. E.* Baryon asymmetry of the Universe in the minimal standard model // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Май. — Т. 70, вып. 19. — С. 2833–2836. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.2833>.
44. *Filiba T.* RPyC – Transparent, Symmetric Distributed Computing – RPyC. — URL: <http://rpyc.readthedocs.org/en/latest/>.
45. *Fischer W., Pilat F., Ptitsin V.* The application of the SXF lattice description and the UAL software environment to the analysis of the LHC // *Proceedings of the 1999 Particle Accelerator Conference, Нью-Йорк, США.* — Апр. 1999. — С. 2716–2718. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/p99/PAPERS/THA41.PDF>.
46. *Fixsen D., Dwek E., Mather J. C.* [и др.] The Spectrum of the Extragalactic Far-Infrared Background from the COBE FIRAS Observations // *The Astrophysical Journal.* — 1998. — Ноябрь. — Т. 508. — С. 123. — URL: <http://iopscience.iop.org/0004-637X/508/1/123>.
47. *Forest E.* *Beam Dynamics: A New Attitude and Framework.* — Taylor & Francis, 1998. — (Physics and technology of particle and photon beams). — ISBN 9789057025587.
48. *Fournier D.* NA31 results on CP violation in K decays, and a test of CPT // *1989 International Symposium on Lepton-photon Interactions at High Energies.* — ЯНВ. 1990. — С. 168–183. — URL: <http://cds.cern.ch/record/204051?ln=en>.
49. *Goldstein H.* *Classical mechanics.* Т. 4. — Pearson Education India, 1962.
50. *Gu D., Zhang M., Gu Q.* [и др.] Development of Virtual Accelerator Environment for Beam Diagnostics // *ArXiv e-prints.* — 2014. — URL: <http://arxiv.org/abs/1401.1889>.
51. *Haverbeke M.* *CodeMirror.* — 2014. — URL: <http://codemirror.net/>.

52. *Hinshaw G., Larson D., Komatsu E.* [и др.] Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results // The Astrophysical Journal Supplement Series. — 2013. — СЕНТ. — Т. 208, № 2. — С. 19. — URL: <http://stacks.iop.org/0067-0049/208/i=2/a=19>.
53. *Ivanov A., Andrianov S., Kulabukhova N.* [и др.] Testing of Symplectic Integrator of Spin-Orbit Motion Based on Matrix Formalism // Proceedings of the 4th International Particle Accelerator Conference, IPAC'13, ШАНХАЙ, КИТАЙ. — ИЮНЬ 2013. — С. 2582–2584. — ISBN 978-3-95450-122-9. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2013/papers/wepea037.pdf>.
54. *Jackson J.* Classical Electrodynamics, 3rd Edition. — Wiley-VCH, 1998.
55. *JEDI Collaboration* Search for Electric Dipole Moments at COSY Step 1: Spin coherence and systematic error studies (#216.0): тех. отч. — МАЙ 2012. — URL: [http://collaborations.fz-juelich.de/ikp/jedi/public\\_files/proposals/EDM-COSY-Proposal\\_cover\\_02.05.2012.pdf](http://collaborations.fz-juelich.de/ikp/jedi/public_files/proposals/EDM-COSY-Proposal_cover_02.05.2012.pdf).
56. *JEDI Collaboration* Search for Electric Dipole Moments at COSY Step 1: Spin coherence and systematic error studies (#216.0): тех. отч. — ЯНВ. 2014. — URL: [http://collaborations.fz-juelich.de/ikp/jedi/public\\_files/proposals/JEDI-COSY-PROPOSAL-FINAL\\_21.1.2014.pdf](http://collaborations.fz-juelich.de/ikp/jedi/public_files/proposals/JEDI-COSY-PROPOSAL-FINAL_21.1.2014.pdf).
57. *Jones E., Oliphant T., Peterson P.* SciPy: Open source scientific tools for Python. — 2014. — URL: <http://www.scipy.org/>.
58. *J-PARC New  $g-2$ /EDM experiment collaboration* New approach to the Muon  $g-2$  and EDM experiment at J-PARC // Journal of Physics: Conference Series. — 2011. — Т. 295, № 1. — С. 012032. — URL: <http://stacks.iop.org/1742-6596/295/i=1/a=012032>.

59. *Khriplovich I.* Nuclear electric dipole moments at ion storage rings // *Hyperfine Interactions*. — 2000. — Август. — Т. 127, 1-4. — С. 365—371. — ISSN 0304-3843. — URL: <http://link.springer.com/article/10.1023/A:1012697113139>.
60. *Knecht A.* Towards a New Measurement of the Neutron Electric Dipole Moment [Текст] : дис. . . . док. ест. наук / Кнеcht А. — Цюрих, Швейцария, 2009. — URL: [http://ucn.web.psi.ch/papers/Thesis\\_Andreas\\_Knecht\\_2009.pdf](http://ucn.web.psi.ch/papers/Thesis_Andreas_Knecht_2009.pdf).
61. *Kobayashi M., Maskawa T.* CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction // *Progress of Theoretical Physics*. — 1973. — Февр. — Т. 49, № 2. — С. 652—657. — URL: <http://ptp.oxfordjournals.org/content/49/2/652.abstract>.
62. *Kodama K., Ushida N., Andreopoulos C.* [и др.] Observation of tau neutrino interactions // *Physics Letters B*. — 2001. — Апрель. — Т. 504, № 3. — С. 218—224. — ISSN 0370-2693. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269301003070>.
63. *Lee Roberts B.* The Fermilab muon project // *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*. — 2011. — Сентябрь. — Т. 218, № 1. — С. 237—241. — ISSN 0920-5632. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563211005706> ; Proceedings of the Eleventh International Workshop on Tau Lepton Physics.
64. *Lee S.* Spin Dynamics and Snakes in Synchrotrons. — Singapore : World Scientific, 1997.
65. *Lefkowitz G.* Twisted. — URL: <http://twistedmatrix.com/trac/>.
66. *Lehrach A.* Project Overview and Computational Needs to Measure Electric Dipole Moments at Storage Rings // Proceedings of the 11th International Computational Accelerator Physics Conference, ICAP2012, Росток, Германия. — Окт. 2012. — С. 99—103. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/ICAP2012/papers/tuadi1.pdf>.

67. *Lehrach A., Lorentz B., Morse W.* [и др.] Precursor Experiments to Search for Permanent Electric Dipole Moments (EDMs) of Protons and Deuterons at COSY: тех. отч. — ЯНВ. 2012. — ArXiv:1201.5773. — URL: <http://arxiv.org/abs/1201.5773>.
68. *Lüders G.* On the Equivalence of Invariance under Time-Reversal and under Particle-Antiparticle Conjugation for Relativistic Field Theories // Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-Fysiske Meddelelser. — 1954. — Февр. — Т. 28, № 5. — С. 1–17. — URL: <http://www.sdu.dk/media/bibpdf/Bind%2020-29/Bind/mfm-28-5.pdf>.
69. *Lysenko A., Polunin A., Shatunov Y.* Spin-Frequency Spread Measurements in a Storage Ring // Particle Accelerators. — 1986. — Т. 18. — С. 215–222. — URL: <http://cds.cern.ch/record/1108031>.
70. *Maier R.* Cooler synchrotron COSY — Performance and perspectives // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 1997. — Т. 390, 1–2. — С. 1–8. — ISSN 0168-9002. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900297003240>.
71. *Makino K., Berz M.* Taylor Models and Other Validated Functional Inclusion Methods // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2003. — Т. 4, № 4. — С. 379–456. — URL: <http://bt.pamsu.edu/cgi-bin/display.pl?name=TMIJPAM03>.
72. *Maniatis M.* The Next-To Supersymmetric Extension of the Standard Model Reviewed // International Journal of Modern Physics A. — 2010. — Июль. — Т. 25. — С. 3505–3602. — URL: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217751X10049827>.
73. *Meyer H. O., Schwandt P., Jacobs W. W.* [и др.] Proton scattering from  $^{12}\text{C}$  between 120 and 200 MeV and the optical potential // Phys. Rev. C. — 1983. — Февр. — Т. 27, вып. 2. — С. 459–469. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.27.459>.



74. *Michelotti L.* MXYZPTLK: A practical, user-friendly C++ implementation of differential algebra: User's guide: тех. отч. ; Fermilab. — Окт. 1990. — FN-535. — URL: <http://lss.fnal.gov/archive/1995/fn/FN-535R.pdf>.
75. *Mohapatra R. N., Pati J. C.* "Natural" left-right symmetry // *Phys. Rev. D.* — 1975. — Май. — Т. 11, вып. 9. — С. 2558—2561. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.11.2558>.
76. *Momjian B.* PostgreSQL: introduction and concepts. — Pearson Education, 2000.
77. *Nishino H., Clark S., Abe K.* [и др.] Search for Proton Decay via  $p \rightarrow e^+\pi^0$  and  $p \rightarrow \mu^+\pi^0$  in a Large Water Cherenkov Detector // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Апр. — Т. 102, вып. 14. — С. 141801. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.141801>.
78. *Orlov Y. F., Morse W. M., Semertzidis Y. K.* Resonance Method of Electric-Dipole-Moment Measurements in Storage Rings // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Июнь. — Т. 96, вып. 21. — С. 214802. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.214802>.
79. *Pati J. C., Salam A.* Lepton number as the fourth "color" // *Phys. Rev. D.* — 1974. — Июль. — Т. 10, вып. 1. — С. 275—289. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.275>.
80. *Pauli W.* Exclusion principle, Lorentz group and reflexion of space-time and charge // *Niels Bohr and the development of physics; essays dedicated to Niels Bohr on the occasion of his seventieth birthday* / под ред. W. Pauli, L. Rosenfeld, V. Weisskopf. — London : Pergamon Press, 1955.
81. *Picozza P., Boezio M.* Multi messenger astronomy and CTA: TeV cosmic rays and electrons // *Astroparticle Physics.* — 2013. — Март. — Т. 43. — С. 163—170. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927650512001405?via=ihub>.

82. *Pospelov M., Ritz A.* Electric dipole moments as probes of new physics // *Annals of Physics*. — 2005. — Июль. — Т. 318, № 1. — С. 119—169. — ISSN 0003-4916. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491605000539> ; Special Issue.
83. Pylons Project : Pylons Framework : About. — URL: <http://www.pylonsproject.org/projects/pylons-framework/about>.
84. *Python Software Foundation* About Python™ | Python.org. — 2001–2014. — URL: <http://www.python.org/about/>.
85. *Reenskaug T.* Models-Views-Controllers: тех. отч. ; Xerox PARC. — Дек. 1979. — URL: <http://heim.ifi.uio.no/~trygver/1979/mvc-2/1979-12-MVC.pdf>.
86. *Rodegheri C. C., Blaum K., Kracke H.* [и др.] An experiment for the direct determination of the g-factor of a single proton in a Penning trap // *New Journal of Physics*. — 2012. — Июнь. — Т. 14, № 6. — С. 063011. — URL: <http://stacks.iop.org/1367-2630/14/i=6/a=063011>.
87. *Sabbi G.* Magnetic Field Analysis of HGQ Coil Ends: тех. отч. ; Fermilab. — Сент. 1997. — TD-97-040. — URL: <http://tdserver1.fnal.gov/TDLibry/TD-Notes/1997%20Tech%20Notes/TD-97-040.ps>.
88. *Sagan D., Forster M., Tenenbaum P.* [и др.] The Accelerator Markup Language and the Universal Accelerator Parser // *Proceedings of the Tenth European Particle Accelerator Conference (EPAC06)*, Эдинбург, Шотландия. — 2006. — С. 2278—2280.
89. *Sakharov A.* Violation of CP Invariance, C Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe // *Letters to Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 1967. — Янв. — Т. 5, вып. 1. — С. 24—26. — URL: [http://www.jetpletters.ac.ru/ps/1643/article\\_25089.shtml](http://www.jetpletters.ac.ru/ps/1643/article_25089.shtml).
90. *Semertzidis Y. K.* [и др.] A storage ring proton electric dipole moment experiment: most sensitive experiment to CP-violation beyond the stan-

- dard model // arXiv preprint arXiv:1110.3378. — 2011. — Окт. — URL: <http://arxiv.org/abs/1110.3378>.
91. *Senichev Y., Ivanov A., Lehrach A.* [и др.] Spin Tune Decoherence in Multipole Fields // Proceedings of the 5th International Particle Accelerator Conference, IPAC'14, Дрезден, Германия. — Июль 2014. — С. 3017—3019. — ISBN 978-3-95450-132-8. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2014/papers/thpro062.pdf>.
  92. *Senichev Y., Ivanov A., Lehrach A.* [и др.] Spin Tune Parametric Resonance Investigation // Proceedings of the 5th International Particle Accelerator Conference, IPAC'14, Дрезден, Германия. — Июль 2014. — С. 3020—3022. — ISBN 978-3-95450-132-8. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2014/papers/thpro063.pdf>.
  93. *Senichev Y., Lehrach A., Maier R.* [и др.] Storage Ring EDM Simulation: Methods and Results // Proceedings of the 11th International Computational Accelerator Physics Conference, ICAP2012, Росток, Германия. — Окт. 2012. — С. 99—103. — ISBN 978-3-95450-116-8. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/ICAP2012/papers/tuadi1.pdf>.
  94. *Senichev Y., Maier R., Zyuzin D.* The Spin Aberration of Polarized Beam in Electrostatic Rings // Proceedings of the 2nd International Particle Accelerator Conference, IPAC'11, Сан-Себастьян, Испания. — Сент. 2011. — С. 2175—2177. — ISBN 978-92-9083-366-6. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2011/papers/wepc067.pdf>.
  95. *Senichev Y., Maier R., Zyuzin D.* [и др.] Spin Tune Decoherence Effects in Electro- and Magnetostatic Structures // Proceedings of the 4th International Particle Accelerator Conference, IPAC'13, Шанхай, Китай. — Июнь 2013. — С. 2579—2581. — ISBN 978-3-95450-122-9. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2013/papers/wepca036.pdf>.

96. *Senichev Y., Maier R., Zyuzin D. Berz M.* Alternating Spin Aberration Electrostatic Lattice for EDM Ring // Proceedings of the 3rd International Particle Accelerator Conference, IPAC'12, Новый Орлеан, Луизиана, США. — Июль 2012. — С. 1332–1334. — ISBN 978-3-95450-115-1. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2012/papers/tuppc070.pdf>.
97. *Serebrov A., Aleksandrov E., Dovator N.* [и др.] Experimental search for neutron: Mirror neutron oscillations using storage of ultracold neutrons // Phys.Lett. — 2008. — Май. — Т. B663. — С. 181–185. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269308004565>.
98. *Shamseddine K., Berz M.* The Differential Algebraic Structure of the Levi-Civita Field and Applications // International Journal of Applied Mathematics. — 2000. — Т. 3, № 4. — С. 449–464. — URL: <http://bt.pa.msu.edu/cgi-bin/display.pl?name=DABUL00>.
99. *Shishlo A., Chu P., Galambos J.* [и др.] The EPICS Based Virtual Accelerator - Concept and Implementation // Proceedings of the 2003 Particle Accelerator Conference, Портленд, Орегон, США. — Май 2003. — С. 2366–2368. — ISBN 0-7803-7739-7. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/Accelconf/p03/PAPERS/WPPE017.PDF>.
100. *Smith J. H., Purcell E. M., Ramsey N. F.* Experimental Limit to the Electric Dipole Moment of the Neutron // Phys. Rev. — 1957. — Окт. — Т. 108, вып. 1. — С. 120–122. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.120>.
101. *Storage Ring EDM Collaboration* A Proposal to Measure the Proton Electric Dipole Moment with  $10^{-29} e \cdot \text{cm}$  Sensitivity: тех. отч. — Окт. 2011. — URL: [http://www.bnl.gov/edm/files/pdf/proton\\_EDM\\_proposal\\_20111027\\_final.pdf](http://www.bnl.gov/edm/files/pdf/proton_EDM_proposal_20111027_final.pdf).

102. Suppression of the Wrapping Effect by Taylor Model- Based Verified Integrators: Long-term Stabilization by Shrink Wrapping // International Journal of Differential Equations and Applications. — 2005. — Т. 10. — С. 385—403. — URL: <http://bt.pa.msu.edu/cgi-bin/display.pl?name=VIshrink06>.
103. *Tarbutt M. R., Sauer B. E., Hudson J. J.* [и др.] Design for a fountain of YbF molecules to measure the electron’s electric dipole moment // New Journal of Physics. — 2013. — Май. — Т. 15, № 5. — С. 053034. — URL: <http://stacks.iop.org/1367-2630/15/i=5/a=053034>.
104. *The ACME Collaboration* Order of Magnitude Smaller Limit on the Electric Dipole Moment of the Electron // Science. — 2014. — ЯНВ. — Т. 343, № 6168. — С. 269—272. — URL: <http://www.sciencemag.org/content/343/6168/269>.
105. *The jQuery Foundation* About jQuery | jQuery Learning Center. — 2014. — URL: <http://learn.jquery.com/about-jquery/>.
106. TurboGears Web Framework – TurboGears2 Website 3.0 documentation. — URL: <http://turbogears.org/>.
107. *W3C HTML Working Group* XHTML™ 1.0 The Extensible HyperText Markup Language (Second Edition): Recommendation ; W3C. — 2000. — URL: <http://www.w3.org/TR/xhtml1/>.
108. *Wan W., Johnstone C., Holt J.* [и др.] The influence of fringe fields on particle dynamics in the Large Hadron Collider // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 1999. — Май. — Т. 427, 1–2. — С. 74—78. — ISSN 0168-9002. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900298015216>.
109. *Weinberg S.* Implications of dynamical symmetry breaking // Phys. Rev. D. — 1976. — Февр. — Т. 13, вып. 4. — С. 974—996. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.13.974>.

110. *Wess J., Zumino B.* Supergauge transformations in four dimensions // Nuclear Physics B. — 1974. — Февр. — Т. 70, № 1. — С. 39–50. — ISSN 0550-3213. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374903551>.
111. *Williams T., Kelley C., many others* Gnuplot: an interactive plotting program. — URL: <http://gnuplot.sourceforge.net/>.
112. *Yan Y.* ZLIB<sup>®</sup>: A numerical library for differential algebra (A user’s guide for Version 1. 0). — Дек. 1990. — URL: <http://www.osti.gov/scitech/servlets/purl/5843202>.
113. *Zope Foundation* About Zope – The Zope 2 Application Server. — URL: <http://zope2.zope.org/about-zope-2>.
114. *Zyuzin D.* A New Tool for Automated Orbit and Spin Motion Analysis // Proceedings of the 5th International Particle Accelerator Conference, IPAC’14, Дрезден, Германия. — Июль 2014. — С. 403–405. — ISBN 978-3-95450-132-8. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2014/papers/mopme012.pdf>.
115. *Zyuzin D., Andrianov S., Kulabukhova N.* Data Management and Analysis for Beam Dynamics Simulation // Proceedings of the 4th International Particle Accelerator Conference, IPAC’13, Шанхай, Китай. — Июнь 2013. — С. 927–929. — ISBN 978-3-95450-122-9. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2013/papers/mopwo021.pdf>.
116. *Zyuzin D., Maier R., Senichev Y.* High Order Non-linear Motion in Electrostatic Rings // Proceedings of the 2nd International Particle Accelerator Conference, IPAC’11, Сан-Себастьян, Испания. — Сент. 2011. — С. 2172–2174. — ISBN 978-92-9083-366-6. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2011/papers/wepc066.pdf>.
117. *Zyuzin D., Maier R., Senichev Y.* [и др.] Comparison of Different Numerical Modelling Methods for Beam Dynamics in Electrostatic Rings //

- Proceedings of the 3rd International Particle Accelerator Conference, IPAC'12, Новый Орлеан, Луизиана, США. — Июль 2012. — С. 1335—1337. — ISBN 978-3-95450-115-1. — URL: <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/IPAC2012/papers/tuppc071.pdf>.
118. *Андрианов С.* Виртуальный ускоритель — распределенная среда моделирования и управления ускорительными комплексами // Труды конференции «Параллельные вычисления и задачи управления», Москва, Россия. — Окт. 2012. — С. 138—152. — URL: <http://paco2012.ipu.ru/procdngs/F101.pdf>.
119. *Андрианов С.* Динамическое моделирование систем управления пучками частиц. — СПб : Издательство С.-Петербургского университета, 2004.
120. *Боголюбов Н., Митропольский Ю.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М. : Физматгиз, 1958.
121. *Зюзин Д.* Программный комплекс для моделирования спин-орбитального движения в накопительных кольцах // Ядерная физика и инжиниринг. — 2014. — Май. — Т. 5, вып. 5. — С. 416—428. — ISSN 2079-5629.
122. *Зюзин Д., Сеничев Ю., Андрианов С.* [и др.] Моделирование динамики протонов в электростатических накопительных кольцах // Вестн. С.-Петерб. ун-та Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления, Вып. 1. — 2014. — Март. — С. 51—62.
123. *Коломенский Д., Лебедев А.* Теория циклических ускорителей. — М. : Физматгиз, 1962.
124. *Мартиросян Ю.* Исследование эффектов краевых магнитных полей в накопительных кольцах // Журнал технической физики. — 2003. — Окт. — Т. 73, № 10. — С. 113—115. — URL: <http://journals.ioffe.ru/jtjf/2003/10/page-113.html.ru>.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

## Синтаксис языка для описания ускорителя

В приложении приводится описание функций и управляющих структур применяемых для описания магнитных и электростатических элементов для задания структуры ускорителя в комплексе RSX. Большинство из выражений повторяет соответствующие структуры языка COSY Infinity.

**Свободный промежуток.** Свободный промежуток длиной  $L$  задается при помощи процедуры DL:

DL L;

Длина указывается в метрах.

**Поворачивающие элементы.** Элемент MS задает поворачивающий магнит, а ES — электростатический дефлектор:

MS <радиус> <угол поворота> <апертура> <n1> <n2> <n3> <n4> <n5>;

ES <радиус> <угол поворота> <апертура> <n1> <n2> <n3> <n4> <n5>;

где  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$  — коэффициенты разложения поля в горизонтальной плоскости. Разложение поля в элементе определяется соотношением

$$F(x) = F_0 \cdot \left[ 1 - \sum_{i=1}^5 n_i \cdot \left( \frac{x}{r_0} \right)^i \right],$$

где  $r_0$  — радиус поворота. Электростатический дефлектор цилиндрической формы имеет следующие коэффициенты разложения:  $n_1 = 1, n_2 = -1,$



$n_3 = 1, n_4 = -1, n_5 = 1$ . Сферический электростатический дефлектор —  $n_1 = 2, n_2 = -3, n_3 = 4, n_4 = -5, n_5 = 6$ . Радиус и апертура указываются в метрах, угол поворота — в градусах.

Также в RSX добавлены элементы `magnetic_bend` и `electric_bend`:

```
magnetic_bend <радиус> <угол поворота> <апертура>
```

```
electric_bend <радиус> <угол поворота> <апертура>
```

Они представляют однородный магнит (все коэффициенты  $n_i$  равны нулю) и цилиндрический дефлектор.

**Мультиполи.** Магнитные квадруполь, секступоль, октуполь, декаполь и дуодекаполь задаются командами MQ, MN, MO, MD, MZ соответственно:

```
MQ <длина> <магнитный поток> <апертура>;
```

```
MN <длина> <магнитный поток> <апертура>;
```

```
MO <длина> <магнитный поток> <апертура>;
```

```
MD <длина> <магнитный поток> <апертура>;
```

```
MZ <длина> <магнитный поток> <апертура>;
```

Длина и апертура указываются в метрах, магнитный поток на полюсе магнита — в тесла.

Аналогично задаются электростатические элементы:

```
EQ <длина> <потенциал на полюсе> <апертура>;
```

```
EN <длина> <потенциал на полюсе> <апертура>;
```

```
EO <длина> <потенциал на полюсе> <апертура>;
```

```
ED <длина> <потенциал на полюсе> <апертура>;
```

```
EZ <длина> <потенциал на полюсе> <апертура>;
```

Потенциал указывается в киловольтах.

**ВЧ-резонатор.** ВЧ-резонатор (реализованный в COSY Infinity как мгновенный сдвиг энергии) с потенциалом  $V$ , длиной  $L$  и частотой  $N \cdot f_{\text{rev}}$ , где  $f_{\text{rev}}$  — частота обращения, задается в виде

```
ORF L V N;
```

Потенциал указывается в киловольтах, длина в метрах.

**Соленоид.** Соленоидальное поле определяется при помощи процедуры CMSI:

```
CMSI I n d L;
```

где  $I$  — сила тока в кольцах соленоида,  $n$  — количество витков в метре длины элемента,  $d, l$  — радиус и длина соленоида соответственно. Сила тока указывается в амперах, радиус и длина в метрах.

**Элементы из COSY Infinity.** В RSX также могут быть использованы другие элементы оптики, полное описание которых приведено в [19].

**Пример задания ФОДО-ячейки.** Магнитная ФОДО-структура для протонов с энергией 232 МэВ может иметь следующий вид:

```
MQ 0.2 Q_STRENGTH 0.05;  
DL 0.1;  
magnetic_bend B_RADIUS B_ANGLE 0.05;  
DL 0.1;  
MQ 0.4 -Q_STRENGTH 0.05;  
DL 0.1;  
magnetic_bend B_RADIUS B_ANGLE 0.05;  
DL 0.1;  
MQ 0.2 Q_STRENGTH 0.05;
```

с параметрами Q\_STRENGTH=0.3, B\_RADIUS=15, B\_ANGLE=10.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### Интерфейс программного комплекса RSX

В приложении приведено описание интерфейса разработанного в рамках диссертационной работы комплекса RSX для моделирования динамики пучков в ускорителях.

После аутентификации пользователю становится доступен интерфейс, который представлен на рис. В.17. В верхней части страницы находится меню из следующих пунктов:

- Lattice designer (рис. В.18) — создание и управление сохраненными структурами ускорителя;
- Tracking (рис. В.21) — проведение виртуальных экспериментов и анализ данных;
- Run code — выполнение кода COSY Infinity;
- Logbook (рис. В.22, В.23, В.24) — журнал всех проведенных экспериментов.

На странице «Lattice designer» определяется структура ускорителя при помощи структур, представленных в Приложении 1. В структуре могут быть использованы свободные параметры (на рис. В.19 Q\_STRENGTH, B\_RADIUS, B\_ANGLE), значение которых задается в отдельных полях. По нажатию на кнопку «Analyze» происходит расчет структуры в линейном приближении и выводятся основные параметры ускорителя, как изображено на рис. В.19.

При нажатии на «Plot system dependency on parameter» открываются поля для выбора свободного параметра (см. рис. В.20), минимального и максимального значений и количества шагов. На рис. В.20 представлены графики бетатронных частот  $\nu_x$  и  $\nu_y$  ФОДО-структуры при изменении параметра Q\_STRENGTH в пределах 0.2...0.4.

На странице «Tracking» пользователь задает начальное распределение частиц в пучке, как представлено на рис. В.21, и параметры вычисления траекторий (порядок нелинейности матричных отображений, количество оборотов, метод симплектификации).

Выполненные вычислительные задачи отображаются на странице «Log-book», пример которой изображен на рис. В.22. Пользователь может проверить статус завершенных задач (вычисление, успешное завершение, ошибка, обработка данных) и, в случае успешного выполнения вычислений, построить траекторию движения частицы в фазовых плоскостях (см. рис. В.23) или движение спина (см. рис. В.24).

**rsx**  
FOR BEAM DYNAMICS

Lattice Designer      Tracking      Run code      Logbook      System status

protons 1000 MeV [Add new...](#)

```

1 {cell}
2 mq 0.2 Q-STRENGTH 0.05;
3 dl 0.1;
4 magnetic_bend B_RADIUS B_ANGLE 0.05;
5 dl 0.1;
6 mq 0.4 -Q-STRENGTH 0.05;
7 dl 0.1;
8 magnetic_bend B_RADIUS B_ANGLE 0.05;
9 dl 0.1;
10 mq 0.2 Q-STRENGTH 0.05;

```

Lattice name:

**Lattice parameters**

Name (no spaces allowed)	Value	
Q_STRENGTH	0.41	<a href="#">Remove</a>
B_RADIUS	15	<a href="#">Remove</a>
B_ANGLE	10	<a href="#">Remove</a>

[Add new parameter](#)  
 Add misalignments  
 Compute lattice with fringe fields  
[Plot system dependency on parameter](#)

Рис. В.17. Графический интерфейс RSX

Lattice Designer
Tracking
Run code
Logbook
System status
Configuration
Sign out

**RSX**  
FOR BEAM DYNAMICS

```

1 { Syntax help }
2 dl 0.1;
3 mq 0.2 0.1 0.05;
4 dl 0.2;
5 mq 0.2 -0.1 0.05;
6 dl 0.1;
7 orf 0.05 100 10;
8 dl 0.1;
9 eq 0.2 0.1 0.05;
10 dl 0.2;
11 eq 0.2 -0.1 0.05;
12 dl 0.1;
13 mh 0.1 0.01 0.05;
14 dl 10;
15 eh 0.1 -0.01 0.05;
16 dl 0.1;
17 magnetic_bend 15 45 0.05;
18 electric_bend 15 45 0.05;
19 cms1 3 10 0.01 0.1;

```

No beam specified

[Add new...](#)

```

drift 0.1m }
focusing quadrupole, length 0.2m, strength 0.1, aperture 0.05m }
drift 0.2m }
defocusing quadrupole, length 0.2m, strength -0.1, aperture 0.05m }
drift 0.1m }
RF cavity, length 0.05m, voltage 100 kV, 10th harmonic }
drift 0.1m }
focusing electric quadrupole, length 0.2m, strength 0.1, aperture 0.05m }
drift 0.2m }
defocusing electric quadrupole, length 0.2m, strength -0.1, aperture 0.05m }
drift 0.1m }
magnetic sextupole, length 0.1m, strength 0.01, aperture 0.05m }
drift 10m }
electric sextupole, length 0.1m, strength -0.01, aperture 0.05m }
drift 0.1m }
bend magnet, 15m radius, angle 45 degrees, 0.05 aperture }
electric condenser, 15m radius, angle 45 degrees, 0.05 aperture }
magnetic solenoid, 3A current, 10 turns/meter, 0.01m radius, 0.1m length }

```

**Configuration**

- Create new
- Load...
- Import from MAD-X file...
- Save
- Analyze
- ▶ **Settings**

Lattice name:

**Syntax help**

**Lattice parameters**

[Add new parameter](#)

Add misalignments

Compute lattice with fringe fields

[Plot system dependency on parameter](#)

Рис. В.18. Страница задания структуры ускорителя

Lattice Designer
Tracking
Run code
Logbook
System status
Configuration
Sign out

**rsx**

FOR BEAM DYNAMICS

```

1 {cell}
2 mq 0.2 Q_STRENGTH 0.05;
3 dl 0.1;
4 magnetic_bend B_RADIUS B_ANGLE 0.05;
5 dl 0.1; - Q_STRENGTH 0.05;
6 mq 0.4 - Q_STRENGTH 0.05;
7 dl 0.1;
8 magnetic_bend B_RADIUS B_ANGLE 0.05;
9 dl 0.1; Q_STRENGTH 0.05;
10 mq 0.2 Q_STRENGTH 0.05;
11

```

Lattice name:

**Lattice parameters**

Name (no spaces allowed)	Value	
Q_STRENGTH	0.3	<a href="#">Remove</a>
B_RADIUS	15	<a href="#">Remove</a>
B_ANGLE	10	<a href="#">Remove</a>

[Add new parameter](#)

Add misalignments

Compute lattice with fringe fields

[Plot system dependency on parameter](#)

protons 1000 MeV [Add new...](#)

Create new

Load...

Import from MAD-X file...

Save

Analyze

▶ Settings

$\beta$  0.8750245405539011

$\gamma$  2.065780392110563

L-orb 6.435987755982989

T-orb 2.45343339876033e-8

VX 0.2367282701025606

VY 0.2267368188567302

VZ 0

d1 0.7866773729834815

d2 0.2521852073908357

$\eta_{XY}$  0.08728014481849522

$\eta_{XZ}$  0.17070894824055105

$\eta_{YZ}$  0.6555117225306077

$\xi_{XY}$  0.10899486513593593

$\xi_{XZ}$  0.8621846374679702

$\xi_{YZ}$  0.33110873721406064

AL/L 0.7260044573508798

Рис. В.19. Пример анализа ФОДО-ячейки, приведенной в конце Приложения А

1-D 2-D

Plot  vs.

0.2
0.4
10

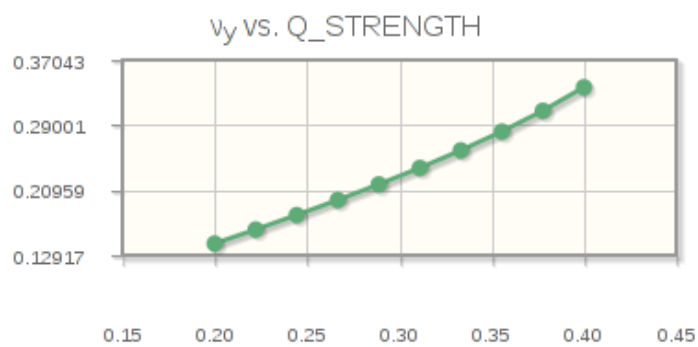
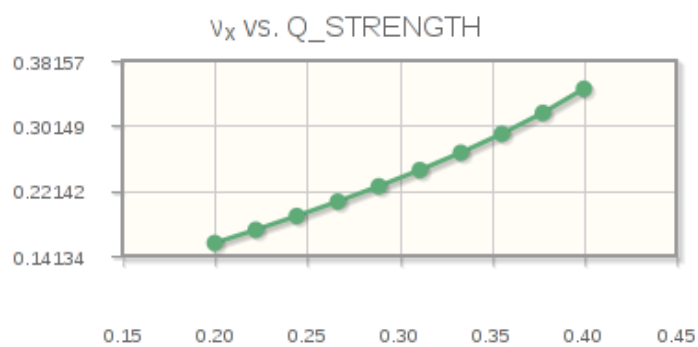


Рис. В.20. Зависимость частот  $\nu_x, \nu_y$  от параметра Q\_STRENGTH



Initial distribution

Exact values    Gaussian distribution    Uniform distribution

X	A	Y	B	D	T ( $\Delta p/p$ )	Sx	Sy	Sz
0.001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.0	0.0	1.0

Remove    Remove

Add new particle

Tracking parameters

Computation order: 3

Number of turns: 100

Step size: 1

Symplectification mode: Symplectic using the EXPO generating function (default)

Run in parallel:

Рис. В.21. Задание начального распределения частиц в пучке

Task name	Added	Finished	State
Tracking task <b>cosyexec</b> task, UUID= <b>110b79c2-8f11-4fcd-b56c-f8d43d158fa8</b> on <b>localhost</b> State: <b>Finished</b> Actions: <b>Restart</b> Start time: <b>Tue Sep 24 14:02:26 2013</b> Finish time: <b>Tue Sep 24 14:02:27 2013</b> <a href="#">Click to show source</a> <a href="#">Click to show stdout</a> <a href="#">Click to show stderr</a> Created files: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <a href="#">our.ray</a> (view file as <a href="#">plain text</a> or download in <a href="#">gzip archive</a> or plot <a href="#">phase space X-A</a> <a href="#">phase space Y-B</a> <a href="#">phase space T-D S_x</a> <a href="#">rotation S_y</a> <a href="#">rotation S_z</a> <a href="#">rotation</a>)</li> <li>• <a href="#">our.spin</a> (view file as <a href="#">plain text</a> or download in <a href="#">gzip archive</a> or plot <a href="#">phase space X-A</a> <a href="#">phase space Y-B</a> <a href="#">phase space T-D S_x</a> <a href="#">rotation S_y</a> <a href="#">rotation S_z</a> <a href="#">rotation</a>)</li> </ul>	Tue Sep 24 14:02:26 2013	Tue Sep 24 14:02:27 2013	Finished
+ Compute tunes	Tue Sep 24 12:29:06 2013	Tue Sep 24 12:29:06 2013	Finished
+ Compute tunes	Tue Sep 24 12:29:06 2013	Tue Sep 24 12:29:07 2013	Finished
+ Compute tunes	Tue Sep 24 12:29:06 2013	Tue Sep 24 12:29:07 2013	Finished
+ Calculate length	Tue Sep 24 12:29:05 2013	Tue Sep 24 12:29:06 2013	Finished

Рис. В.22. Список выполненных задач



Рис. В.23. Визуализация орбитального движения

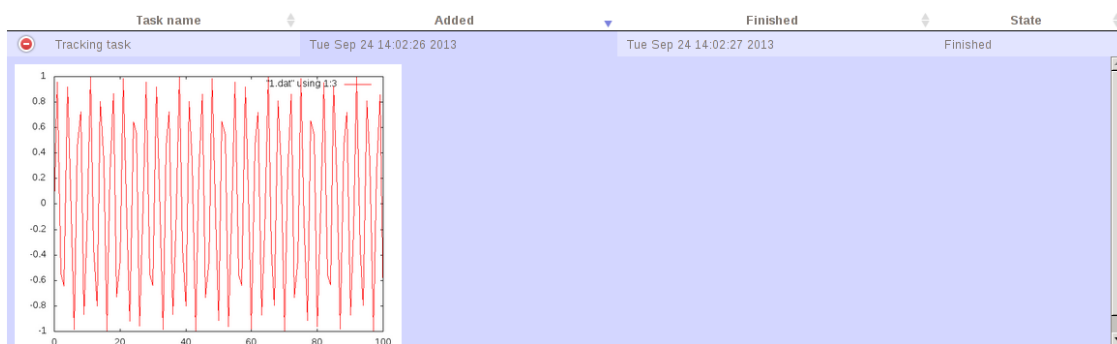


Рис. В.24. График осцилляций спина