САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Якушева Дарья Борисовна

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

05.13.01 — системный анализ, управление и обработка информации
(по прикладной математике и процессам управления)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2012

Работа выполнена на кафедре информационных систем факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Квитко Александр Николаевич
(СПбГУ)

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Веремей Евгений Игоревич
(заведующий кафедрой КТС, СПбГУ,
ф-т ПМ-ПУ)

доктор физико-математических наук,
профессор Зайцев Валентин Федорович
(РГПУ им. А.И. Герцена)

Ведущая организация: Балтийский государственный технический университет "ВОЕНМЕХ" им. Д.Ф. Устинова

Защита состоится «___» ___________ 2012 г. в ___ часов на заседании совета Д.212.232.50 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199034, Санкт-Петербург, В. О., Университетская наб., 7/9, Менделеевский Центр.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, В. О., Университетская наб., 7/9. Автореферат размещен на сайте www.spbu.ru.

Автореферат разослан «___» ___________ 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.212.232.50

доктор физико-математических наук,
профессор (СПбГУ)
Курбатова Галина Ибрагимовна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одной из проблем математической теории управления являются вопросы, связанные с исследованием граничных задач для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Впервые полное решение этих задач для линейных нестационарных систем в классе управляющих функций, суммируемых с квадратом, было выполнено Р. Калманом. Исследование граничных задач ведется по трем основным направлениям. Первое связано с нахождением необходимых и достаточных условий, наложенных на правую часть управляемых систем, гарантирующих перевод систем управления в заданную точку фазового пространства. Этим исследованиям посвящены работы Зубова В. И., Красовского Н. Н., Потапова А. П., Лепса Н. Л., Комарова В. А., Walczak S., Ohta Y. и Maeda H., Dirk A., Jersy S., Nistri P. и др. Второе включает исследование множества конечных состояний, в которые возможен перевод управляемой системы из некоторого начального состояния. Наиболее значительные результаты, связанные с этим направлением исследований, содержатся в работах Калмана Р., Панасюка А. И., Черноусько Ф. Л., Бердышева Ю. И. и др. Третье направление касается разработки точных или приближенных методов построения управляющих функций и соответствующих им траекторий, соединяющих заданные точки в фазовом пространстве. Основные результаты в этом направлении приведены в работах Красовского Н. Н., Зубова В. И., Черноусько Ф. Л., Крищенко А. П., Квитко А. Н. и др.

Одним из важных и сложных аспектов математической теории управления являются вопросы, связанные с поиском методов синтеза дискретных управляющих функций, при которых решения различных типов систем обыкновенных дифференциальных уравнений соединяют заданные точки в фазовом пространстве. Этим исследованиям посвящены работы Fury M., Nistri P., Zezza P., Кухты К. Я., Лапина С. В. и др.

При практической реализации законов управления управляющий сигнал, поступающий на исполнительные органы, реализуется с некоторым запаздыванием. В связи с указанным обстоятельством значительный научный и практический интерес представляет изучение проблемы решения граничных задач с учетом запаздывания управляющего воздействия. Основные результаты этих исследований содержатся в работах Balachandran K., Onwuatu J., Марченко В. М., Квитко А. Н. и др.

Часто ввиду доступности измерению лишь некоторой функции от фазовых координат возникает проблема нахождения искомых управляющих функций по реально измеряемым величинам. Этим исследованиям посвящены работы Люенбергера Д., Roman J. R., Trin H., Bhattachrgun S. P., Коровина С. К., Фомичева В. В. и др.

Все упомянутые выше аспекты исследования проблемы управляемых систем достаточно хорошо изучены для линейных стационарных, нестационарных и нелинейных систем специального вида. Однако для нелинейных систем общего вида проблема построения управляющих функций при решении граничных задач остается актуальной.

Цели и задачи работы. Целью диссертации является разработка достаточно простых для численной реализации и устойчивых к погрешностям вычислений методов построения управляющих функций, гарантирующих перевод объекта управления из начального состояния в заданное конечное состояние на бесконечном промежутке времени с учетом ограниченности, дискретности, запаздывания управляющего воздействия и заранее неизвестных возмущений. Самостоятельный интерес представляют вопросы, касающиеся решения поставленных граничных задач с учетом реально измеряемых величин. Кроме того целью диссертационной работы является нахождение достаточно легко проверяемых условий выбора конечных состояний, гарантирующих существование решения рассматриваемых граничных задач, и иллюстрация эффективности полученных алгоритмов при численном моделировании процесса управления конкретными техническими объектами.

Методы исследования. В работе используются методы математической теории управления, теории устойчивости, теории дифференциальных уравнений, математического анализа, линейной алгебры, методы компьтерных технологий.

Научная новизна. В диссертационной работе для нелинейных управляемых систем получены новые достаточно простые для численной реализации, устойчивые к погрешностям вычислений и случайным возмущениям алгоритмы перевода объектов управления из начального состояния в заданное конечное в классе дискретных и непрерывных управляющих функций с учетом их ограниченности, запаздывания управляющего сигнала и реально измеряемых величин. Кроме того получены достаточно легко проверяемые конструктивные условия выбора начальных и конечных фазовых состояний, шага дискретности и величины запаздывания управляющего воздействия, а также ограничений на случайные возмущения, гарантирующие реализацию полученных алгоритмов.

Практическая значимость. Эффективность полученных алгоритмов иллюстрируется на примерах численного моделирования конкретных практических задач:

- перевода гироскопической системы в окрестность положения равновесия в классе дискретных управлений,

- межорбитального перелета в классе дискретных управлений,

- межорбитального перелета с учетом реально измеряемых величин, дискретности управления и дискретности измерителя,

- адаптивного управления мостовым краном.

Алгоритмы и методы, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы при проектировании интеллектуальных систем управления различными подвижными объектами, включая летальные аппараты, роботы-манипуляторы, гироскопические системы и т.д.

Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Развит новый подход к исследованию проблемы решения граничных задач для широкого класса нелинейных стационарных управляемых систем на бесконечном промежутке времени.

2. Разработаны методы синтеза управлений, переводящих объект из начального состояния в заданное конечное состояние, с учетом ограниченности и дискретности управляющего сигнала, а также неполной информации о фазовом состоянии объекта.

3. Разработаны методы построения дискретных и ограниченных синтезирующих управляющих функций при решении задач терминального управления с учетом неполной информации.

4. Разработаны методы построения управляющих функций, переводящих объект из начального состояния в заданное конечное с учетом ограниченности, дискретности, запаздывания управляющего сигнала, а также заранее неизвестных возмущений.

5. Разработан пакет программ на языке C++ и в среде Wolfram Mathematica 6.0, проведено численное моделирование конкретных практических задач.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечиваются корректным применением методов математической теории управления, системного анализа, вычислительной математики и компьютерных технологий. Основные положения подтверждаются результатами численного моделирования конкретных практических задач.

Апробация результатов диссертации. Результаты исследования докладывались и обсуждались на различных конференциях: "Устойчивость и процессы управления"(SCP'10 в честь 80-летия со дня рождения В.И. Зубова, Санкт-Петербург, 2010 г.), "Процессы управления и устойчивость"(Санкт-Петербург, 2009 и 2010 г.), "Понтрягинские чтения - XXIII"в рамках XXVI Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач"(Воронеж, 2012 г.), а также на семинаре кафедры информационных систем факультета ПМ-ПУ СПбГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ, из которых 5 в изданиях, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций.

Структура и объем работы. Диссертация содержит 147 страниц текста, в том числе 7 рисунков, и состоит из введения, вспомогательных сведений, четырех глав и списка литературы, включающего 113 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, указаны главные отличия результатов, полученных в диссертационной работе, от известных ранее, производится обзор содержания по главам и параграфам.

Первая глава посвящена решению задачи перевода объектов управления из заданной точки фазового пространства в начало координат на бесконечном промежутке времени.

Объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

$$x = (x^1, \dots, x^n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u^1, \dots, u^r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \le n, \quad t \in [0, \infty),$$

$$f \in C^2(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f^1, \dots, f^n)^T, \tag{2}$$

$$f(0, 0) = 0, \tag{3}$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0, 0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$B = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0, 0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$rank\ (B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \tag{4}$$

$$\|u\| < C_1. \tag{5}$$

Задача 1. Найти дискретное управления $u(t)$ так, чтобы решение $x(t)$ системы (1) удовлетворяло условиям

$$x(0) = x_1, \quad x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n)^T, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{6}$$

Алгоритм решения поставленной задачи содержится в доказательстве следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2), (3), (4). Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$ такие, что для любых $x_1 : \|x_1\| < \varepsilon$ и для любых $h : 0 < h < h_0$ существует решение Задачи 1, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной стационарной системы и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (порядки указанных систем совпадают с порядком исходной системы).*

Третий и **четвертый** параграфы посвящены соответственно задачам синтеза непрерывного и дискретного управления с учетом неполной информации о фазовом состоянии объекта.

Предположим, что в некоторые дискретные моменты времени $t = kh$, $h > 0$, $k = 0, 1, ...$ доступен измерению вектор $y(kh) \in R^m$, $m \leq n$, связанный с фазовым вектором x уравнением

$$y(kh) = g(x(kh)), \tag{7}$$

где

$$g \in C^2(R^n; R^m), \quad g = (g^1, \ldots, g^m)^T, \tag{8}$$

$$rank\{T^T, A^T T^T, \ldots, A^{T n-1} T^T\} = n, \tag{9}$$

$$T = \{\frac{\partial g}{\partial x}(0)\}.$$

Задача 2. Используя результаты измерения $y(kh)$, $k = 0, 1, \ldots, h > 0$, найти дискретное управление $u(t)$ так, чтобы решения системы (1) удовлетворяли условиям

$$x(0) = x_0, \quad x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)^T, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{10}$$

Сформулирована и доказана теорема:

Теорема 2. *Пусть для системы (1) и уравнения измерителя (7) выполнены условия (2)–(4), (8), (9). Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$ такие, что для всех $x_0 \in R^n$, $h > 0$, удовлетворяющих неравенствам*

$$\|x_0\| < \varepsilon, \quad 0 < h < h_0,$$

существует решение Задачи 2, которое может быть получено после решения задачи непрерывной стабилизации линейной стационарной системы и построения матрицы асимптотического наблюдателя типа Люенбергера.

Вторая глава посвящена решению задач терминального управления. В **первом** параграфе этой главы ставится задача построения синтеза дискретного управляющего воздействия, с помощью которого исходная система переводится из начала координат в некоторую точку r-мерной поверхности, проходящей через начало координат фазового пространства. Доказана теорема, которая содержит в себе алгоритм построения указанной функции. Получены конструктивные условия выбора конечных состояний и шага дискретности, гарантирующие разрешимость поставленной задачи с учетом ограничений на управление. Во **втором** параграфе разработан алгоритм решения аналогичной задачи с учетом дискретности управления и измерителя.

Пусть для системы (1) наряду с условиями (2)–(4) выполнено

$$\det A \neq 0. \tag{11}$$

Тогда из условий (2), (3) и (11) и теоремы о неявной функции следует существование $\varepsilon_1 > 0$ такого, что для любого u:

$$\|u\| < \varepsilon_1 \tag{12}$$

уравнение

$$f(x, u) = 0 \tag{13}$$

определяет дифференцируемую неявную функцию

$$x = x(u), \tag{14}$$

заданную в области (12), удовлетворяющую уравнению (13) и условию

$$x(0) = 0. \tag{15}$$

Обозначим через Γ r-мерную поверхность, заданную уравнением (14). Из условия (15) следует, что эта поверхность проходит через начало координат фазового пространства R^n.

Задача 3. Используя результаты измерения $y(kh)$, $k = 0, 1, \ldots, h > 0$, найти дискретное управление $u(t)$ так, чтобы решения системы (1) удовлетворяли условиям

$$x(0) = 0, \quad x(t) \to x_1 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad x_1 \in \Gamma. \tag{16}$$

Основной результат данной главы содержится в теореме:

Теорема 3. *Пусть для системы (1) и уравнения измерителя (7) выполнены условия (2)–(4), (8), (9). Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$ такие, что для всех $x_1 \in \Gamma : \|x_1\| < \varepsilon$ и для всех $h : 0 < h < h_0$ существует решение Задачи 3, которое может быть получено после решения задачи непрерывной стабилизации линейной стационарной системы и построения матрицы асимптотического наблюдателя типа Люенбергера.*

В **третьей** главе рассматриваются объекты управления, описываемые широким классом нелинейных управляемых систем при наличии в их правых частях слагаемых, характеризующих заранее неизвестные возмущения, которые могут быть обусловлены влиянием случайных внешних воздействий, ошибками вычислительных систем и другими факторами. В **первом** и во

втором параграфах предложены алгоритмы построения непрерывных управляющих функций, гарантирующих перевод объектов управления как из заданного начального состояния в начало координат, так и из начала координат в заданное конечное состояние. Процедура нахождения искомых управляющих функций сводится к решению задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и к последующему решению задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Порядки обеих систем совпадают с порядком исходной системы.

Объектом исследования является нелинейная управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x,u) + \varphi(x,t), \tag{17}$$

$$\varphi \in C(R^n \times R^1; R^n). \tag{18}$$

Здесь φ – заранее неизвестные возмущения. Функция $f(x,u)$ удовлетворяет условиям, указанным для правой части системы (1).

Задача 4. Найти пару функций $x(t) \in C[0,\infty)$, $u(t) \in C[0,\infty)$, удовлетворяющих системе (17) и условиям

$$x(0) = 0, \quad x(t) \to x_1 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n)^T. \tag{19}$$

Доказана теорема:

Теорема 4. *Пусть для правой части системы (17) выполнены условия (2)–(4), (18). Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_\varphi > 0$ такие, что для любых $x_1 : \|x_1\| < \varepsilon_0$ и для любых φ: $\|\varphi(x,t)\| < \varepsilon_\varphi$ существует решение Задачи 4, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (порядки обеих систем совпадают с порядком исходной системы).*

В **третьем** параграфе предложен конструктивный метод решения задачи, сформулированной во втором параграфе, с учетом ограничений на управление. Соответствующий алгоритм сводится к решению задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и к последующему решению задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Порядки обеих систем равны сумме размерностей фазового пространства и управляющего вектора. Получены условия выбора конечных состояний и ограничений на заранее неизвестные возмущения, при которых гарантируется существование решения поставленной задачи.

Объектом исследования является нелинейная управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, u) + \varphi(x, u, t), \tag{20}$$

$$\varphi \in C(R^n \times R^r \times R^1; R^n), \tag{21}$$

$$\|u\| < C. \tag{22}$$

Здесь φ – заранее неизвестное возмущение. Функция $f(x, u)$ удовлетворяет условиям (2)–(4).

Задача 5. Найти пару функций $x(t) \in C[0, \infty)$, $u(t) \in C[0, \infty)$, удовлетворяющих системе (20), ограничению (22) и условиям

$$x(0) = 0, \quad x(t) \to x_1 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n)^T, \tag{23}$$

$$u(0) = 0, \quad u(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{24}$$

Доказана теорема:

Теорема 5. *Пусть для правой части системы (20) выполнены условия (2)–(4), (21). Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_\varphi > 0$ такие, что для любых x_1 : $\|x_1\| < \varepsilon_0$ и для любых φ: $\|\varphi(x, u, t)\| < \varepsilon_\varphi$ существует решение Задачи 5, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующим решением* *задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Порядки обеих систем равны $n + r$.*

В **четвертом** и **пятом** параграфах получены алгоритмы решения задачи, сформулированной в третьем параграфе, с учетом дискретности и запаздывания управляющего сигнала. Процедура их реализации сводится к решению задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и к последующему решению задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Порядки обеих систем равны сумме размерностей фазового пространства и удвоенной размерности управляющего вектора.

Задача 6. Найти функцию $x(t)$ и дискретное управление $u(t)$, удовлетворяющие системе (20), ограничению (22) и условиям

$$x(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad x(t) \to x_1 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{25}$$

$$x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n)^T.$$

Доказана теорема:

Теорема 6. *Пусть для правой части системы (20) выполнены условия (2)–(4), (21). Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_\varphi > 0$, $h_0 > 0$ такие, что для любых $x_1 : \|x_1\| < \varepsilon_0$, для любых φ: $\|\varphi(x, u, t)\| < \varepsilon_\varphi$ и для любых h : $0 < h < h_0$ существует решение Задачи 6, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Объектом исследования является нелинейная управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, u(t - h)) + \varphi(x, u, t), \quad h > 0, \tag{26}$$

$$u(t) \equiv 0, \quad t \in [-h, 0], \tag{27}$$

$$\varphi \in C(R^n \times R^r \times R^1; R^n), \tag{28}$$

$$\|u\| < C. \tag{29}$$

Здесь φ – заранее неизвестное возмущение. Функция $f(x,u)$ удовлетворяет условиям (2)–(4).

Задача 7. Найти функцию $x(t)$ и управление $u(t-h)$, удовлетворяющие системе (26), ограничению (29) и условиям

$$x(0) = 0, \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-h, 0], \quad x(t) \to x_1 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{30}$$

$$x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n)^T.$$

Здесь $x_1 \in R^n$ – заданный вектор.

Справедлива теорема:

Теорема 7. *Пусть для правой части системы (26) выполнены условия (2)–(4), (27), (28). Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_\varphi > 0$, $h_0 > 0$ такие, что для любых $x_1 : \|x_1\| < \varepsilon_0$, для любых φ: $\|\varphi(x,u,t)\| < \varepsilon_\varphi$ и для любых h: $0 < h < h_0$ существует решение Задачи 7, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Порядки обеих систем равны $n + 2r$.*

Четвертая глава иллюстрирует эффективность алгоритмов, полученных в первых трех главах, при решении конкретных практических задач. Проведено численное моделирование следующих задач: перевода гироскопической системы в окрестность положения равновесия в классе дискретных управлений, межорбитального перелета в классе дискретных управлений, межорбитального перелета с учетом реально измеряемых величин, дискретности управления и дискретности измерителя, адаптивного управления мостовым краном.

Список публикаций по теме диссертации

1. Квитко А.Н., Якушева Д.Б. Решение граничной задачи для нелинейной стационарной управляемой системы на бесконечном промежутке времени с учетом дискретности управления// Информационно-управляющие системы. 2011. №6. С. 25–29.

2. Квитко А.Н., Якушева Д.Б. Решение задачи синтеза дискретной стабилизации с учетом неполной информации для нелинейной стационарной управляемой системы//Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика, механика, астрономия. 2012. № 2. С. 21–30.

3. Квитко А.Н., Якушева Д.Б. Алгоритм построения кусочно-постоянного синтезирующего управления при решении граничной задачи для нелинейной стационарной системы// Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2012. № 1. С. 138–145.

4. Кабанов С.А., Никулин Е.Н., Якушев Б.Э., Якушева Д.Б. Управление перемещением груза мостовым краном по методу обратных задач динамики// Известия ВУЗов. Приборостроение. 2011. № 12. С. 30–33.

5. Кабанов С.А., Никулин Е.Н., Якушев Б.Э., Якушева Д.Б. Оптимальное управление перемещением груза мостовым краном// Известия ВУЗов. Приборостроение. 2011. № 5. С. 56–65.

6. Якушева Д.Б. Решение задачи перевода нелинейной управляемой системы из начала координат в заданную точку фазового пространства с учетом заранее неизвестных возмущений// Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения – XXIII". Воронеж, 3–9 мая. Изд.-полигр. центр ВГУ. 2012. С. 207.

7. Якушева Д.Б. Решение навигационной задачи Цермело при линейно-вихревой структуре течения// Процессы управления и устойчивость. Труды XL международной научной конференции аспирантов и студентов. Санкт-

Петербург, 6–9 апреля. Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2009. С. 91–96.

8. Якушева Д.Б. Решение граничной задачи для нелинейной стационарной управляемой системы на бесконечном промежутке времени с учетом дискретности управления// Устойчивость и процессы управления. Всероссийская конференция, посвященная 80-летию со дня рождения В.И. Зубова. Санкт-Петербург, 1–2 июля. С.-Петербург: ВВМ, 2010. С. 314–315.

9. Якушева Д.Б. Решение граничной задачи для нелинейной стационарной управляемой системы на бесконечном промежутке времени с учетом дискретности управления// Процессы управления и устойчивость. Труды XLI международной научной конференции аспирантов и студентов. Санкт-Петербург, 5–8 апреля. Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2010. С. 92–96.